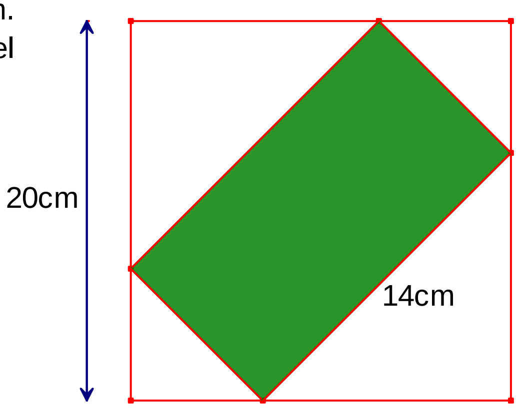
Problemes de Geometria per a l'ESO 212

2111.- En un rectangle una de les seues dimensions és 14 cm.
El rectangle està inscrit en un quadrat de costat 20 cm.
Calculeu la proporció entre les àrees del rectangle i del quadrat.

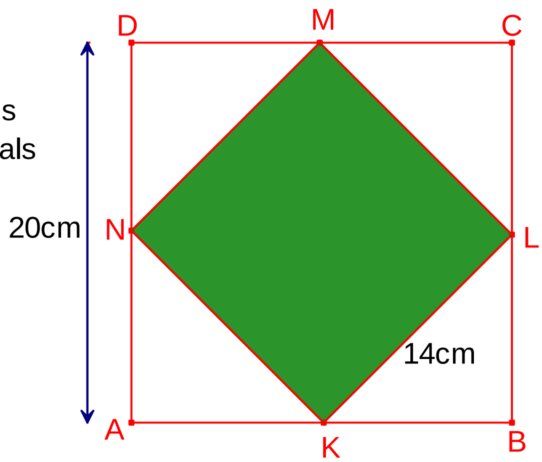


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AD} = 20$.

Siga KLMN el rectangle tal que $\overline{KL} = \overline{MN} = 14$.

Per poder construir el rectangle inscrit en el quadrat, els costats del rectangle han de ser paral·lels a les diagonals del quadrat.



Siga $x = \overline{AK} = \overline{AN}$.

$\overline{BK} = \overline{BL} = 20 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KBL}$:

$2(20-x)^2 = 14^2$.

$x^2 - 40x + 302 = 0$. Resolent l'equació:

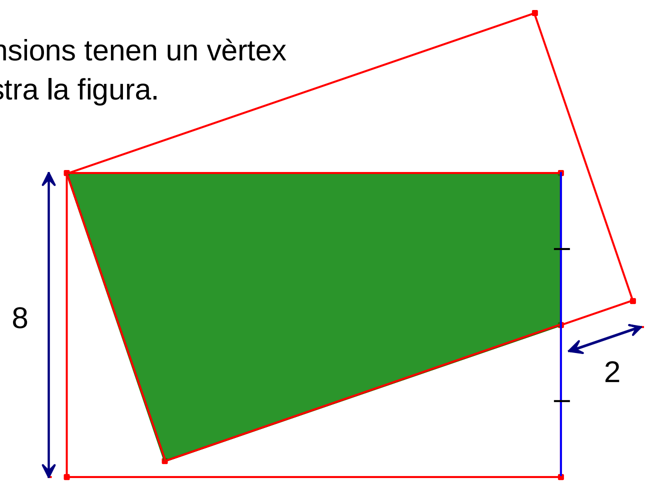
$x = 20 - 7\sqrt{2}$.

