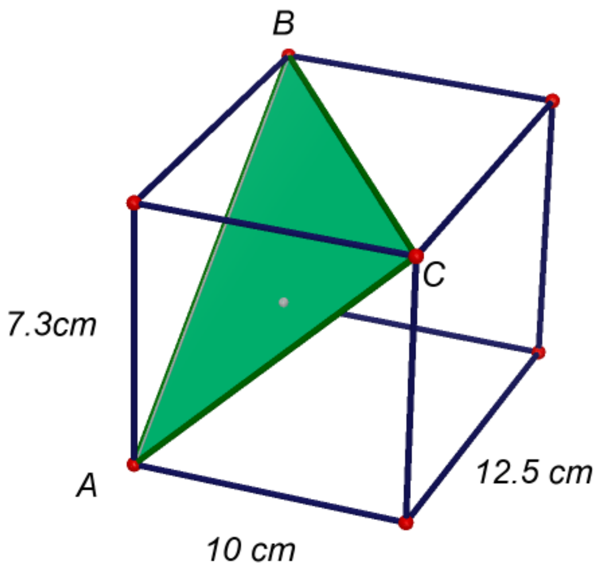
Problemes de Geometria per a l'ESO 213



2121.- Un ortoedre té arestes 12,5 cm, 10 cm i 7,3 cm.

Calculeu l'àrea i els angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Aplicant tres vegades el teorema de Pitàgores:

$\overline{AB}^2 = 12.5^2 + 7.3^2 = 209.54$.

$\overline{AC}^2 = 10^2 + 7.3^2 = 153.29$.

$\overline{BC}^2 = 12.5^2 + 10^2 = 256.25$.

$\overline{AB} = \sqrt{12.5^2 + 7.3^2} \approx 14.48$ cm.

$\overline{AC} = \sqrt{10^2 + 7.3^2} \approx 12.38$ cm

$\overline{BC} = \sqrt{12.5^2 + 10^2} \approx 16.01$ cm

Aplicant el teorema del cosinus:

$$A = \arccos\left(\frac{256.25 - 209.54 - 153.29}{-2\sqrt{209.54}\sqrt{153.29}}\right) \approx 72^o42'.$$

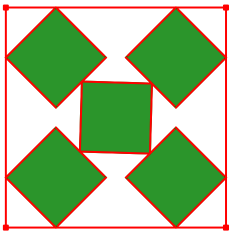
$$B = \arccos\left(\frac{153.29 - 209.54 - 256.25}{-2\sqrt{209.54}\sqrt{256.25}}\right) \approx 47^o36'.$$

$C = 180^o - (A + B) \approx 59^o42'$.

L'àrea del triangle és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{209.54}\sqrt{153.29}\sin(72^o42')}{2} \approx 85.56 \text{ cm}^2.$$

2122.- En un quadrat de costat 1 s'han inscrit cinc quadrats iguals. Determineu la mesura de cadascun d'aquests quadrats.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat 1.

$\overline{AC} = \sqrt{2}$.

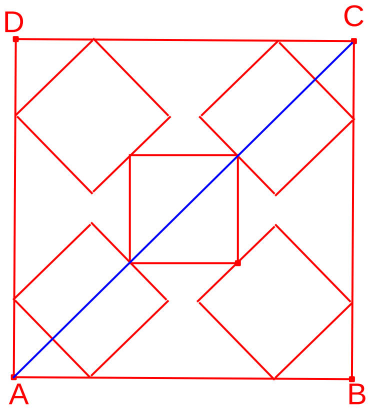
Siga c el costat dels 5 quadrats inscrits.

$\overline{AC} = 3c + c\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)c$.

Igualant ambdues expressions:

$\sqrt{2} = \left(3 + \sqrt{2}\right)c$.

$$c = \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{7}.$$

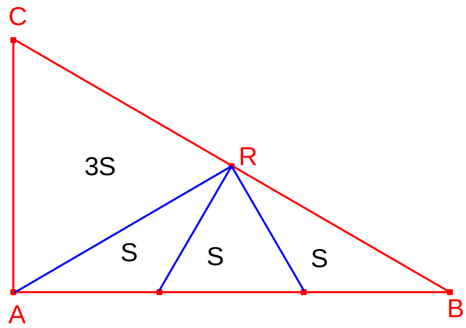


2123.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle en A i R és el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$. Sobre el catet major $\overline{AB}$ es marca el punt P tal que $\overline{CP} = \overline{BP}$ i sobre el segment $\overline{BP}$ es marca el punt Q tal que el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter. Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 27, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.

Solució 1:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ aleshores, P pertany a la mediatriu del segment $\overline{BC}$.

Aleshores, $\angle PRB = 90^o$.



Si $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter $\angle RPB = 60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $B = 30^o$, $C = 60^o$, $A = 90^o$.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.

