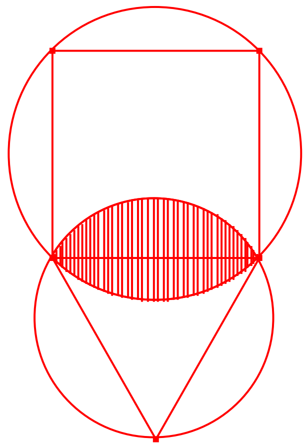
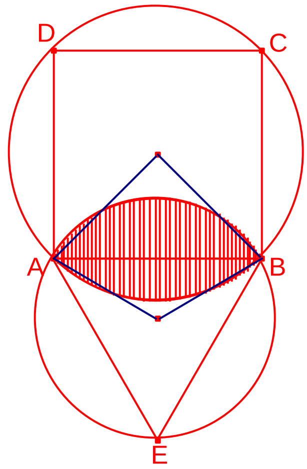
Problemes de Geometria per a l'ESO 211

2101.- Sobre un costat d'un quadrat de costat c s'ha dibuixat un triangle equilàter (veure figura).
Calculeu l'àrea de la intersecció de les dues circumferències circumscrites al quadrat i al triangle equilàter.



Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

El radi de la circumferència circumscrita al quadrat és:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

El radi de la circumferència circumscrita al triangle equilàter és:

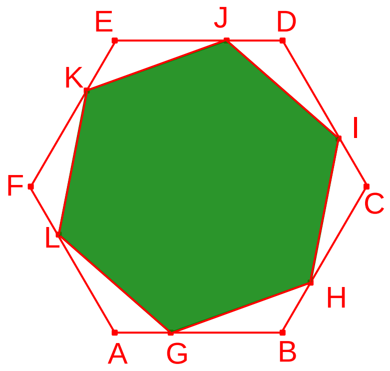
$$r = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea de la intersecció de les dues circumferències circumscrites al quadrat i al triangle equilàter és igual a la suma de dos segments circulars, un de radi $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ i 90º i una altre de radi $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i 120º:

$$S = \left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - \frac{1}{4}c^2\right) + \left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{17\pi - 18 - 6\sqrt{3}}{72}c^2.$$

2002.- En un hexàgon regular ABCDEF s'ha inscrit l'hexàgon regular GHIJKL tal que $\overline{AG} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon ABCDEF.

$\overline{AG} = \frac{1}{3}c$, $\overline{AL} = \frac{2}{3}c$.

$\angle FAG = 120^o$, angle interior de l'hexàgon regular.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LAG}$:

$$\overline{LG}^2 = \left(\frac{1}{3}c\right)^2 + \left(\frac{2}{3}c\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{7}{9}c^2.$$

La proporció de les àrees de dos hexàgons regulars és igual al quadrat de la proporció dels costats.

$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{\overline{LG}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

Generalització:

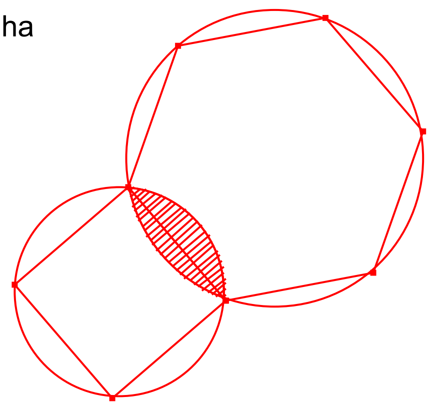
En un hexàgon regular ABCDEF s'ha inscrit l'hexàgon regular GHIJKL tal que $\overline{AG} = k \cdot \overline{AB}$.

Calculeu la proporció entre les àrees dels dos hexàgons.

Solució:

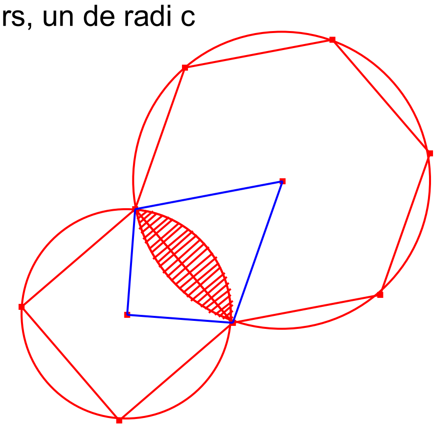
$$\frac{S_{GHIJKL}}{S_{ABCDEF}} = k^2 - k + 1.$$

2103.- Sobre un costat d'un hexàgon regular de costat c s'ha dibuixat un quadrat (veure figura).
Calculeu l'àrea de la intersecció de les circumferències circumscrites als dos polígons regulars.