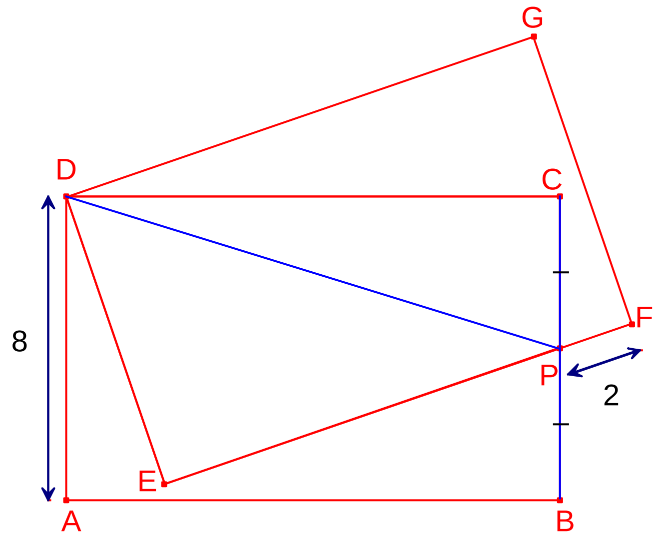
$\overline{KN} = x\sqrt{2} = 20\sqrt{2} - 14$.

La proporció entre les àrees del rectangle i del quadrat és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{14\left(20\sqrt{2} - 14\right)}{20^2} = \frac{70\sqrt{2} - 49}{100} \approx 0.49995 .$$

2112.- Dos rectangles de les mateixes dimensions tenen un vèrtex comú i estan parcialment recoberts com mostra la figura.
Calculeu l'àrea comuna ombrejada.





Solució:
Siguen els rectangles ABCD, DEFG d'iguals dimensions.
Siga P el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga $x = \overline{EP}$.
$\overline{CD} = \overline{EF} = 2 + x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DEP}$:

$$\overline{DP}^2 = 8^2 + x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DCP}$:

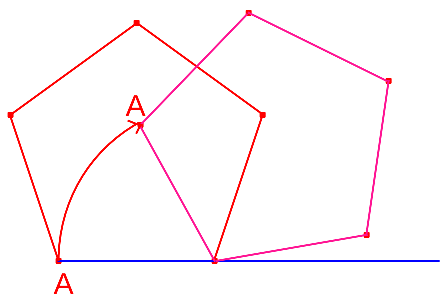
$$\overline{DP}^2 = 4^2 + (2 + x)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2):
$8^2 + x^2 = 4^2 + (2 + x)^2$.
Simplificant:
$4x = 44$. Resolent l'equació:
$x = 11$.

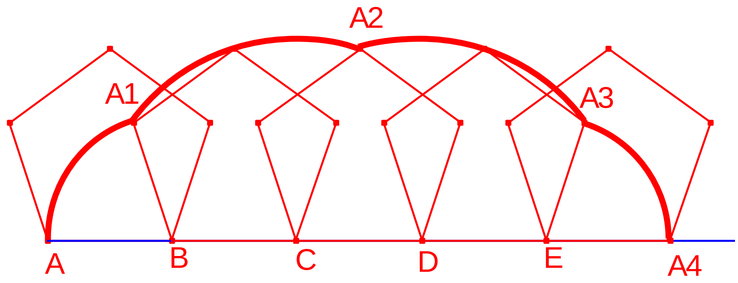
L'àrea del quadrilàter DEPC és igual a l'àrea dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEP}$, $\overset{\Delta}{DCP}$:

$$S_{DEPC} = \frac{8 \cdot 11}{2} + \frac{4 \cdot 13}{2} = 70.$$

2113.- Sobre una recta donada fem rodolar un pentàgon regular de costat 1 metre.
Quina és la distància que recorre el vèrtex A fins tornar per primera vegada sobre la recta.



Solució:



L'arc $\overset{\frown}{AA_1}$ té centre B radi $\overline{BA}=1$ i 72º.

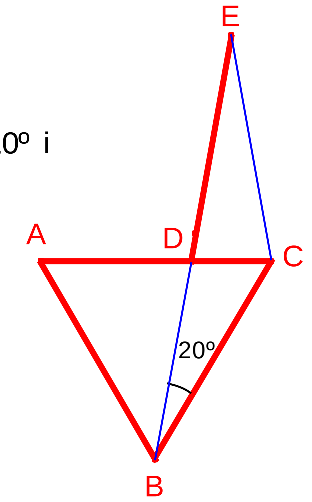
L'arc $\overset{\frown}{A_1A_2}$ té centre C radi $\overline{CA_1}=\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 72º.