$\angle RQB = 120^o$. Aleshores, $\angle QRB = 30^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{BQR}$ és isòsceles, aleshores, $\overline{PQ} = \overline{RQ} = \overline{QB}$.

Aleshores, $S_{PQR} = S_{QBR} = S$.

Per la propietat de la mitjana $\overline{AR}$ del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AR} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{BR}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABR}$ és isòsceles: $\angle APR = 120^o$. $\angle RBQ = 30^o$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APR}$, $\overset{\Delta}{BQR}$ són iguals. Aleshores, $S_{APR} = S_{QBR} = S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABR}$, $\overset{\Delta}{ACR}$ tenen la mateixa base sobre la recta BC i la mateixa altura.

Aleshores, $S_{ACR} = S_{ABR} = 3S$. Aleshores, $S_{ABC} = 6S = 27$.

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és $S = \frac{9}{2}$.

Solució 2:

Si $\overline{CP} = \overline{BP}$ aleshores, P pertany a la mediatriu del segment $\overline{BC}$.

Aleshores, $\angle PRB = 90^o$.

Si $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter $\angle RPB = 60^o$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $B = 30^o$, $C = 60^o$, $A = 90^o$. Siga $\overline{AB} = c$. Aleshores $\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

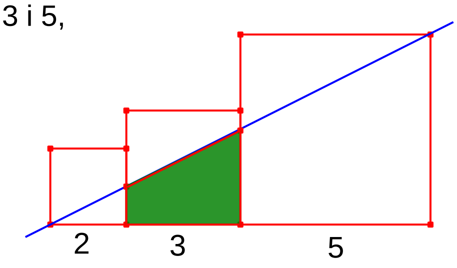
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 27: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{6}c^2 = 27$. Aleshores, $c^2 = 54\sqrt{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{RBP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

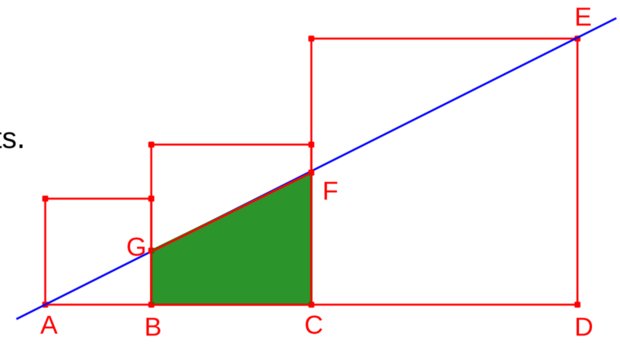
$\dfrac{\overline{PR}}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}c}{c}$. Aleshores, $\overline{PR} = \frac{1}{3}c$. L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ és:

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PR}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{9}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}54\sqrt{3} = \frac{9}{2}.$$

2124.- En la figura els costats dels quadrats mesuren 2, 3 i 5, respectivament.
Determineu l'àrea ombrejada.



Solució:



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ACF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{AC}}.$$

$$\frac{5}{10}=\frac{\overline{CF}}{5}.$$ Aleshores, $\overline{CF}=\frac{5}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{5}{10}=\frac{\overline{BG}}{2}.$$ Aleshores, $\overline{BG}=1$.

L'àrea del trapezi rectangle BCFG és:

$$S_{BCFG}=\frac{\overline{CF}+\overline{BG}}{2}\overline{BC}=\frac{\frac{5}{2}+1}{2}3=\frac{21}{4}.$$

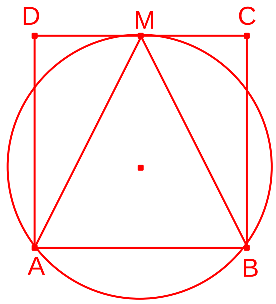
2125.- Siga ABCD un quadrat de costat 4 i M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Calculeu el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.

Solució 1:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és igual a la meitat de l'àrea del quadrat ABCD:

$S_{ABM}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$\overline{AM}=\overline{BM}=2\sqrt{5}$.

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

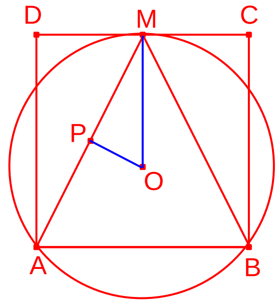
$S_{ABM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{BM}}{4R}$.

Igualant les àrees:

$S_{ABM}=\frac{4\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{4R}=8$. Resolent l'equació:

$R=\frac{5}{2}$.

Solució 2:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$\overline{AM}=\overline{BM}=2\sqrt{5}$.

Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.

$\overline{OM}$ és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AM}$ del al triangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{AM}=\sqrt{5}$.

El triangle $\overset{\Delta}{OPM}$ és rectangle $P=90^{o}$.