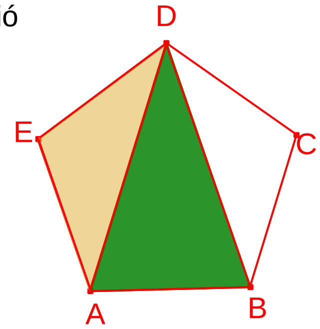


Solució:
L'àrea és igual a la suma de les àrees de dos segments circulars, un de radi c i angle 60º i un de radi $\frac{\sqrt{2}}{2}c$ i radi 90º.

$$S=\left(\frac{1}{6}\pi c^2-\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)+\left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2-\frac{1}{4}c^2\right)=\frac{7\pi-6\sqrt{3}-6}{24}c^2.$$



2104.- Donat el pentàgon regular ABCDE determineu la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$ i $\overset{\Delta}{ABD}$



Solució:

$\angle ADE = \angle ADB = 36^{o}$.

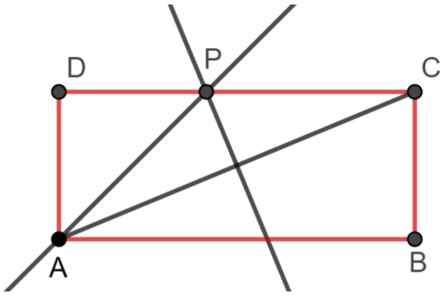
Siga $\overline{AB} = c$.

$\overline{AD} = \overline{BD} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$S_{ADE} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi \cdot \sin 36^{o}$.

$S_{ABDD} = \dfrac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \Phi \cdot \sin 36^{o}$.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \sin 36^{o}}{\frac{1}{2} \cdot \Phi^{2} \cdot \sin 36^{o}} = \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



2105.- Donat el rectangle ABCD tal que $\overline{AD}=1$, la bisectriu de l'angle A i la mediatriu de la diagonal $\overline{AC}$ es tallen en el punt P que pertany al costat $\overline{CD}$. Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$.

Solució:

Siga $x=\overline{AB}$.

$\overline{AP}$ és bisectriu de l'angle A.

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$ és isósceles.

Per tant, $\overline{DP}=\overline{AD}=1$.

$\overline{CP}=x-1$.

P pertany a la mediatriu de la diagonal $\overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{AP}=\overline{CP}$.

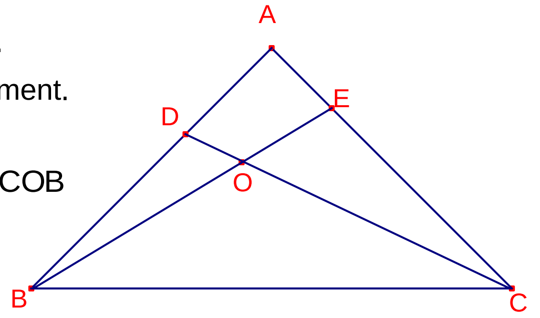
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADP}$:

$\overline{AP}=\sqrt{2}$.

Aleshores, $\overline{CP}=x-1=\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

$\overline{AB.}=1+\sqrt{2}$.

2106.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.
Siguen D i E dos punts dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, respectivament.
Siga O la intersecció de $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$.
Si $\angle DCA = 20^{o}$ i $\angle BOC = 4\angle EBC$, calculeu la mesura $\angle COB$ i $\angle ABE$.

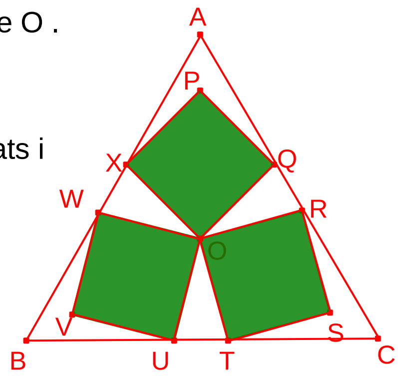


Solució:
Siga $\alpha = \angle EBC$.
$\angle ABC = \angle ACB = 45^{o}$.
$\angle BOC = 4\alpha$.
$\angle BCO = 45^{o} - \angle ACD = 45^{o} - 20^{o} = 25^{o}$

