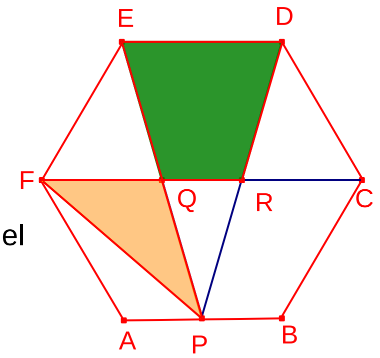
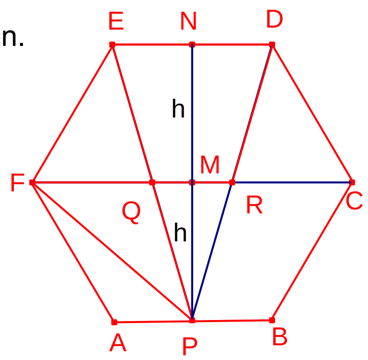
Problemes de Geometria per a l'ESO 210



Siga l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
El segment $\overline{EP}$ talla la diagonal $\overline{FC}$ en el punt Q.
El segment $\overline{EP}$ talla la diagonal $\overline{FC}$ en el punt R.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter DEQR i del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$.

Solució:



Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular ABCDEF.
Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{FC}$, M és el centre de l'hexagon.
$\overline{MF} = \overline{MC} = c$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{DE}$.
Siga $h = \overline{PM} = \overline{MN}$.
$\overline{QR}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{DEP}$.

Aleshores, $\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}c$.

$$\overline{FQ} = \frac{\overline{FC} - \overline{QR}}{2} = \frac{2c - \frac{1}{2}c}{2} = \frac{3}{4}c .$$

L'àrea del trapezi DEQR és:

$$S_{DEQR} = \frac{c + \frac{1}{2}c}{2}h = \frac{3}{4}ch .$$

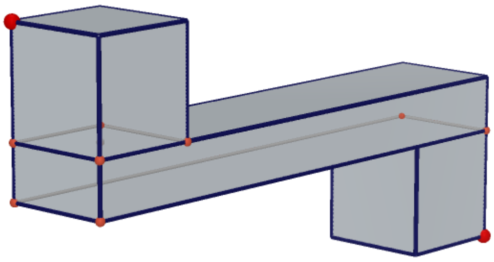
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$ és:

$$S_{FPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}c \cdot h = \frac{3}{8}ch .$$

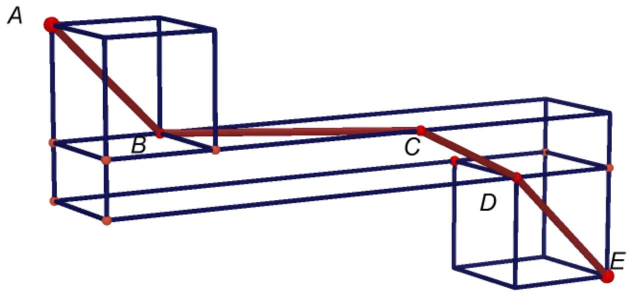
La proporció entre les àrees del quadrilàter DEQR i del triangle $\overset{\Delta}{FPQ}$ és:

$$\frac{S_{DEQR}}{S_{FPQ}} = \frac{\frac{3}{4}ch}{\frac{3}{8}ch} = 2 .$$

2092.- En la figura, representa un conducte d'aire de dimensions $1\times2\times10$ als extrems del qual hi ha dos cubs de dimensions $2\times2\times2$.
El conducte està completament buit i fet amb xapa.
Una aranya marxa per l'interior del conducte, d'un extrem indicat per un punt fins l'altre cantó indicat per un punt.
Existeixen dos enters positius m i n de manera que el camí més curt que recorre a l'aranya té longitud $\sqrt{m}+\sqrt{n}$. Determineu $m+n$.
Crux Mathematicorum CC327.