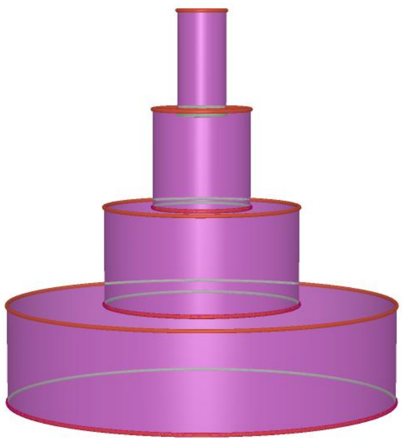
Els triangles $\overset{\Delta}{OPM}$, $\overset{\Delta}{MDA}$ són semblants. Aplicanty el teorema de Tales:

$\frac{\overline{OM}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$.

$\frac{\overline{OM}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{4}$.

$\overline{OM}=\frac{5}{2}$.

2126.- En la figura, el cilindre inferior té radi 1 i altura 1. Els cilindres superiors tenen la meitat del radi que l'inferior i altura 1.
a) Determineu el volum dels 4 cilindres.
b) Calculeu el volum en cas que hi hagen 10 cilindres.
c) Calculeu el volum en cas que hi hagen infinits cilindres.



Solució:
a)

$$V_4 = \pi\cdot 1^2\cdot 1+\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 1+\pi\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot 1=\pi\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)=\frac{85}{64}\pi\approx 4.172427743$$

b)

Els volums dels cilindres formen una progressió geomètrica de primer terme π i raó $\frac{1}{4}$

La suma dels 10 primers termes és:

$$V_{10}=\frac{\pi-\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{349525}{2622144}\pi\approx 4.18878621\ .$$

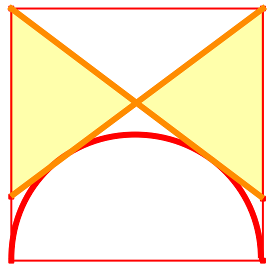
c)

La suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de primer terme π i raó $\frac{1}{4}$ és:

$$V_{inf}=\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\pi\approx 4.188790205\ .$$

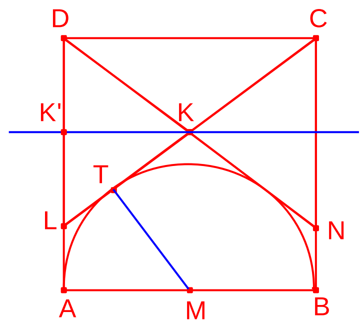
Nota: La suma dels infinits volums dels cilindres és igual al volum d'una esfera de radi 1.

2127.- En la figura, les línies marrons són tangents a la semicircumferència.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat exterior.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.
Siguen CL i DN tangents a la semicircumferència.
Siga T el punt de tangència de la recta CL i la semicircumferència.



$\overline{CL}=\overline{CB}=1$.

Siga $x=\overline{LT}=\overline{LA}$.

$\overline{CL}=1+x$, $\overline{DL}=1-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDL}$:

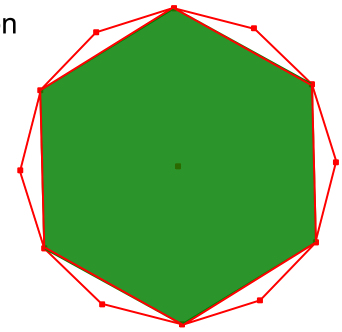
$(1+x)^2=(1-x)^2+1^2$. Resolent l'equació:

$x=\frac{1}{4}$.

La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat és:

$$\frac{2\cdot S_{DLK}}{S_{ABCD}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}(1-x)\frac{1}{2}}{1^2}=\frac{3}{8}.$$

2128.- En un dodecàgon regular s'ha inscrit un hexàgon regular. Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon i el dodecàgon regulars.



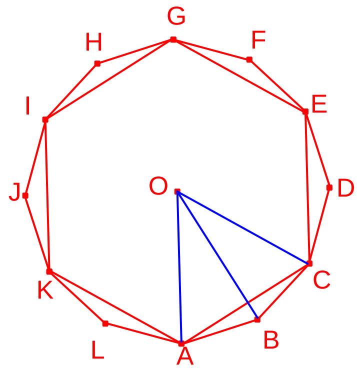
Solució:

Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de centre O i radi R.