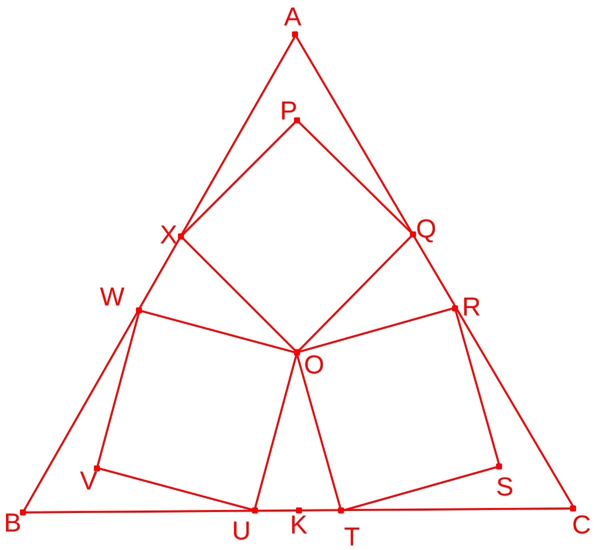
2107.- En la figura on $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de centre O . PQOX, STOR, VWOU són quadrats.

Demostreu que $\overline{AP} = \overline{TU}$.

Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:



$\angle UOT = \angle QOR = \angle WOX = \dfrac{360^o - 3\cdot 90^o}{3} = 30^o$.

Siga $\overline{AB} = c$ costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga K el punt mig del costat $\overline{BC}$.

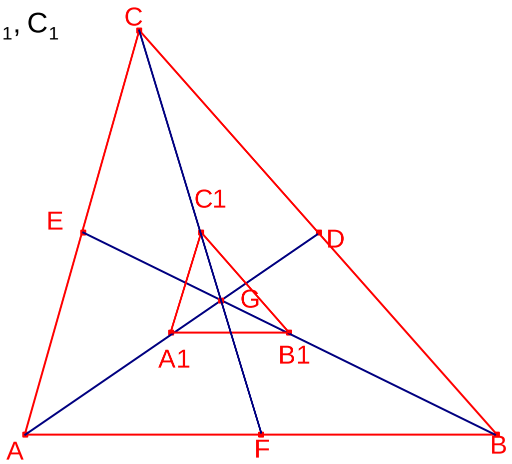
Siga $\overline{OT} = s$ costat dels quadrats.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKA}$

$\overline{AK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

2108.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es tracen els punts migs A_1, B_1, C_1 de les mitjanes $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$, respectivament.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$ és semblant al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Calculeu la raó de semblança.



Solució:
Siga G el baricentre del triangle.

Per la propietat del baricentre, $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AD}$.

Per hipòtesi, $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{AD}$.

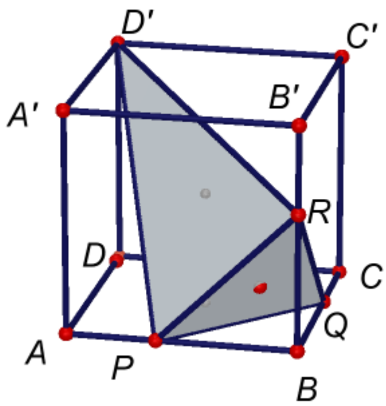
$\overline{A_1G} = \overline{AG} - \overline{AA_1} = \frac{2}{3}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{6}\overline{AD}$.

$$\frac{\overline{A_1G}}{\overline{AG}} = \frac{\frac{1}{6}\overline{AD}}{\frac{2}{3}\overline{AD}} = \frac{1}{4}.$$

Anàlogament, $\frac{\overline{B_1G}}{\overline{BG}} = \frac{1}{4}$, $\frac{\overline{C_1G}}{\overline{CG}} = \frac{1}{4}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{A_1B_1C_1}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$ són homotètics, G és el centre d’homotècia i la raó és 1:4.

2109.- Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta c.
Siguen P, Q, R punts sobre les arestes $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BB'}$,
respectivament tal que $\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{BR} = x$.
Determineu el volum del tetraedre PQRD' en funció de x i c.



Solució:

$\overline{BD'} = c\sqrt{3}$.

$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = x\sqrt{2}$

Siga G el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$.

Siga $h = \overline{GB}$ altura del tetraedre PBQR sobre la base $\overset{\Delta}{PQR}$.