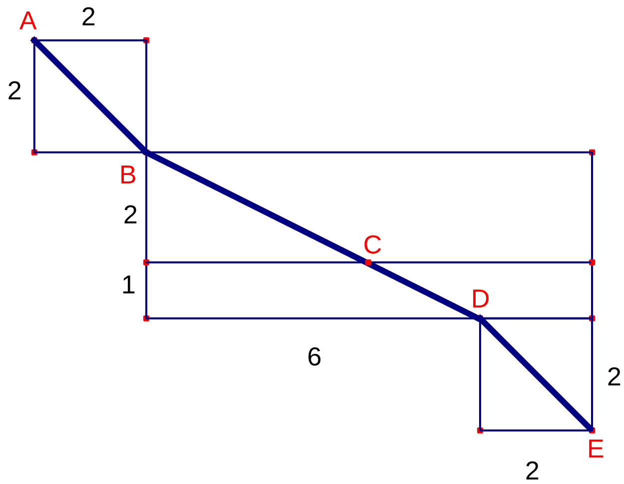


Solució:
El camí més curt és el format per la línia poligonal ABCDE.



Fent el desenvolupament pla:

Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{AB}=\overline{DE}=2\sqrt{2}$.
$\overline{BD}=3\sqrt{5}$.
$\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DE}=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}=\sqrt{32}+\sqrt{45}$.
Aleshores, $m=32$, $n=45$.
$m+n=77$.



2093.- La recta r és tangent a una circumferència de radi x i passa pel vèrtex superior del quadrat de la dreta.

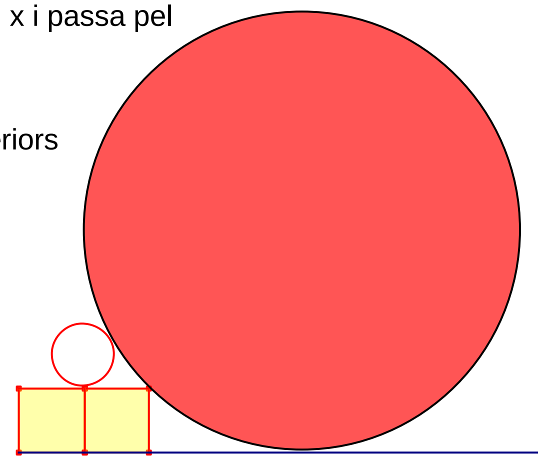
Els dos quadrats tenen en comú el segment $\overline{AF}$

Una circumferència de radi a és tangent als costats superiors dels quadrats en el punt F.

El diàmetre 2a de la circumferència menuda és igual al costat del quadrat.

Calculeu el valor del radi x en funció del radi a.

Sangaku



Solució:

$\overline{OP} = \overline{OT} = x$.

$\overline{OK} = x - 2a$.

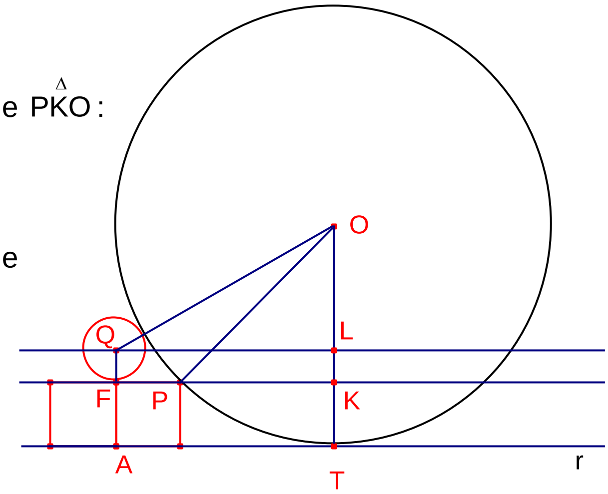
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$:

$\overline{PK} = 2\sqrt{ax - a^2}$.

