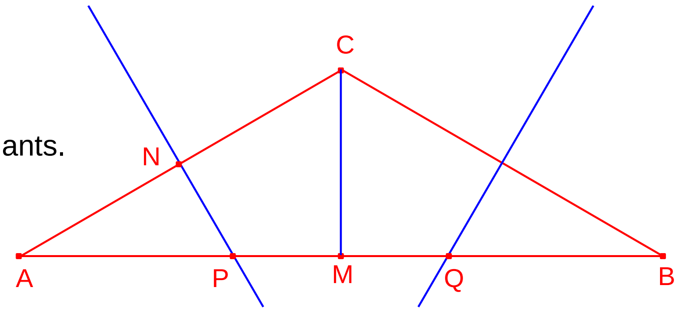
Problemes de Geometria per a l'ESO 214

2131.- En un triangle isòsceles obtusangle les mediatrius dels costats iguals divideixen el costat desigual en tres parts iguals.
Determineu la mesura de l'angle obtús.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $C > 90°$.
Les mediatrius als costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tallen el costat desigual en els punts P i Q, respectivament.
Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$.
Siga $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{PB} = x$.
Siga $\overline{AN} = \overline{CN} = y$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\overline{AM} = \frac{3}{2}x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}$, $\overset{\Delta}{ANP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{\frac{3}{2}x} = \frac{x}{2y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

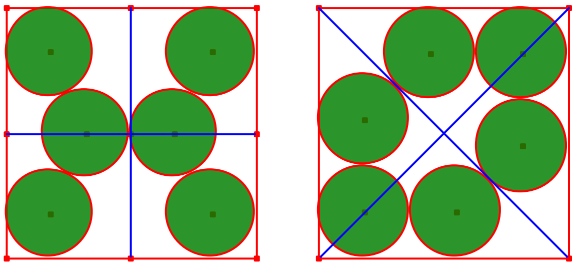
$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANP}$:

$$cosA = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A = 30°$.
Aleshores, $C = 120°$.

2132.- En cada figura, hi ha sis cercles de radis iguals dibuixats en un quadrat unitari. En quina disposició els cercles tenen un radi més gran?

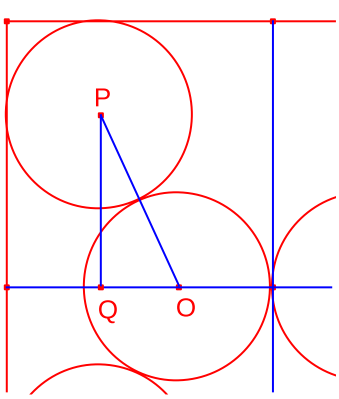


Solució:

Siga r el radi de les circumferències del quadrat de l'esquerra.

En la figura, considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$\overline{OP}=2r$, $\overline{OQ}=\frac{1}{2}-2r$, $\overline{PQ}=\frac{1}{2}-r$.



Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$(2r)^2=\left(\frac{1}{2}-2r\right)^2+\left(\frac{1}{2}-r\right)^2.$$

$r^2-6r+1=0$.

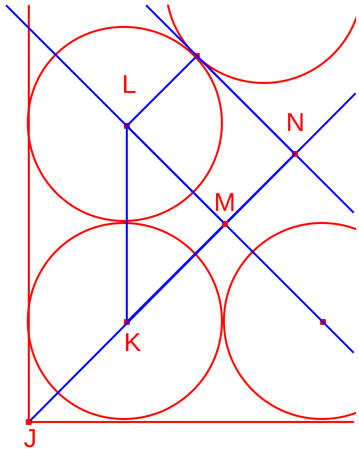
Resolent l'equació:

$$r=\frac{3-\sqrt{7}}{2}.$$

Siga s el radi de les circumferències del quadrat de la dreta.