El volum del tetraedre PBQR és:

$$V_{PBQR} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x\sqrt{2}\right)^2\right)h$$. Simplificant:

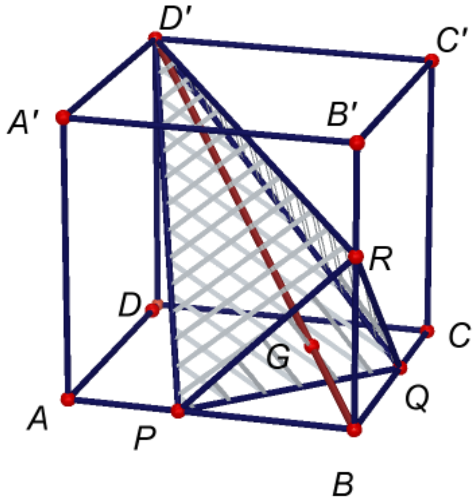
$x = h\sqrt{3}$.

$h = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$\overline{GD'} = c\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x$, altura del tetraedre PQRD'.

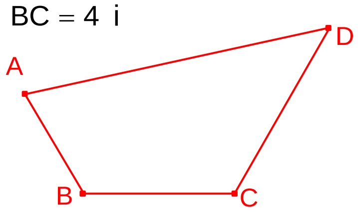
El volum del tetraedre PQRD' és:

$$V_{PQRD'} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x\sqrt{2}\right)^2\left(c\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) = \frac{1}{2}x^2\left(c - \frac{1}{3}x\right).$$



2110.- En un quadrilàter convex ABCD $B = C = 120^{o}$, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ i $\overline{CD} = 5$.

Calculeu l'àrea i el perímetre del quadrilàter ABCD.



Solució 1:

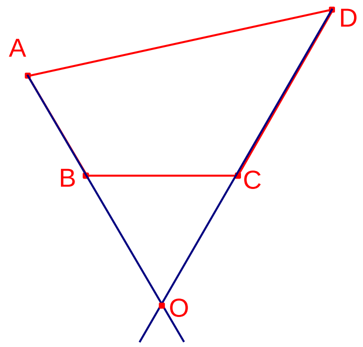
Siga O la intersecció de les rectes AB, CD.

$\angle BCO = \angle CBO = 60^{o}$

El triangle $\overset{\Delta}{BCO}$ és equilàter.

Aleshores, $\overline{OC} = \overline{OB} = 4$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la diferència de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADO}$, $\overset{\Delta}{BCO}$:



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} 7 \cdot 9 \cdot \sin 60^{o} - \frac{\sqrt{3}}{4} 4^2 = \frac{47}{4}\sqrt{3} \approx 20.35 .$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADO}$:

$$\overline{AD}^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 60^{o} = 67 .$$

$$\overline{AD} = \sqrt{67} .$$

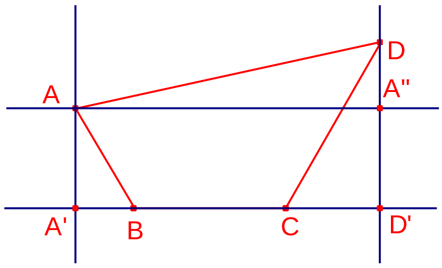
El perímetre del quadrilàter ABCD és:

$$P_{ABCD} = 3 + 4 + 5 + \sqrt{67} = 12 + \sqrt{67} \approx 20.19 .$$

Solució 2:

Siguen A' i B' les projeccions de A i D sobre la recta BC, respectivament.

Siga A" la projecció de A sobre la recta DD'.



$$\overline{A'B} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}. \quad \overline{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{2} .$$

$$\overline{CD'} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{5}{2}. \quad \overline{DD'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD} = \frac{5\sqrt{3}}{2} .$$

$$\overline{AA''} = \overline{A'D'} = \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CD'} = 8 .$$

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a l'àrea del trapezi rectangle A'D'DA menys les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AA'B}$, $\overset{\Delta}{CD'D}$:

$$S_{ABCD} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} 8 - \left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{5}{2}\frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{37\sqrt{3}}{4} \approx 20.35 .$$

$$\overline{DA''} = \overline{DD'} - \overline{AA'} = \sqrt{3} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AA''D}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{8^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{67} .$$

El perímetre del quadrilàter ABCD és:

$$P_{ABCD} = 3 + 4 + 5 + \sqrt{67} = 12 + \sqrt{67} \approx 20.19 .$$