$\overline{OQ} = x + a$, $\overline{OL} = 2a + 2\sqrt{ax - a^2}$, $\overline{OL} = x - 3a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLO}$:

$$(x+a)^2 = (x-3a)^2 + \left(2a + 2\sqrt{ax - a^2}\right)^2 .$$



Simplificant:

$x^2 - 8ax + 8a^2 = 0$.

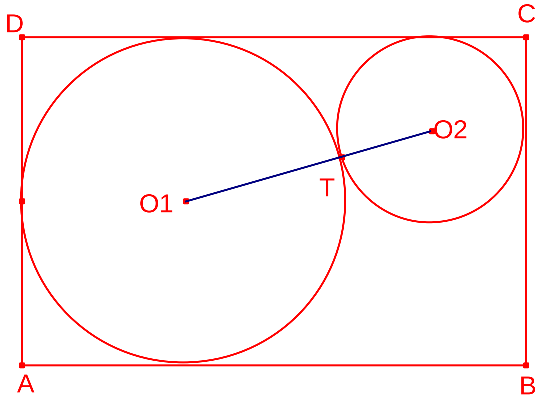
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{a}\right) + 8 = 0 .$$

Resolent l'equació:

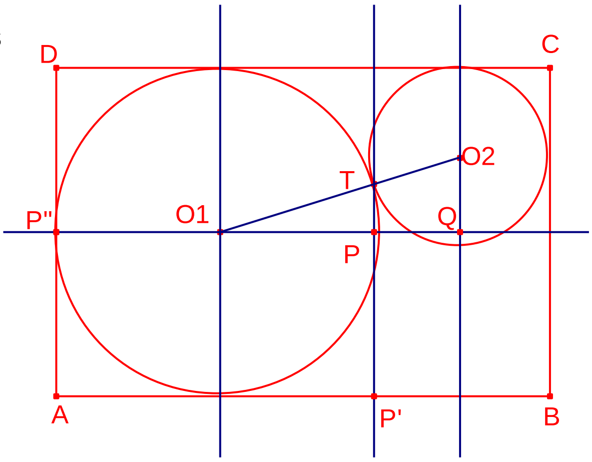
$$\frac{x}{a} = 4 + 2\sqrt{2} .$$

$$x = 2\left(2 + \sqrt{2}\right)a .$$

2094.- Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$.
Dins del rectangle es dibuixen dues circumferències tangents exteriors de forma que una és tangent als costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ i l'altra és tangent als costats $\overline{CB}$ i $\overline{CD}$.
Calculeu la distància entre els centres de les dues circumferències en funció de a i b.
Fent variar els radis de forma que la situació de tangència es mantinga, determineu el lloc geomètric que descriu el punt comú a les circumferències.



Solució:
Siguen r i s els radis de les circumferències de centres O_1 i O_2, respectivament.
$\overline{O_1Q}=a-(r+s)$, $\overline{O_2Q}=b-(r+s)$, $\overline{O_1O_2}=r+s$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1QO_2}$:



$(r+s)^2=(a-(r+s))^2+(b-(r+s))^2$.
$(r+s)^2-2(a+b)(r+s)+a^2+b^2=0$.
Resolent l'equació:
$r+s=a+b-\sqrt{2ab}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{O_1QO_2}$, $\overset{\Delta}{O_1PT}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PT}}{r}=\frac{b-(r+s)}{r+s}=\frac{-a+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}.$$

$$\overline{PT}=\frac{-a+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}r.$$

$$\overline{P'T}=\frac{-a+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}r+r=\frac{b}{a+b-\sqrt{2ab}}r.$$

$$\frac{\overline{O_1P}}{r}=\frac{a-(r+s)}{r+s}=\frac{-b+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}.$$

$$\overline{O_1P}=\frac{-b+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}r.$$

$$\overline{P''P}=\overline{AP'}=\frac{-b+\sqrt{2ab}}{a+b-\sqrt{2ab}}r+r=\frac{a}{a+b-\sqrt{2ab}}r.$$

$$\frac{\overline{P'T}}{\overline{P''P}}=\frac{\frac{b}{a+b-\sqrt{2ab}}r}{\frac{a}{a+b-\sqrt{2ab}}r}=\frac{b}{a}.$$

