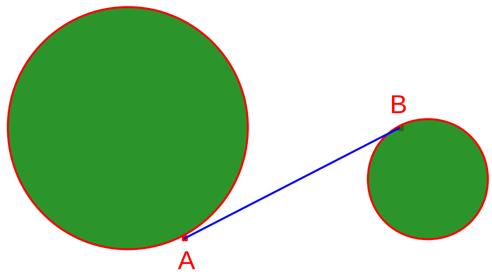
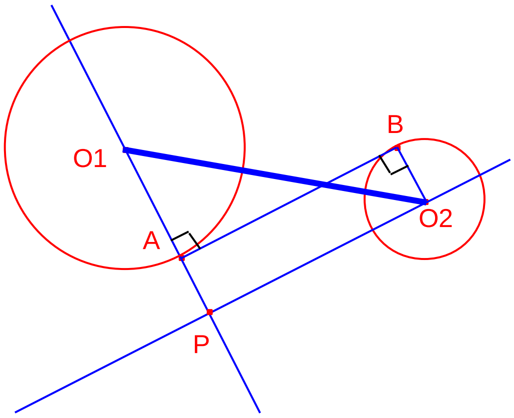
Problemes de Geometria per a l'ESO 215

2141.- Dos cercles tenen una tangent en comú en els punts de contacte A i B que disten 8 cm. Els radis dels cercles és 4 cm i 2 cm, respectivament.
Calculeu la distancia entre els centres.

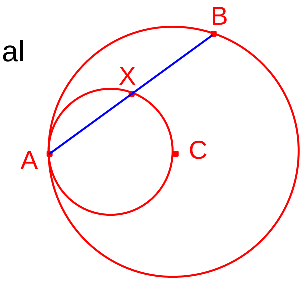


Solució:



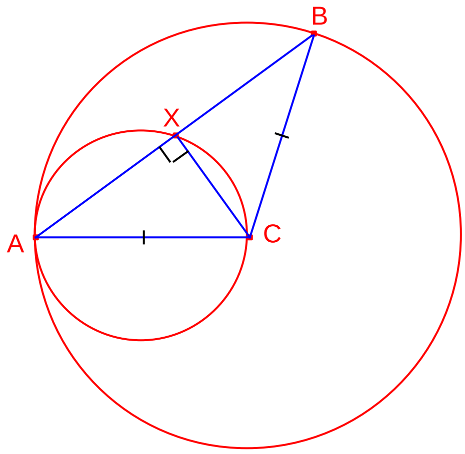
Siguen O_1, O_2 elscentres de les circumferències de radis 4 i 2, respectivament.
$\angle O_1AB = \angle O_2BA = 90°$
Siga P la projecció de O_2 sobre la recta $\overline{AO_1}$.
$\overline{PO_2} = \overline{AB} = 7.$
$\overline{PO_1} = \overline{AO_1} + \overline{BO_2} = 4 + 2 = 6.$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O_1\overset{\Delta}{P}O_2$
$\overline{O_1O_2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

2142.- En la figura, $\overline{AC}$ és el radi de la circumferència gran i diàmetre de la circumferència del cercle menut.
Una recta que passa per A talla la circumferència menuda en X i al gran en B.
Proveu que X és el punt mig del segment $\overline{AB}$



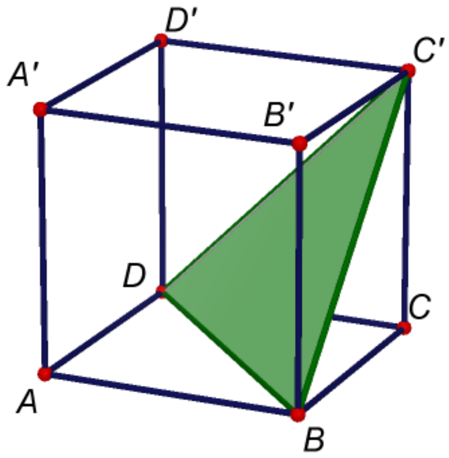
Solució:
$\overline{CA} = \overline{CB}$ per ser radis de la circumferència gran.
$\angle AXC$ és un angle inscrit en la circumferència menuda que abraça un diàmetre.
Aleshores,
$\angle AXC = 90°$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AXC}$, $\overset{\Delta}{BXC}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AX} = \overline{BX}$.
Aleshores, X és el punt mig del segment $\overline{AB}$