En la figura, considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{KL}=2s$, $\overline{KM}=\overline{LM}=\sqrt{2}s$.



$$\overline{JM}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\overline{JK}=\sqrt{2}s$, $\overline{MN}=s$.

$$\overline{KM}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}s-s.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\sqrt{2}+1\right)s=\sqrt{2}s.$$

Resolent l'equació:

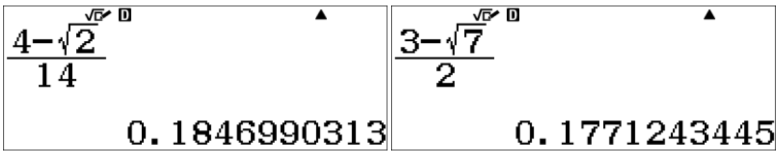
$$s=\frac{4-\sqrt{2}}{14}.$$

Vegem que $s>r$.

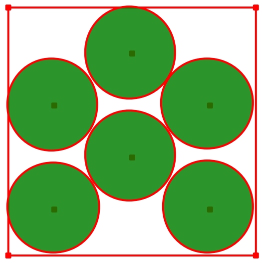
$$\frac{4-\sqrt{2}}{14}>\frac{3-\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}>17-7\sqrt{7}. \Leftrightarrow \sqrt{2}<7\sqrt{7}-17 \Leftrightarrow$$

$$2<632-238\sqrt{7} \Leftrightarrow 238\sqrt{7}<630 \Leftrightarrow 17\sqrt{7}<45 \Leftrightarrow$$

$2023<2025$.

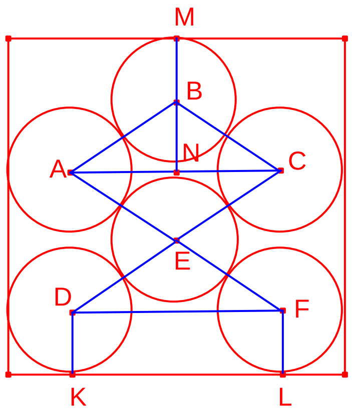


2133.- En cada figura, hi ha sis cercles de radis iguals dibuixats en un quadrat unitari.
Calculeu el radi dels cercles.



Solució:
Siga r el radi de les circumferències del quadrat.
Siguen A, B, C els centres de les tres circumferències superiors.
$\overline{AB}=\overline{BC}=2r$, $\overline{AC}=1-2r$.

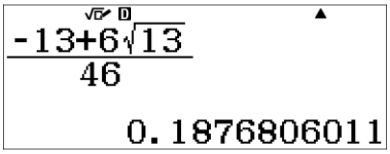
Notem que el triangle format per les circumferències inferiors $\overset{\Delta}{DEF}$ és igual al triangles $\overset{\Delta}{ABC}$.



Siga N el punt mig del segment $\overline{AC}$.
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$
$\overline{AN}=\dfrac{1-2r}{2}$, $\overline{NB}=\dfrac{1-2r}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$.
$(2r)^2=\left(\dfrac{1-2r}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1-2r}{3}\right)^2$.

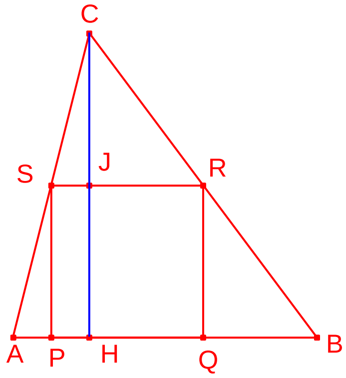
$92r^2+52r-13=0$. Resolent l'equació:
$r=\dfrac{-13+6\sqrt{13}}{46}$.



Aquest és el empaquetament millor de 6 cercles en un quadrat de costat 1.