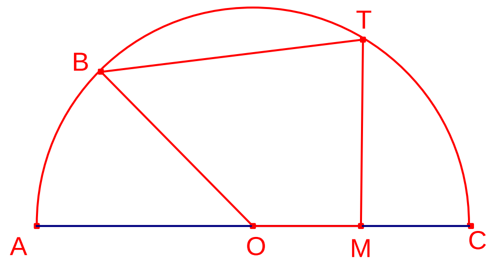
Aleshores, T pertany a la diagonal $\overline{AC}$ del rectangle ABCD.

2095.- La semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AC}$ es divideix en dos arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ amb la relació 1:3.

Siga M el punt mig del radi $\overline{OC}$.

Siga T un punt de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ tal que l'àrea del quadrilàter OBTM és màxima.

Calculeu aquesta àrea màxima en funció del radi.



Solució:

Siga $\overline{OC}=R$ radi de la semicircumferència.

Siga $\alpha=\angle TOM$. $\angle BOT=135^{\circ}-\alpha$

Els $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ amb la relació 1:3, aleshores, $\angle BOT=135^{\circ}$.

L'àrea del quadrilàter OBTM és:

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{R}{2}R\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right).$$

$$S(\alpha)=\frac{R^2}{4}\left(\sin\alpha+2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right),\ \alpha\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right].$$

$$S'(\alpha)=\frac{R^2}{4}\left(\cos\alpha-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right).$$

$$S'(\alpha)=0.$$

$$\cos\alpha-2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)=0.$$

$$\left(1+\sqrt{2}\right)\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha=0.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{2}.\quad \alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right).\ \sin\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}},\ \operatorname{co}\alpha=\frac{2}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$$

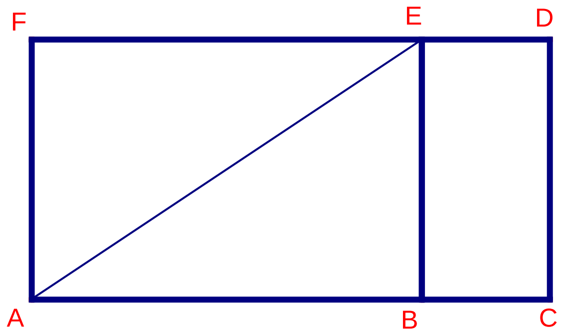
$$S''(\alpha)=\frac{R^2}{4}\left(-\sin\alpha-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right)$$

$S''\left(\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)<0$, aleshores, el màxim s'assoleix quan $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Calculem l'àrea màxima:

$$S(\alpha)=\frac{R^2}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha\right).$$

$$S\left(\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{R^2}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}+\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}\right)=\frac{4+5\sqrt{2}}{4\sqrt{10+4\sqrt{2}}}R^2.$$



2096.- En la figura, ABEF i BCDE són rectangles. $\overline{AB} = 3 \cdot \overline{BC}$, $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{BC}$ i l'àrea del quadrilàter ACDE és 162.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ i el perímetre del rectangle ACDF.

Solució:

Siga $\overline{BC} = x$.

Aleshores, $\overline{AB} = 3x$, $\overline{AC} = 4x$, $\overline{CD} = 2x$.

L'àrea del trapezi ACDE és 162:

$$\frac{4x + x}{2} 2x = 162.$$

Simplificant:

$$x^2 = \frac{162}{5}. \quad x = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

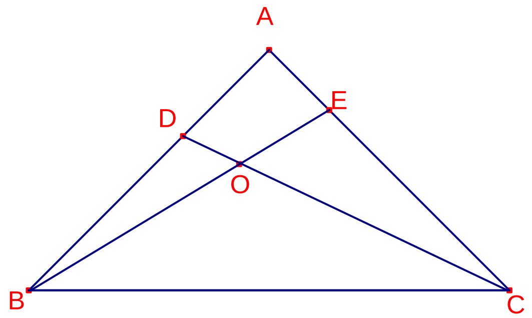
$$S_{ABE} = \frac{1}{2} 3x \cdot 2x = 3x^2 = 3\frac{162}{5} = \frac{486}{5}.$$

