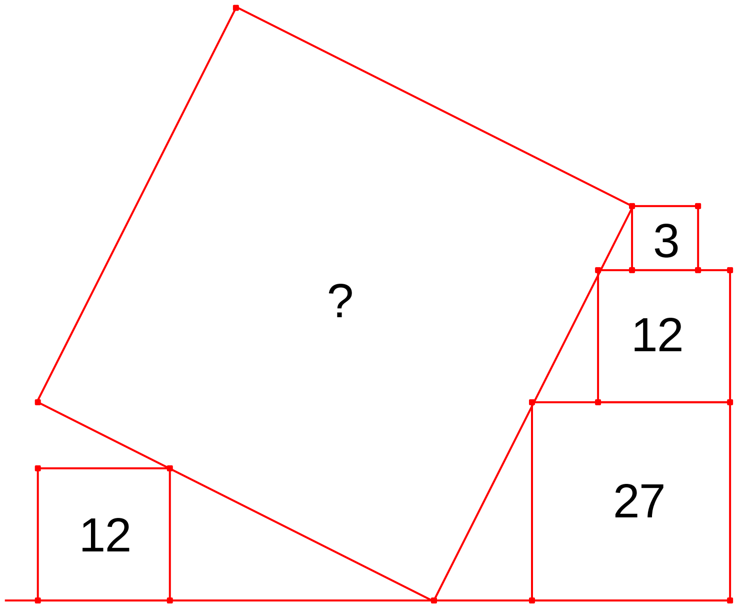
Problemes de Geometria per a l'ESO 216

2151.- Calculeu l'àrea del quadrat desconegut.

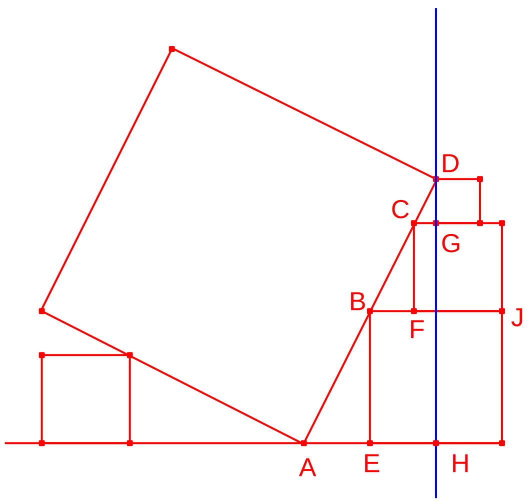


Solució:

$\overline{BE} = \overline{BJ} = 3\sqrt{3}, \overline{CF} = \overline{FJ} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BF} = \sqrt{3}.$

$\overline{DG} = \sqrt{3}$



Els triangles rectangles $\overset{\triangle}{BFC}, \overset{\triangle}{CGD}$ són semblant.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CG}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\overline{CG} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siga H la projecció de D sobre la recta *AE*.

$\overline{DH} = \overline{BE} + \overline{CF} + \overline{DG} = 6\sqrt{3}.$

Els triangles rectangles $\overset{\triangle}{BFC}, \overset{\triangle}{AHD}$ són semblant.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AH}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$\overline{AH} = 3\sqrt{3}.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\triangle}{AHD}$

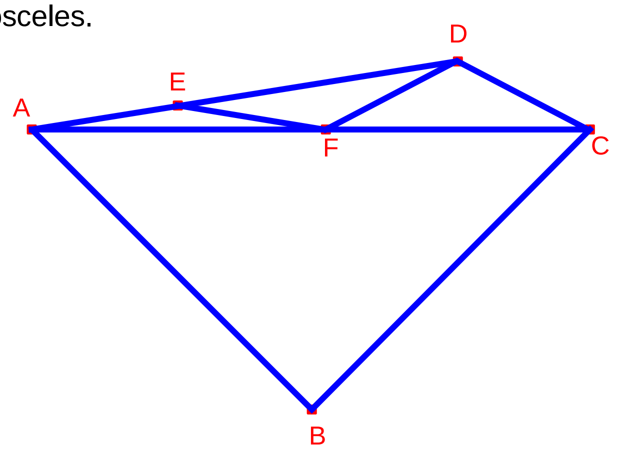
$\overline{AD}^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 135.$

L'àrea del quadrat és:

$S = \overline{AD}^2 = 135$

2152.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles.
$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD} = \overline{DC}$, $\angle ADC = 144°$.

a) Calculeu la mesura de l'angle $\angle AEF$
b) Calculeu la mesura de l'angle $\angle EFD$
c) Calculeu la mesura de l'angle $\angle BCD$