2143.- Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB} = 1$.
Siguen K i L els punts migs de les arestes $\overline{AD}, \overline{AB}$, respectivament.

a) Calculeu l'angle que forma el plànol BC'D i la cara ABCD del cub.
b) Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BC'D}$



Solució:

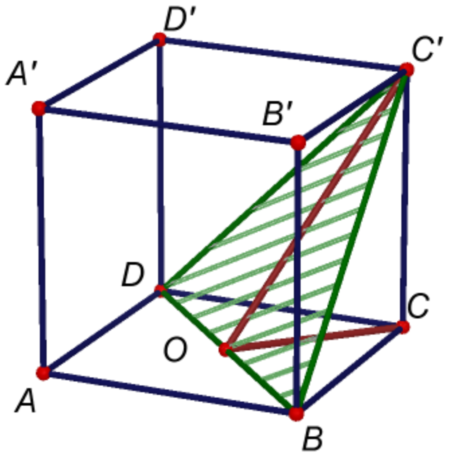
a)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{AC} = \sqrt{2}$.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
L'angle forma el plànol BC'D i la cara ABCD del cub és $\alpha = \angle C'OC$.

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCC'}$:

$$\alpha = arctg\frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}} = arctg\sqrt{2} \approx 54°44'8''$$



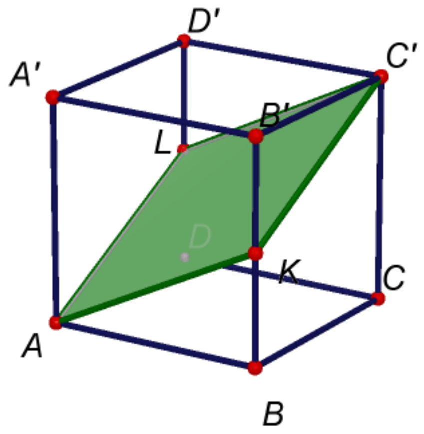
b)

El triangle $\overset{\Delta}{BC'D}$ és equilàter:
La seua àrea és:

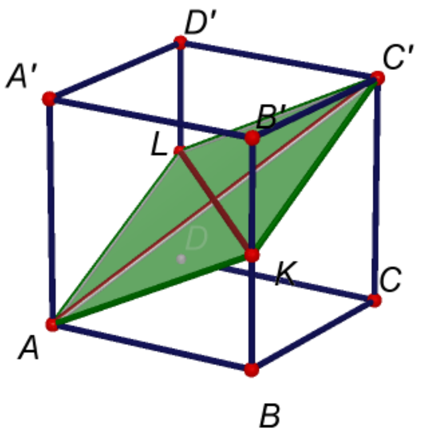
$$S_{BC'D} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.87$$

2144.- Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB} = 1$.
Siguen K el punt mig de l'aresta $\overline{BB'}$.
Els plànol KLC' talla l'aresta $\overline{DD'}$ en el punt L.

a) Calculeu l'angle que forma el plànol AKC' i la cara ABCD del cub.
b) Calculeu l'àrea del quadrilàter AKC'L.