2134.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 8$. En el triangle hi ha inscrit un quadrat PQRS de costat 4 tal que els vèrtexs P, Q pertanyen al costat $\overline{AB}$ i els vèrtexs R, S pertanyen als costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, respectivament.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

Siga $\overline{CH} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\overline{CJ} = h - 4$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{SRC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

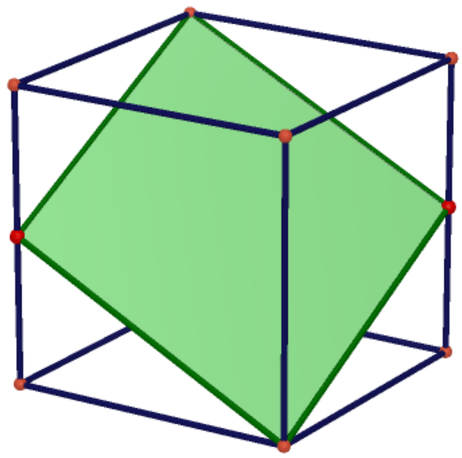
$$\frac{h}{h-4} = \frac{8}{4}$$

Resolent l'equació, $h = 8$.

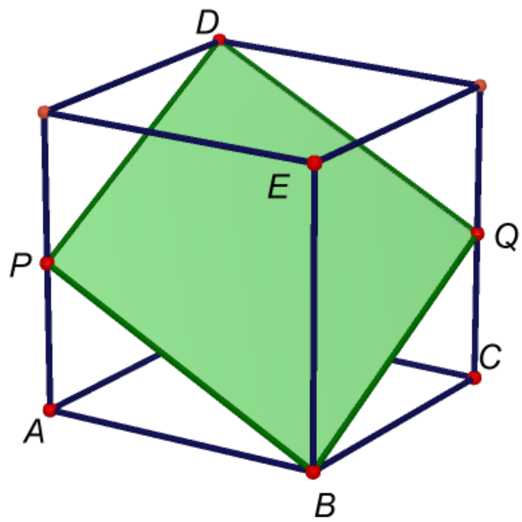
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 8 \cdot 8 = 32$$

2135.- El cub de la figura té aresta 1.
Classifiqueu el quadrilàter ombrejat, que per vèrtexs, dos vèrtexs oposats del cub i els altres dos són punts migs de dues arestes oposades.
Calculeu els costats i els angles del quadrilàter.
Calculeu la seua àrea.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 1$ l'aresta del cub.
$\overline{AP} = \frac{1}{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAB}$:
$\overline{PB} = \overline{BQ} = \overline{DQ} = \overline{DP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Aleshores, el quadrilàter PBQD és un rombe.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:
$\overline{AE} = \overline{AC} = \overline{PQ} = \sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BED}$:
$\overline{BE} = \sqrt{3}$.
$\overline{BE} \neq \overline{PQ}$, aleshores, PBQD no és un quadrat.
Siga $\alpha = \angle BPD = \angle BQD$



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PBD}$:

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{-1}{5}$$

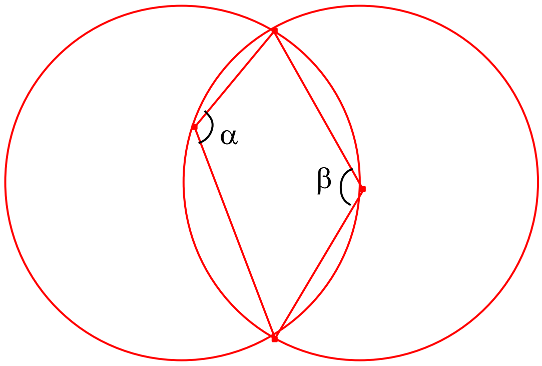
$$\alpha = arccos\frac{-1}{5} = 101°32'13"$$

$$\angle PBQ = \angle PDQ = 180° - \alpha = 78°27'47"$$

L'àrea del rombe PBQD és:

$$S_{PBQD} = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

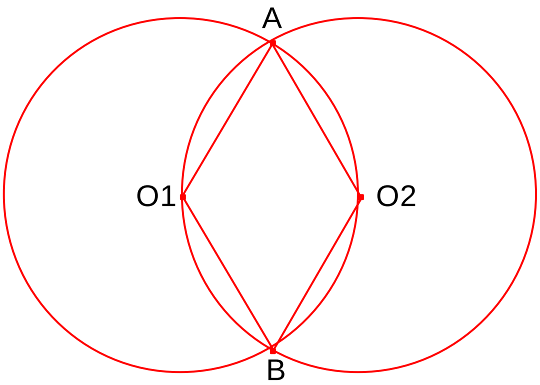
2136.- Les dues circumferències de la figura, tenen el mateix radi i cadascuna passa pel centre de l'altra.
Determineu els valors dels angles α, β.