Solució:
Siga $\alpha = \angle AEF$
El triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle DEF = 2\alpha$
El triangle $\overset{\Delta}{DFE}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle EDF = 2\alpha$
Aleshores:
$\angle DFC = 3\alpha$
El triangle $\overset{\Delta}{FCD}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle FCD = 3\alpha$.
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és 180º:
$144° + 4\alpha = 180°$
Resolent l'equació:
$\alpha = 9°$
$\angle AEF = 180° - 2\alpha = 162°$

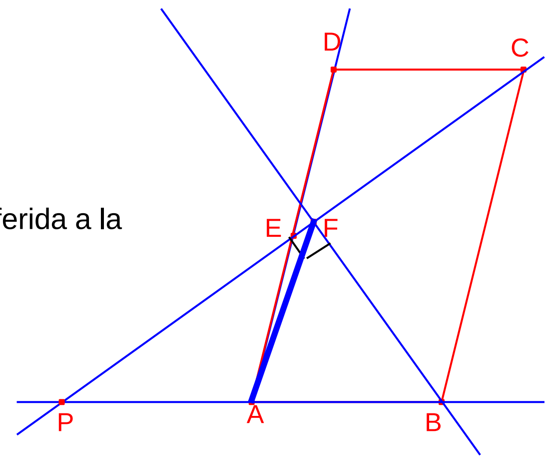
$\angle EFD = 180° - 4\alpha = 144°$

$\angle BCA = 45°$

$\angle BCD = 45° + 3\alpha = 72°$

2153.- Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$ del paral·lelogram ABCD.
Siga F el punt del segment $\overline{CE}$ tal que $\overline{BF}$ i $\overline{CE}$ són perpendiculars.
Si $\overline{AB}=5, \overline{BC}=9$, determineu la mesura del segment $\overline{AF}$

Solució:



La recta CE i la recta AB és tallen en el punt P.

Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{PAE}$ són iguals.

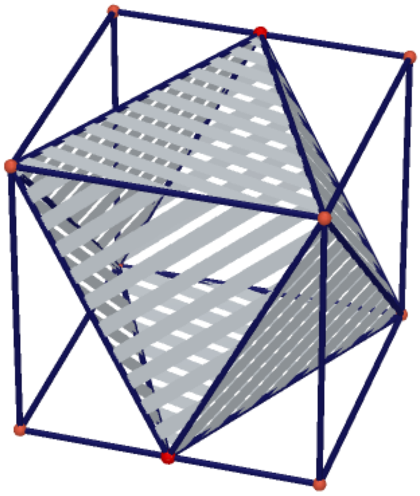
Aleshores, $\overline{PA}=\overline{CD}$

A és el punt mig del segment $\overline{PB}$.

El triangle $\overset{\Delta}{PBE}$ és rectangle i $\overline{AF}$ és la mitjana referida a la hipotenusa.

Aleshores, $\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{PB}=5$.

2154.- En un cub s'ha inscrit un octaedre.
Determineu la proporció entre els seus volums.
Determineu la proporció entre les seues àrees.



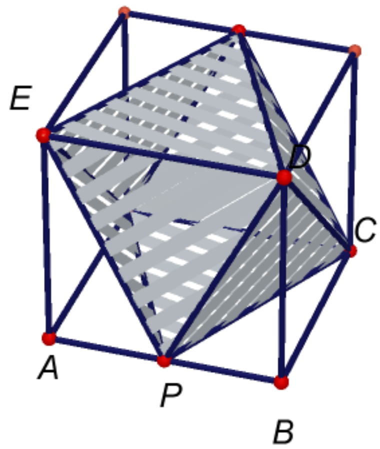
Solució:
Siga $\overline{AB} = a$, aresta del cub.

El volum del cub és $V_{cub} = a^3$
El volum de l'octaedre és igual al volum del cub
menys 4 piràmides triangulars de base el triangle rectangle
$\overset{\Delta}{PBC}$ i altura $\overline{BD} = a$.

$$V_{octaedre} = a^3 - 4\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}a \cdot a \cdot a\right) = \frac{2}{3}a^3$$

La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{octaedre}}{V_{cub}} = \frac{2}{3}$$