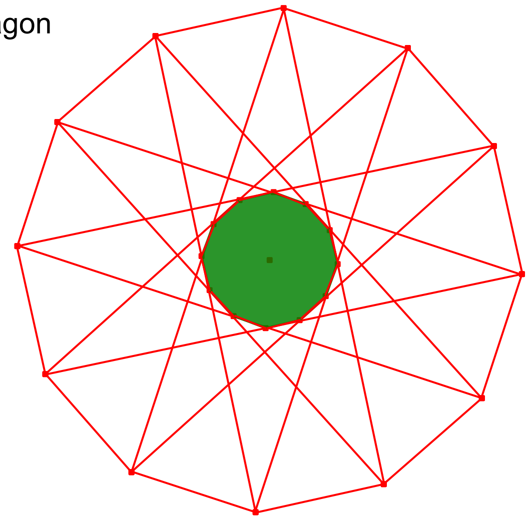
$\angle AOB = \dfrac{360^o}{12} = 30^o$, $\angle AOC = \dfrac{360^o}{6} = 60^o$.

La entre les àrees de l'hexàgon i el dodecàgon regulars és:

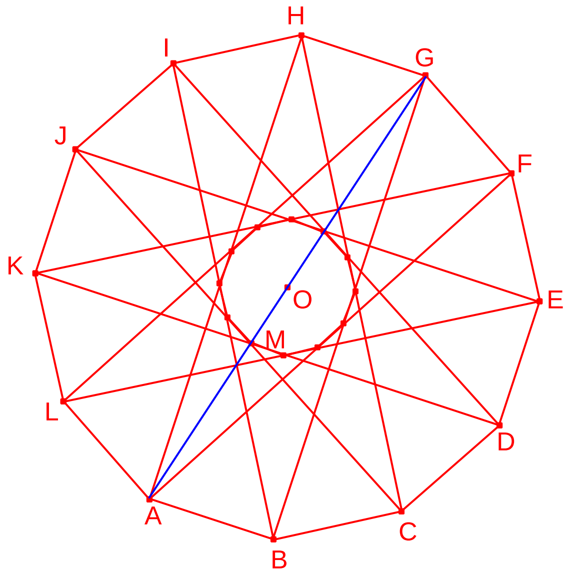
$$\frac{S_{ACEGIK}}{S_{ABCDEFGHIJKL}} = \frac{6 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 60^o}{12 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 30^o} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



2129.- En un dodecàgon regular s'ha dibuixat un dodecàgon regular estrellat.
En l'interior de dodecàgon estrellat s'ha dibuixat un dodecàgon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos dodecàgons.



Solució:



Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de centre O i radi R.

El radi $\overline{OA}$ passa pel vèrtex M del dodecàgon regular interior.

$\angle KAM = 60^\circ$, $\angle AKM = 45^\circ$.

$\angle AMK = 75^\circ$.

$\overline{AK} = R$ costat de l'hexàgon regular inscrit en el dodecàgon regular.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKM}$:

$$\frac{\overline{AM}}{\sin 45^\circ} = \frac{R}{\sin 75^\circ}.$$

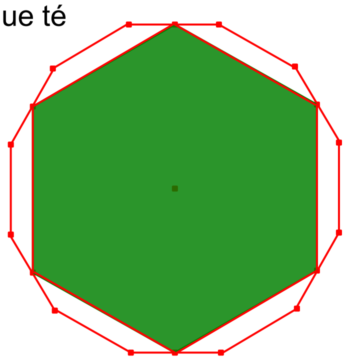
$$\overline{AM} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} R = \left(\sqrt{3} - 1\right) R.$$

$$\overline{OM} = R - \overline{AM} = \left(2 - \sqrt{3}\right) R.$$

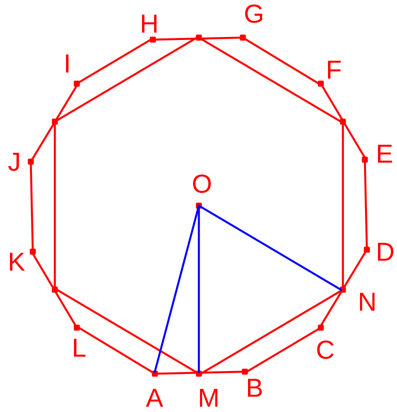
La proporció entre les àrees dels dos dodecàgons és:

$$\frac{S_{int}}{S_{ext}} = \left(\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

2130.- En un dodecàgon regular s'ha inscrit un hexàgon regular que té els vèrtexs en els punts migs dels costats.
Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon i el dodecàgon regulars.



Solució:
Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de centre O i radi R.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
$\overline{OM}=\overline{MN}$.



$\angle AOB=\dfrac{360^{o}}{12}=30^{o}$, $\angle AOM=\dfrac{30^{o}}{2}=15^{o}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{OM}=R\cdot\cos 15^{o}$.
La entre les àrees de l'hexàgon i el dodecàgon regulars és:

$$\frac{S_{hexàgon}}{S_{ABCDEFGHIJKL}}=\frac{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{OM}^{2}}{12\cdot\frac{1}{2}R^{2}\sin 30^{o}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}R\right)^{2}}{3R^{2}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{8}.$$