La distància recorreguda pel punt A fins tornar a la recta és el doble de la suma dels dos arcs.

$$L=2\left(2\pi\frac{72^o}{360^o}+2\pi\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{72^o}{360^o}\right)=\frac{6+2\sqrt{5}}{5}\pi\approx 6.58\,.$$

2114.- Per omplir la copa a la meitat de l'altura del seu contingut es tarda 1 segon.
Quants segons tardaria en acabar d'omplir la copa.

Solució:
El con format per la copa plena fins la meitat d'altura i el con total de la copa són semblants i de raó 1:2.
Aleshores, el volum del con gran és vuit vegades el con menut.
Aleshores, per acabar d'omplir-la caldrien 7 segons.



2115.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

El segment $\overline{BE}$ talla el costat $\overline{AC}$ en el punt D. de forma que $\angle EBC = 20^o$ i $\overline{DE} = \overline{AB}$.

Calculeu la mesura de l'angle $\angle BEC$.

Solució 1:

Siga $\overline{DE} = \overline{AB} = 1$.

Siga $\angle BEC = \alpha$.

$\angle CDE = 80^o$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\frac{1}{\sin(80^o + \alpha)} = \frac{\overline{CE}}{\sin 80^o} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CE}}{\sin 20^o} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(80^o + \alpha)} = \frac{\sin 20^o}{\sin 80^o}.$$

$\sin\alpha \cdot \sin 80^o = \sin(80^o + \alpha) \cdot \sin 20^o$. Transformant productes en sumes:

$co(\alpha - 80^o) - \cos(80^o + \alpha) = \cos(60^o + \alpha) - \cos(100^o + \alpha)$.

$co(\alpha - 80^o) + \cos(100^o + \alpha) = \cos(60^o + \alpha) + \cos(80^o + \alpha)$.

$co(\alpha - 80^o) + \cos(100^o + \alpha) = 0$ per ser angles suplementaris.

$\cos(60^o + \alpha) + \cos(80^o + \alpha) = 0$.

$\cos(60^o + \alpha) = -\cos(60^o + \alpha)$.

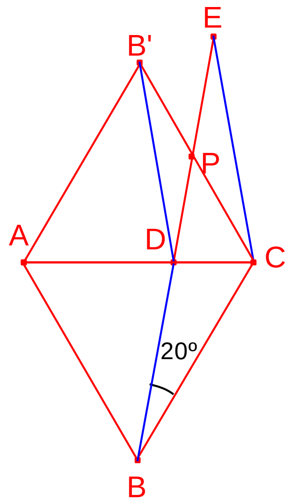
$\cos(60^o + \alpha) = \cos(120^o - \alpha)$.

$60^o + \alpha = 120^o - \alpha$.

Resolent l'equació:

$\alpha = 20^o$.

Solució 2:



Construïm el triangle equilàter $\overset{\Delta}{AB'C}$.

Siga P la intersecció de

$\angle CB'D = \angle CBD = 20^o$. $\angle CDE = 80^o$.

$\angle ADB = \angle CDE = 80^o$

$\angle ADB = \angle ADB' = 80^o$

$\angle B'DE = 180^o - (\angle ADB' + CDE) = 20^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DB'P}$ és isòsceles, $\overline{DP} = \overline{B'P}$.

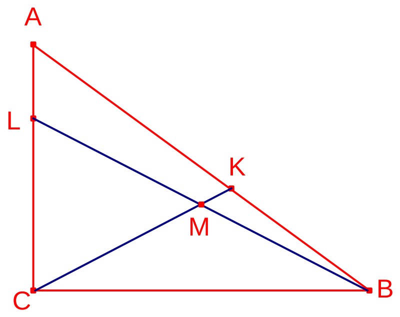
Aleshores, $\overline{CP} = \overline{CP}$. Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{CPE}$ és isòsceles

$\angle CPE = \angle DPB' = 180^o - 2 \cdot 20^o = 140^o$.

Aleshores, $\angle BEC = 20^o$.