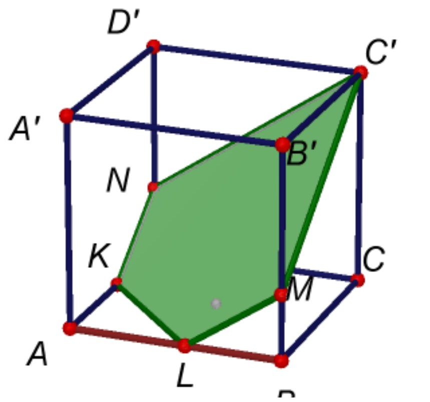


Solució:
a)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{AC} = \sqrt{2}$.
L'angle forma el plànol AKC' i la cara ABCD del cub és $\alpha = \angle C'AC$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:
$\alpha = arctg\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}} = arctg\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 35°15'52"$
b)



L és el punt mig de l'aresta $\overline{DD'}$
AKC'L és un rombe.
$\overline{KL} = \overline{AC} = \sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:
$\overline{AC'} = \sqrt{3}$
L'àrea del rombe AKC'L és:

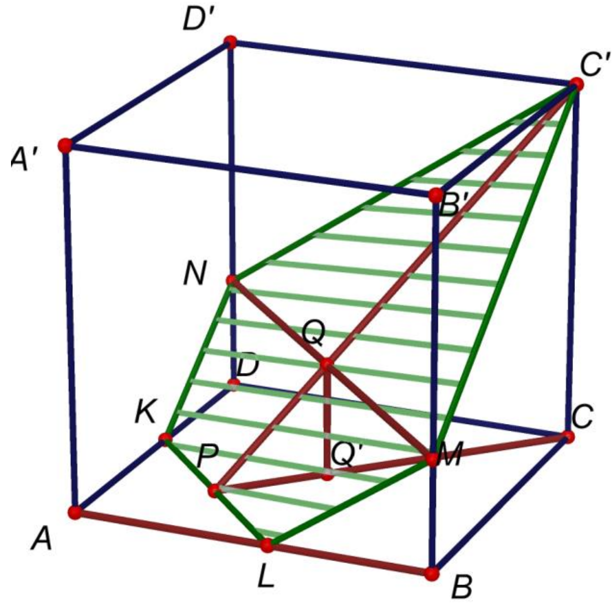
$$S_{AKC'L} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{KL} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22$$



2145.- Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB}=1$.
Siguen K i L els punts migs de les arestes $\overline{AD},\overline{AB}$, respectivament.
Els plànol KLC' talla les arestes $\overline{BB'},\overline{DD'}$ en els punts M, N, respectivament.

a) Calculeu l'angle que forma el plànol KLC' i la cara ABCD del cub.
b) Calculeu l'àrea del pentàgon KLMC'N.

Solució:
Siguen P i Q els punts migs dels segments $\overline{KL},\overline{NM}$, respectivament.
L'angle forma el plànol KLC' i la cara ABCD del cub és $\alpha=\angle C'PC$.



$\overline{AL}=\frac{1}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{APL}$:

$\overline{AP}=\frac{\sqrt{2}}{4},\overline{KL}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\sqrt{2}$

$$\overline{PC}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCC'}$:

$$\alpha=arctg\frac{\overline{CC'}}{\overline{PC}}=arctg\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 43°18'50"$$

b)

$\overline{MN}=\sqrt{2}$.

La projecció Q' del punt Q sobre la cara ABCD és el centre d'aquesta cara.

$$\overline{PQ'}=\overline{AP}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{PCC'},\overset{\Delta}{PQ'Q}$:

$$\frac{\overline{QQ'}}{1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

$$\overline{MB}=\overline{QQ'}=\frac{1}{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCC'}$:

$$\overline{PC'}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{4}$$

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{PCC'},\overset{\Delta}{PQ'Q}$:

$$\frac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{34}}{4}} = \frac{1}{3}$$

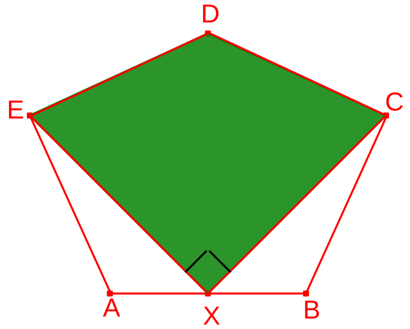
Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{34}}{12}, \overline{QC'} = \frac{\sqrt{34}}{6}$