Solució:
Els angles α, β són iguals ja que estan inscrits, cadascun en una circumferència i tots dos abracen arcs iguals de dues circumferències que tenen el mateix radi.

Per tant, qualsevol quadrilàter de la mateixa dibuixat de forma anàloga té $\alpha = \beta$

Considerem el quadrilàter AO_1BO_2 on O_1, O_2 són els centres de les dues circumferències.



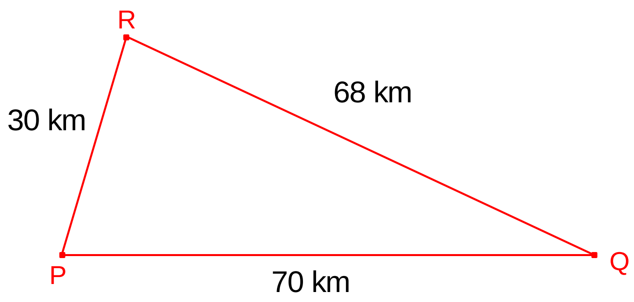
$\overline{AO_1} = \overline{AO_2} = \overline{O_1O_2}$

Aleshores, $\angle O_1AO_2 = 60°$.

Anàlogament, $\angle O_1BO_2 = 60°$.

Per tant, $\alpha = \beta = 120°$

2137.-Una emissora de ràdio en una ciutat R té un abast de 28 km.
Un automobilista viatja en línia recta des de la ciutat P a la ciutat Q.
Podrà escoltar la ràdio en algun moment del viatge.



Solució:
L'automobilista podrà escoltar la ràdio si la distància de R a la recta PQ és menor o igual que 28 km.
És a dir si l'altura del triangle sobre el costat $\overline{PQ}$ és menor o igual que 28 km.

Calculem l'àrea del triangle utilitzant la fórmula d'Heró:

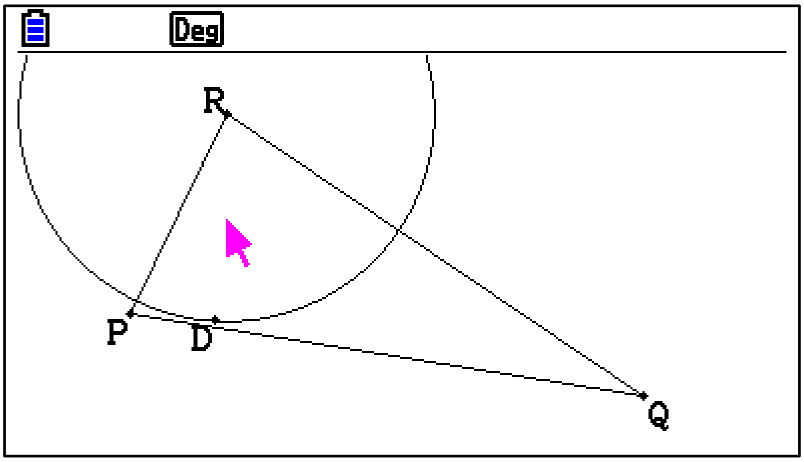
$$S_{PQR}=\frac{\sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}}{4}$$

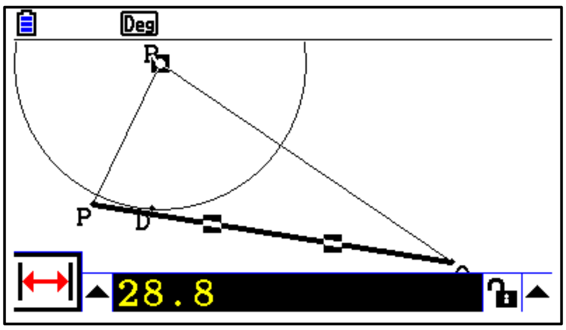
$$S_{PQR}=\frac{\sqrt{(68+30+70)(-68+30+70)(68-30+70)(68+30-70)}}{4}=1008\ km^2$$