L'àrea del cub és $S_{cub} = 6a^2$

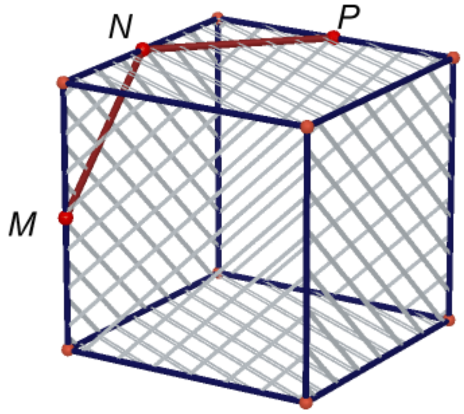
L'àrea de l'octaedre és igual a 4 vegades l'àrea d'un triangle
d'un triangle $\overset{\Delta}{PCD}$ de costats $\overline{PC} = \overline{PD} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \overline{CD} = \sqrt{2}a$
més 4 vegades l'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{PDE}$
L'altura sobre la base $\overline{CD}$ del triangle $\overset{\Delta}{PCD}$ mesura $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$S_{octaedre} = 4\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 4\left(\frac{1}{2}a^2\right) = \left(2+\sqrt{6}\right)a^2$$

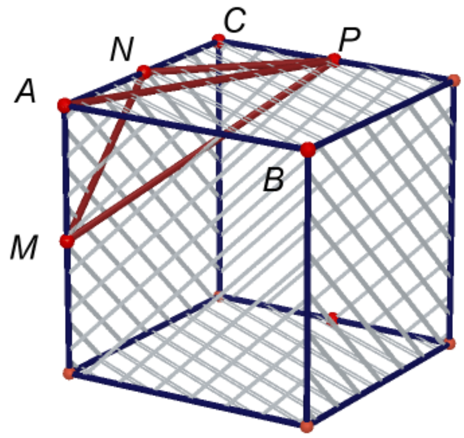
La proporció entre els volums és:

$$\frac{S_{octaedre}}{S_{cub}} = \frac{2+\sqrt{6}}{6}a^2$$

2155.- Siguen M, N, P punts migs de les arestes del cub.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle MNP$.



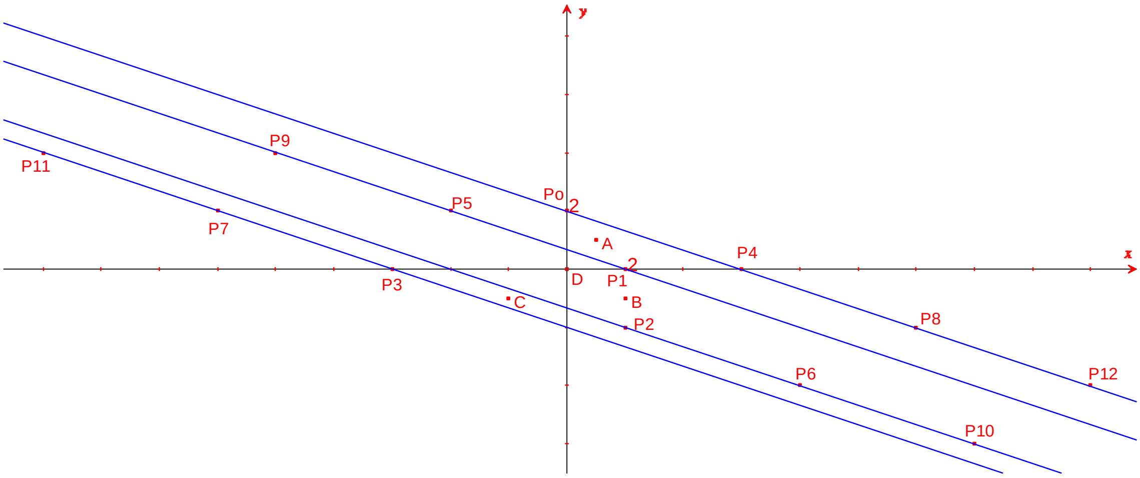
Solució:
$\alpha = \angle MNP$
Siga $\overline{AB} = a$, aresta del cub.
$\overline{MN} = \overline{NP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACP}$.
$\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAP}$.
$\overline{MP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
Aplicant el teorema de cosinus al triangle $\overset{\Delta}{MNP}$



$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cos\alpha$$
$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$
Aleshores,
$\alpha = \angle MNP = 120°$

2156.- Siguen els 5 punts següents $A(1,1), B(2,-1), C(-2,-1), D(0,0)$ i $P_0(0,2)$
P_1 és igual al gir de P_0 al voltant de A de 180º.
P_2 és igual al gir de P_1 al voltant de B de 180º.
P_3 és igual al gir de P_2 al voltant de C de 180º.
P_4 és igual al gir de P_3 al voltant de D de 180º.
P_5 és igual al gir de P_4 al voltant de A de 180º.
Es repeteix el patró. Si $P_{2016}(a,b)$ calculeu el valor de $a+b$
Crux CC342