L'àrea del pentàgon KLMC'N és igual a la suma de les àrees del trapezi KLMN i del triangle $\overset{\Delta}{NMC'}$

$$S_{KLMC'N} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{34}}{12} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{\sqrt{34}}{6} = \frac{7\sqrt{17}}{24} \approx 1.20$$

2146.- En la figura ABCDE és un pentàgon equilàter no regular de costat $\overline{AB} = 2$.
Siga X el punt mig del costat $\overline{AB}$ i $\angle AXE = \angle BXC = 45°$
El pentàgon és simètric respecte de la recta XD.

a) Calculeu la mesura de l'angle $\angle XEA$
b) Calculeu l'àrea del pentàgon ABCDE.



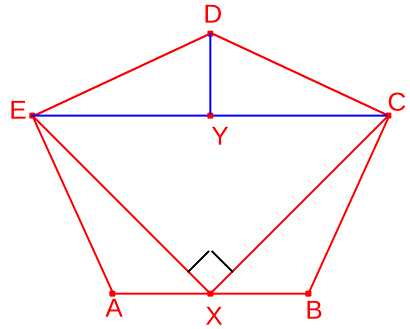
Solució:
$\angle CXE = 90°$
Siga $\alpha = \angle XEA$
$\overline{AX} < \overline{AE}$ aleshores, $\alpha < 45°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AXE}$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 45°}$$

$$sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 20°42'17''$$



Els triangles $\overset{\Delta}{AXE}$, $\overset{\Delta}{BXC}$ són iguals.
Siga $\overline{XE} = \overline{XC} = x$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AXE}$

$$2^2 = 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 45$$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{EXC}$

$$\overline{CE} = \overline{XE} \cdot \sqrt{2} = 1 + \sqrt{7}$$

Siga Y el punt mig del segment $\overline{CE}$

$$\overline{EY} = \overline{XY} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EYD}$

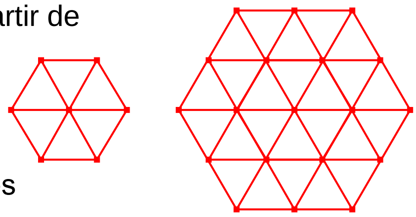
$$2^2 = \overline{DY}^2 + \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$\overline{DY} = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{7}}}{2}$$

L'àrea del pentàgon ABCDE és igual a la suma de les àrees del trapezi ABCE i del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}(2 + 1 + \sqrt{7})\frac{1+\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{7})\frac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{2} = \frac{5+2\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2} = 4 + \sqrt{7} \approx 6.65$$

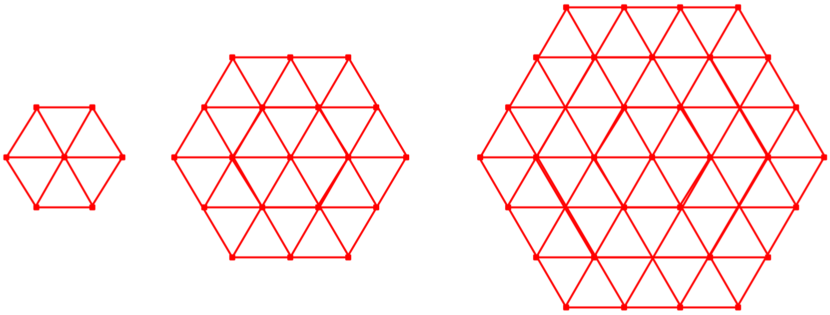
2147.- Els hexàgons regulars es construeixen a partir de triangles equilàters com mostra la figura.
El primer es construeix a partir de sis triangles i el segon a partir de vint-i-quatre.



a) Quants triangles calen en la posició sis.
b) Si disposem de 2017 triangles equilàter quin és l'hexàgon màxim que es pot construir. Quants triangles sobren.

KöMaL, K607

Solució:



6 $\qquad 6\cdot 2^2 \qquad 6\cdot 3^2$

Els hexàgons regulars són semblants.
La raó de semblança entre el segon i el primer és 2.
La raó de semblança entre el tercer i el primer és 3.
La raó de semblança del n-èssim i el primer és n.