Siga h_r altura sobre el costat $\overline{PQ}$.
L'àrea del triangle és $S_{PQR}=\frac{1}{2}r\cdot h_r$

$$1008=\frac{1}{2}\cdot 70\cdot h_r$$

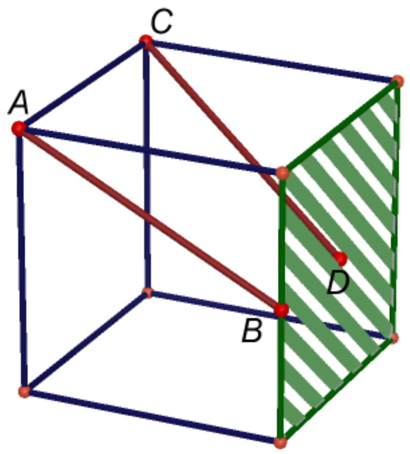
$h_r=\frac{1008\cdot 2}{70}=\frac{144}{5}=$ 28.8 km.
Aleshores, l'automobilista no pot escoltar la ràdio.





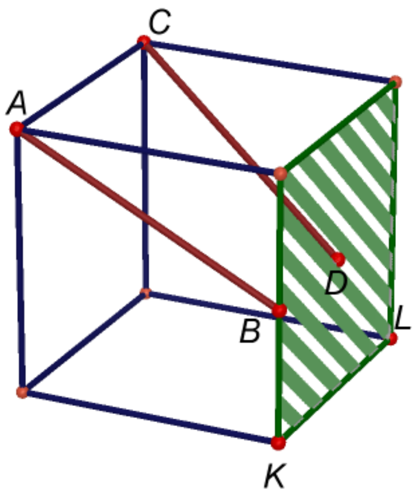
2138.- En la figura, A i C són vèrtex d'un cub d'aresta 1, B és el punt mig l'aresta i D el centre de la cara ombrejada.

a) Les rectes és tallen. En cas afirmatiu en quin punt es tallen.
b) Si les rectes anterior és tallen calculeu l'àrea del quadrilàter ABDC.

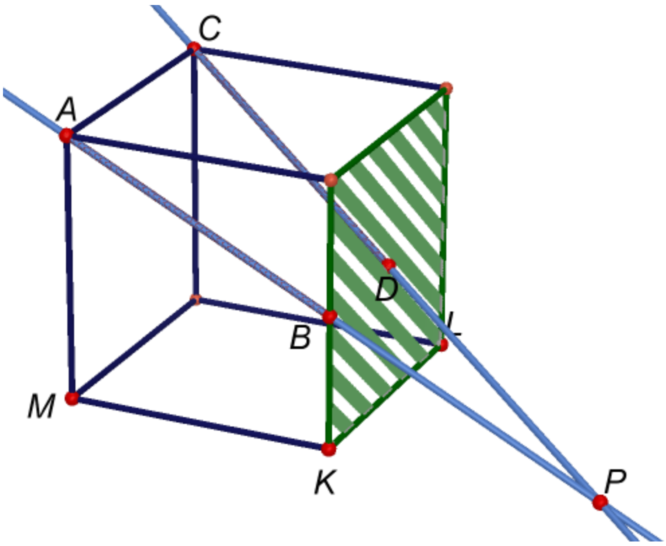


Solució:

Els segments $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ són paral·lels ja que les arestes $\overline{AC}$ i $\overline{KL}$ són paral·leles i $\overline{KL}$ i $\overline{BD}$ són para·lels.
5
Aleshores, A, B, C, i D són coplanaris.
Per tant les rectes AB i CD són secants.
$\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AC}$
Siga P la intersecció de les rectes AB i CD.
$\overline{BD}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACP}$
P pertany al plànol que formen els punts ABK.
$\overline{AB} = \overline{BP}$



Aleshores, P pertany a la recta MK i $\overline{MP} = 2 \cdot \overline{MK}$.