El perímetre del rectangle ACDF és:

$$P_{ACDF} = 2(4x + 2x) = 12x = 12 \cdot \frac{9\sqrt{10}}{5} = \frac{108\sqrt{10}}{5}.$$

2097.- Siga el triangle rectangle isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=90^{\circ}$.
Siguen D i E dos punts dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, respectivament.
Siga O la intersecció de $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$.
Si $\angle DCA=20^{\circ}$ i $\angle BOC=4\angle EBC$, calculeu la mesura $\angle COB$ i $\angle ABE$.

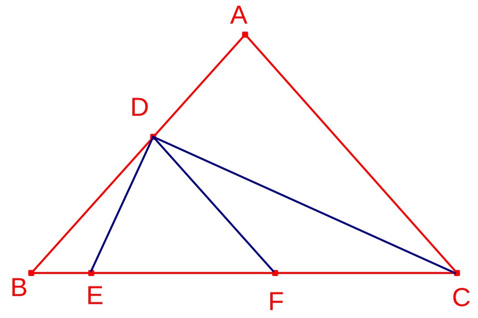
Solució:



Siga $\alpha=\angle EBC$.
$\angle ABC=\angle ACB=45^{\circ}$.
$\angle BOC=4\alpha$.
$\angle BCO=45^{\circ}-\angle ACD=45^{\circ}-20^{\circ}=25^{\circ}$.

2098.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=\overline{AC}$, amb l'angle A major que 60º.
Siga $\overline{CD}$ la bisectriu, tal que D pertany al costat $\overline{AB}$.
Pel punt D tracem una perpendicular al segment $\overline{CD}$ que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E.
Pel punt D tracem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt F.
Si $\overline{BD}=6$ i $\overline{BE}=2$, calculeu les mesures dels segments $\overline{BF}$ i $\overline{AB}$.

Solució:
Siga $\angle ABC=\angle ACB=2\alpha$.
Per ser $\overline{DF}$ paral·lela al costat $\overline{AC}$, $\angle BFD=2\alpha$.



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BFD}$ és isòsceles.
Aleshores, $\overline{DF}=\overline{BD}=6$.
$\angle FDC+\angle FCD=\angle BFD$.
$\angle FDC+\alpha=2\alpha$.
Aleshores, $\angle FDC=\alpha$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CFD}$ és isòsceles.
Aleshores, $\overline{FC}=\overline{DF}=6$.

$\angle EDC=90º$, $\angle ECD=\alpha$.
Aleshores, $\angle EDF=90º-\alpha$.
$\angle EDF=90º-\angle FDC=90º-\alpha$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és isòsceles.
Aleshores, $\overline{EF}=\overline{DF}=6$.
$\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EF}=2+6=8$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DBF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

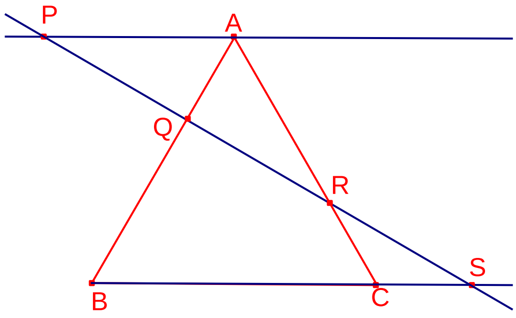
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{FC}}.$$

$$\frac{6}{8}=\frac{\overline{AD}}{6}.$$

Aleshores, $\overline{AD}=\frac{9}{2}$.

$$\overline{AB}=\overline{BD}+\overline{AD}=6+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}.$$

2099.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat 3. Tracem la recta s, que conté el costat $\overline{BC}$ i la recta p paral·lela a $\overline{BC}$ que passa per A. Si $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}$, essent PQRS una transversal amb el punt P en p, Q en $\overline{AB}$, R en $\overline{AC}$ i S en s. Calculeu la mesura del segment $\overline{CS}$.



Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Siga $\overline{AB}=c$, costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=x$.

Siga $\overline{PA}=y$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APR}$, $\overset{\Delta}{CSR}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$$2\cdot\overline{CS}=y \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{SBQ}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$$c+\overline{CS}=2y \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

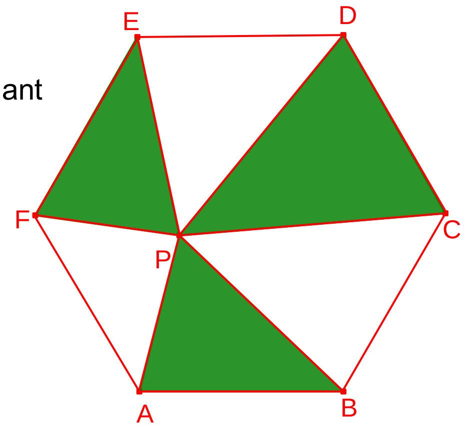
$$c+\overline{CS}=4\cdot\overline{CS} \qquad (3)$$

Resolent l'equació:

$$\overline{CS}=\frac{1}{3}c.$$

Si $\overline{AB}=c=3$, $\overline{CS}=1$.

2100.- Siga P un punt interior d'un hexàgon regular.
Unim el punt P amb els vèrtexs de l'hexàgon regular formant 6 triangles.
Pintem els triangles alternativament de verd i blanc.
Proveu que la suma de les àrees pintada de verd és igual a la suma de les àrees pintada de blanc.



Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.

L'àrea de l'hexàgon regular ABCDE és:

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

Siguen h_1, h_2, h_3 les distàncies de O als costats $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$, respectivament.

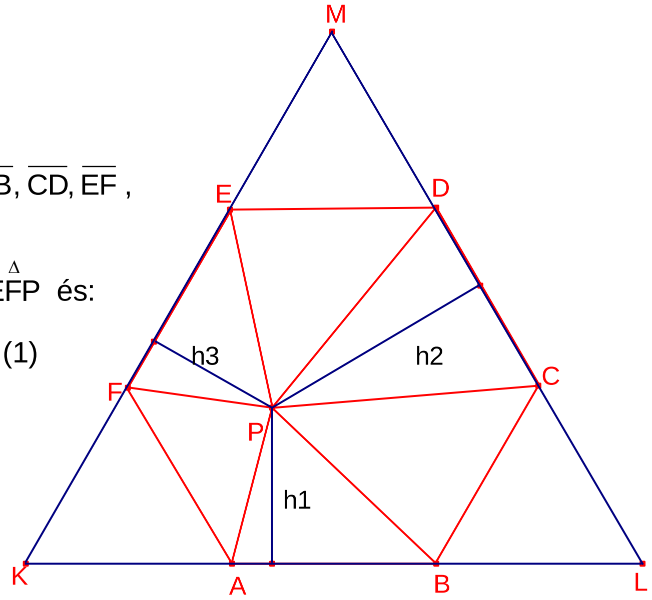
La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$, $\overset{\Delta}{EFP}$ és:

$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c \qquad (1)$$

Dibuixem les rectes AB, CD, i EF.

La intersecció dos a dos de les rectes forma el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{KL} = 3c$.



L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és igual a la suma dels triangles $\overset{\Delta}{KLP}$, $\overset{\Delta}{LMP}$, $\overset{\Delta}{KMP}$:

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3c)^2 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)3c.$$

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}c \qquad (2).$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$S_{verd} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3)c = \frac{3\sqrt{3}}{4}c^2.$$

Aleshores, $S_{verd} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$.

Per tant, la suma de les àrees pintada de verd és igual a la suma de les àrees pintada de blanc.