La raó de semblança de les àrees és n^2.

La successió de nombre de triangles equilàters és:
$6, 6\cdot 2^2, 6\cdot 3^2, \dots\dots, 6\cdot n^2$.
El terme general és $T_n = 6\cdot n^2$
a)
$T_6 = 6\cdot 6^2 = 216$

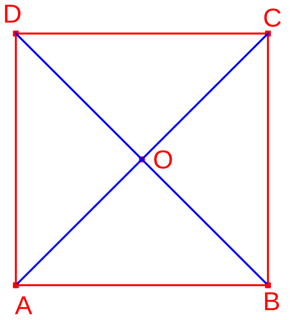
b)
$T_n = 6\cdot n^2 \leq 2017.$

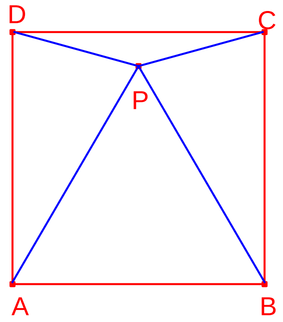
$$n \leq \sqrt{\frac{2017}{6}} \approx 18.3$$

Aleshores l'hexàgon major és el que ocupa el lloc 18.
$T_{18} = 6\cdot 18^2 = 1944$
Ens sobrarien, $2017 - 1944 = 73$ triangles equilàters.

2148.- Un quadrat de costat la unitat es divideix amb quatre triangles isòsceles connectant un punt interior amb els vèrtexs. Trobeu els valors mínim i màxim del producte de les àrees dels triangles que el formen.
KöMaL, C1514

Solució:
Hi ha dues possibles construccions:





Cas 1
Que el punt interior siga al centre del quadrat.
En aquest cas l'àrea dels quatre triangles isòsceles iguals és $\frac{1}{4}$.
El producte de les àrees és $\frac{1}{256}$

Cas 2.
Que el punt P siga tal que $\overset{\Delta}{ABP}$ siga equilàter.

$$S_{APD}=S_{BPD}=\frac{1}{4}$$

$$S_{APB}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{CPD}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

El producte de les àrees és $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cdot 4}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}-3}{256}$

$$\frac{1}{256}>\frac{2\sqrt{3}-3}{256}$$

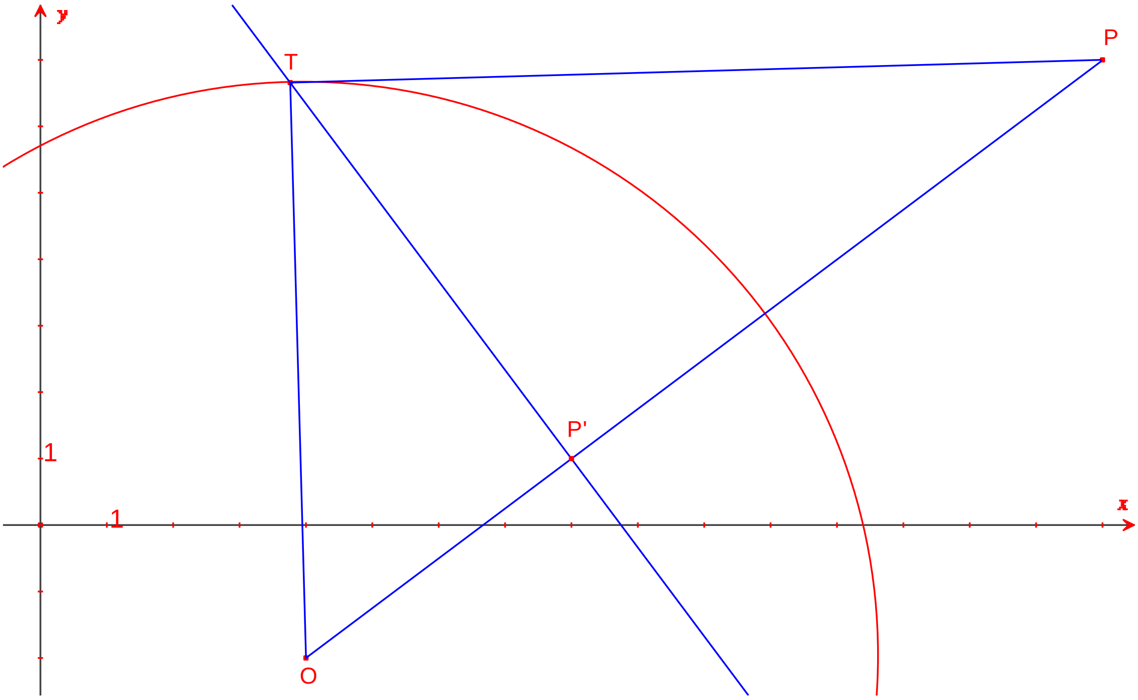
2149.- Des del punt $P(16,7)$ tracem una tangent a la circumferència de centre $O(4,-2)$ de radi $5\sqrt{3}$