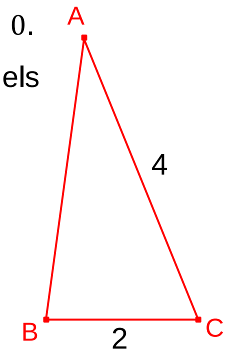


ABDC és un trapezi rectangle $\angle CAB = 90°$.
$\overline{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
L'àrea del trapezi ABDC és:
$S_{ABDC} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$

2139.-

a) Determineu els valors de k que satisfan la inequació $k^2 - k - 12 > 0$.

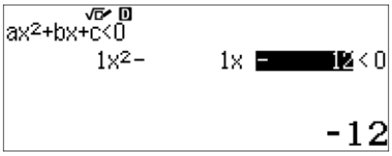
b) El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és tal que $a = 2, b = 4, \cos B < \frac{1}{4}$, Determineu els possibles valors de $\overline{AB}$.

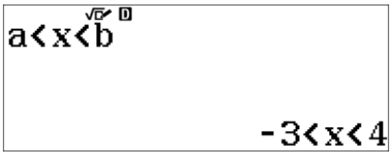


Solució:

a)

Resolem la inequació $k^2 - k - 12 > 0$.





Aleshores, $k^2 - k - 12 < 0$, quan $-3 < k < 4$, és a dir, $k \in \,]-3, 4[$

b)

Siga $c = \overline{AB}$

$a + c > b$, $a + b > c$

Aleshores, $6 > c > 2$

Aplicant el teorema del cosinus

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

$4^2 = 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cdot \cos B$

$c^2 - 4c \cdot \cos B - 12 = 0$, $\cos B < \frac{1}{4}$

$$c^2 - 4c \cdot \frac{1}{4} - 12 < 0$$

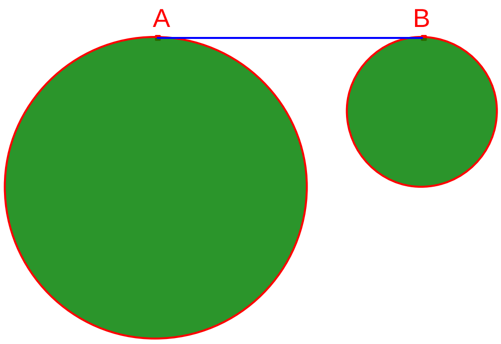
$c^2 - c - 12 < 0$.

Aplicant el apartat a)

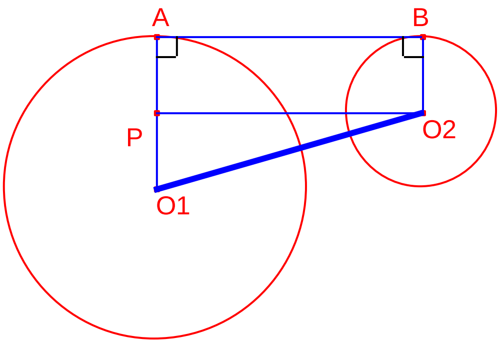
$c < 4$

Aleshores, $2 < c < 4$

2140.- Dos cercles tenen una tangent en comú en els punts de contacte A i B que disten 7 cm. Els radis dels cercles és 4 cm i 2 cm, respectivament.
Calculeu la distancia entre els centres.



Solució:



Siguen O_1, O_2 elscentres de les circumferències de radis 4 i 2, respectivament.
$\angle O_1AB = \angle O_2BA = 90°$
Siga P la projecció de O_2 sobre el segment $\overline{AO_1}$.
$\overline{PO_2} = \overline{AB} = 7.$
$\overline{PO_1} = \overline{AO_1} - \overline{BO_2} = 4 - 2 = 2.$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O_1\overset{\Delta}{P}O_2$
$\overline{O_1O_2} = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} \approx 7.28 \text{ cm}$