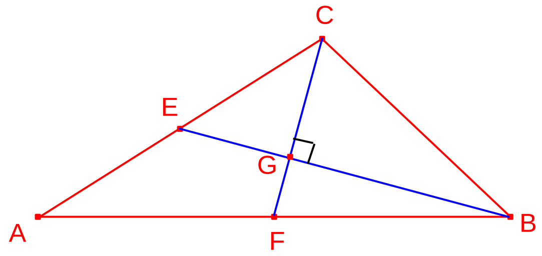
Solució:



$2016 = 4 \cdot 504$
A és el centre del paral·lelogram $P_0P_4P_1P_5$
A és el centre del paral·lelogram $P_0P_8P_1P_9$
Demostrem per inducció completa que $P_{4n}(6n, 2-2n)$, per a $n = 1, 2, 3, \ldots$..
Per a $n = 1$ compleix la propietat.
$P_4(6,2)$
Suposem certa la propietat per a $n = k$
Demostrem la propietat per a $n = k+1$
Siga $O(0,0)$
P_{4k+1} és igual al gir de 180º de P_{4k} al voltant de A.
$\overrightarrow{OP_{4k+1}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{P_{4k}A} = (2-6k, 2k)$
P_{4k+2} és igual al gir de 180º de P_{4k+1} al voltant de B.
$\overrightarrow{OP_{4k+2}} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{P_{4k+1}B} = (2+6k, -2-2k)$
P_{4k+3} és igual al gir de 180º de P_{4k+2} al voltant de C.
$\overrightarrow{OP_{4k+3}} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{P_{4k+2}C} = (-6-6k, 2k)$
P_{4k+4} és igual al gir de 180º de P_{4k+3} al voltant de D.
$\overrightarrow{OP_{4k+4}} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{P_{4k+3}D} = (6+6k, -2k) = (6(k+1), 2-2(k+1)$
Aleshores, la propietat s'acompleix.

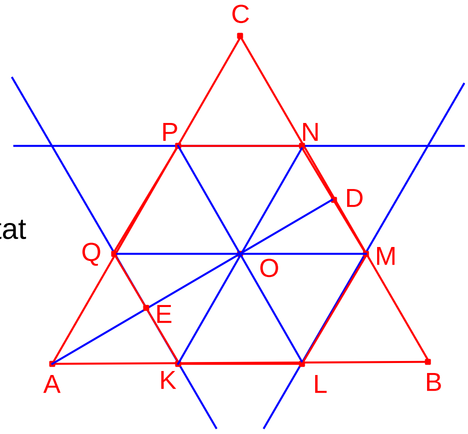
Notem que P_{2016} està sobre la recta P_0P_4
Les coordenades són:
$P_{2016}(6 \cdot 504, 2 - 2 \cdot 504)$
$a + b = 4 \cdot 504 + 2 = 2018$

2157.- Els costats d'un triangle mesuren 12cm i 31 cm i les mitjanes referides a quests dos costats són perpendiculars.
Calculeu la mesura del tercer costat.
KöMaL C1519



Solució:
Siguen $b = 22, c = 31$
Les mesures de les mitjanes són:
$m_c{}^2 = \frac{2a^2+2\cdot 22^2-31^2}{4}, m_b{}^2 = \frac{2a^2+2\cdot 31-22^2}{4}$.
Siga G el baricentre.
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{BG} = \frac{2}{3}m_b, \overline{CG} = \frac{2}{3}m_c$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BGC}$:
$\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 = a^2$
$$\frac{4}{9}\left(\frac{2a^2 + 2\cdot 31^2 - 22^2}{4}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{2a^2 + 2\cdot 31^2 - 22^2}{4}\right) = a^2$$
Simplificant:
$5a^2 = 22^2 + 31^2$.
$a = 17\text{ cm}$

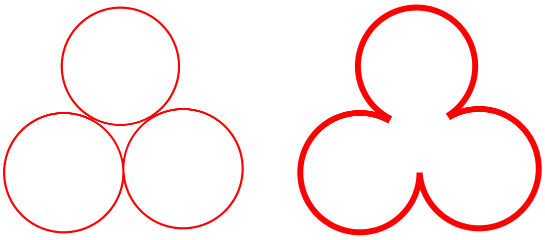
2158.- Siga O el centre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$. Punt que està a la mateixa distància dels tres vèrtexs.
Siga P un punt qualsevol interior al triangle equilàter.
Determineu la probabilitat que el punt P estiga a menor distància de O que de qualsevol dels vèrtexs del triangle equilàter.
Crux Mathematicorum CC349