Siga P' el punt projecció del punt de tangència sobre la recta OP.

Determineu les coordenades el punt P'.

KöMaL C1516

Solució:



Siga T el punt de tangència.

$\overline{OP}=\sqrt{(16-4)^2+(7-(-2))^2}=15$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PTO}, \overset{\Delta}{TP'O}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{\overline{OP'}}{5\sqrt{3}}$$

Aleshores, $\overline{OP'}=5$.

$$\overline{OP'}=\frac{1}{3}\overline{OP}$$

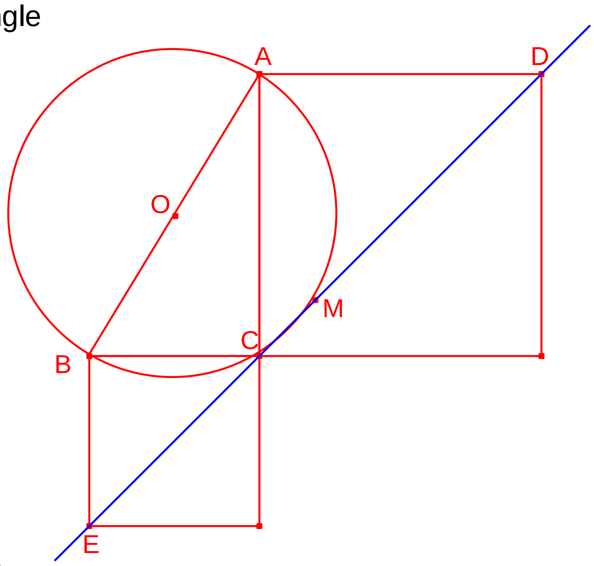
Siga $P'(x,y)$

$$P'\left(4+\frac{16-4}{3},-2+\frac{7-(-2)}{3}\right)$$

$P'(8,1)$

2150.- Sobre l'exterior dels catets $\overline{AC}, \overline{BC}$ del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es dibuixen dos quadrats.
Siguen D i E els vèrtexs dels quadrats oposats a C.
Demostreu que el punt mig del segment $\overline{DE}$ pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
KöMaL, B4993

Solució:
La circumferència circumscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té per diàmetre la hipotenusa $\overline{AB}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.
La recta que passa per E, C passa per D.
Per tant M pertany a la recta DE.



$\overline{CE} = a\sqrt{2}, \overline{CD} = b\sqrt{2}$

$\overline{DE} = (a+b)\sqrt{2}$

$\overline{DM} = \overline{EM} = \frac{a+b}{2}\sqrt{2}$

M pertany a la circumferència circumscrita si $\angle AMB = 90°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2b\left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - b(a+b)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BEM}$:

$$\overline{BM}^2 = a^2 + \left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{BM}^2 = a^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - a(a+b)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = b^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - b(a+b) + a^2 + \frac{(a+b)^2}{2} - a(a+b)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és rectangle $\angle AMB = 90°$.