2116.- Siga K un punt sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, i L un punt sobre el catet $\overline{AC}$ tal que $\overline{AK}=\overline{AC}$ i $\overline{BK}=\overline{LC}$.
Siga M la intersecció dels segments $\overline{BL}$ i $\overline{CK}$.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{CLM}$ és isòsceles.



Solució:

$\overline{AK}=\overline{AC}=b$.

$\overline{BK}=\overline{LC}=c-b$.

$\angle ACK=90^{o}-\frac{A}{2}$.

$$tg\left(90^{o}-\frac{A}{2}\right)=ctg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b}{c}}{1-\frac{b}{c}}}=\sqrt{\frac{b+c}{c-b}}.$$

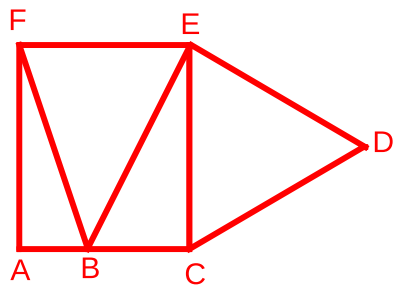
Siga $\angle CLB=\alpha$.

$$tg\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{LC}}=\frac{a}{c-b}=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c-b}=\sqrt{\frac{b+c}{c-b}}.$$

Aleshores, $\alpha=\angle ACK=90^{o}-\frac{A}{2}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CLM}$ és isòsceles.

2117.- En la figura, ACEF és un rectangle, $\overset{\Delta}{CDE}$ és un triangle equilàter.



$\overline{AF} = 3 \cdot \overline{AB}$, $\overline{AC} = \frac{5}{2}\overline{AB}$, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és $294\ cm^2$.

Calculeu el perímetre de $\overset{\Delta}{CDE}$, l'àrea de BCDE i l'àrea de $\overset{\Delta}{BEF}$.

Solució:

Siga $x = \overline{AB}$.

$\overline{AF} = 3x$, $\overline{BC} = \frac{3}{2}x$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és $294\ cm^2$, aleshores:

$\frac{x \cdot 3x}{2} = 294$. Resolent l'equació:

$x = 16$.

El perímetre de $\overset{\Delta}{CDE}$ és:

$P_{CDE} = 3 \cdot 3x = 9x = 144\ cm$.

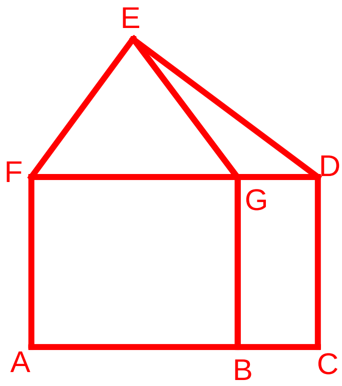
L'àrea de BCDE és igual a l'àrea del rectangle ACEF menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$S_{BCEF} = \frac{5}{2}x \cdot 3x - 294 = 1626\ cm^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és igual a la meitat de l'àrea del ACEF:

$S_{BEF} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x \cdot 3x\right) = 960\ cm^2$.

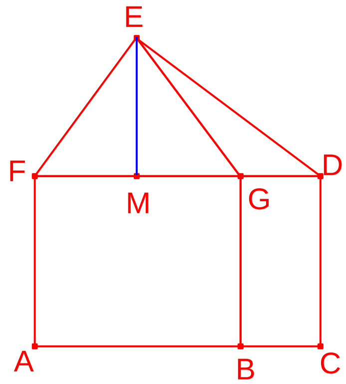
2118.- En la figura, ABGF i BCDG són rectangles tal que
$\overline{AF} = \overline{EF} = \overline{EG}$.
El perímetre de ACDF és 240 cm.
El perímetre de BCDG és 132 cm.
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{EFG}$ és 144.
Calculeu els perímetres de ABGF, $\overset{\Delta}{DEF}$ i de BCDEG.