Solució:
En un triangle equilàter el baricentre, el circumcentre, el ortocentre i el incentre coincideixen.
La mediatriu QK del segment $\overline{OA}$ està a la mateixa distància dels extrems.
I és perpendicular al segment $\overline{OA}$, per tant, paral·lela al costat $\overline{BC}$.
Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$
Per la propietat del baricentre $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$.
Siga E la intersecció de la recta mediatriu QK i $\overline{AD}$.
Aleshores, $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{3}\overline{AD}$
Aleshores, els casos favorables són els punts que pertanyen a l'interior de l'hexàgon regular de costat $\overline{QK} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

La probabilitat és igual a l'àrea de l'hexàgon regular KLMNPQ dividit per l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
$P = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

2159.- Tres circumferències de radi r són tangents dos a dos, com mostra la figura.
Els tres arcs central han estat eliminats per forma una flor de tres pètals.
Determineu exactament el perímetre de la flor en funció de r.



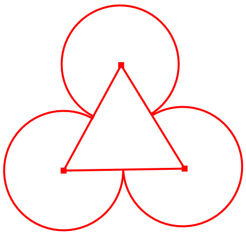
Crux Mathematicorum CC348

Solució:

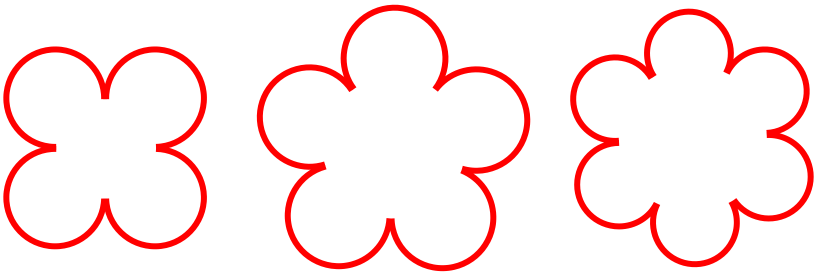
Els centres de les tres circumferències formen un triangle equilàter de costat 2r.

El perímetre és igual a $\frac{5}{2}$ circumferències de radi r:

$P = \frac{5}{2} 2\pi r = 5\pi r$

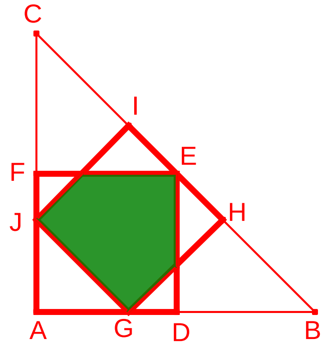


Generalització:



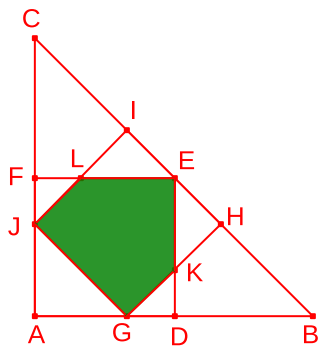
$P_n = (n+2)\pi, n \geq 3$

2160.- En el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90°$ es dibuixen els quadrats inscrits ADEF i GHIJ (veure figura).
Calculeu la proporció entre l'àrea intersecció dels dos quadrats i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:
Siguen $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ catets del triangle rectangle.
$\overline{BC} = \sqrt{2}$
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$

El punt E és el punt mig de la hipotenusa.
$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}$



Siga $\overline{GJ} = x$
$\overline{AG} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{GJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$
$\overline{BG} = 1 - \overline{AG} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$
$x = \overline{GH} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BG} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}x$
Resolent l'equació:
$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{1}{3}$
$\overline{GD} = \overline{AD} - \overline{AG} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$\overline{GK} = \sqrt{2}\overline{GD} = \frac{\sqrt{2}}{6}$
$\overline{KE} = \overline{DE} - \overline{DK} = \frac{1}{3}$.
L'àrea de la intersecció dels dos quadrats és igual a l'àrea del rectangle GKELJ i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KEL}$
$S_{GKELJ} = \overline{GJ} \cdot \overline{GK} + \frac{1}{2}\overline{KE}^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$
La proporció entre les àrees del pentàgon GKELJ i la del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$\frac{S_{GKELJ}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$