Solució:
Siguen $x = \overline{AF} = \overline{EF} = \overline{EG}$, $y = \overline{AB}$, $z = \overline{BC}$.
El perímetre de ACDF és 240 cm, aleshores:
$x + y + z = 120$ (1)
El perímetre de BCDG és 132 cm, aleshores:
$x + z = 66$ (2)
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{EFG}$ és 144, aleshores:
$2x + y = 144$ (3)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2) (3):

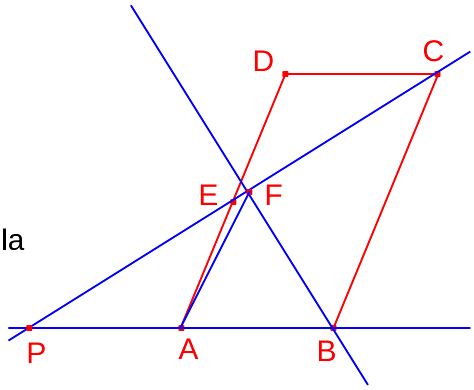
$\begin{cases} x + y + z = 120 \\ x + z = 66 \\ 2x + y = 144 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = 45 \\ y = 54 \\ z = 21 \end{cases}$.



El triangle $\overset{\Delta}{EFG}$ és isòsceles, siga M el punt mig del costat desigual:
$\overline{FM} = \frac{1}{2}y = 27$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FME}$:
$\overline{EM}^2 = 45^2 - 27^2 = 36^2$.
$\overline{DM} = \frac{1}{2}y + z = 48$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DME}$:
$\overline{DE}^2 = 48^2 + 36^2$.
$\overline{DE} = 60$.
El perímetre de ABGF és:
$P_{ABGF} = 2(x + y) = 198$ cm.
El perímetre de $\overset{\Delta}{DEF}$ és:
$P_{DEF} = x + y + z + \overline{DE} = 180$ cm
El perímetre de BCDEG és:
$P_{BCDEG} = 3x + z + \overline{DE} = 210$ cm.

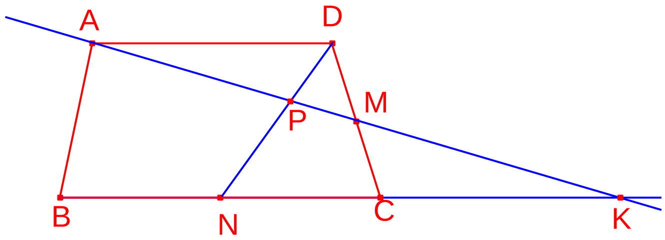
2119.- En un paral·lelogram ABCD, siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$ i F en el segment $\overline{CD}$ tal que $\overline{BF}$ és perpendicular a $\overline{CE}$.
Si $\overline{AB} = 5$ i $\overline{AD} = 9$, determineu la mesura del segment $\overline{AF}$.



Solució:
La recta CE talla la recta AB en el punt P.
Per ser E el punt mig del costat $\overline{AD}$:
$\overline{AP} = \overline{CD} = \overline{AB} = 5$.

El triangle $\overset{\Delta}{PFB}$ és rectangle i $\overline{AF}$ és la mitjana sobre la hipotenusa.
La mitjana d'un triangle rectangle sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.
Aleshores, $\overline{AF} = 5$.

2120.- Siga ABCD un trapezi amb els costats paral·leles $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.
Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Siga P el punt intersecció dels segments $\overline{AM}$ i $\overline{DN}$.
Si $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PM}$, calculeu $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$.



Solució:
Siga $\overline{BC} = a$, $\overline{AD} = b$.
Siga $\overline{PM} = x$, $\overline{AP} = 3x$.
$\overline{AM} = 4x$.
La recta AM talla la recta BC en el punt K.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{KCM}$ són iguals, aleshores:
$\overline{CK} = \overline{AD} = b$.
$\overline{MK} = \overline{AM} = 4x$.
$\overline{PK} = 5x$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$, $\overset{\Delta}{KNP}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{NK}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PK}}.$$
$$\frac{b}{b + \frac{a}{2}} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}.$$
$3a = 4b$.
Aleshores, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.