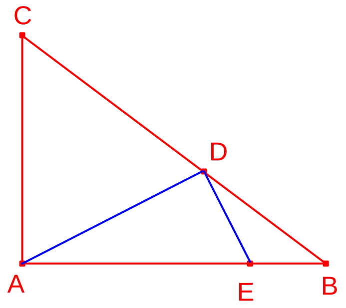
2161.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $a = 10, b = 6, c = 8$.

Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} = \overline{AC}$.

Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és rectangle.

Solució:



Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores,

$a^2 = b^2 + c^2$ aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $A = 90^o$.

$\overline{BD} = 4, \overline{BE} = 2$.

Siga $\alpha = \angle DAB$.

$\angle CAD = \angle ADC = 90^o - \alpha$.

$\angle ADB = 90^o + \alpha$.

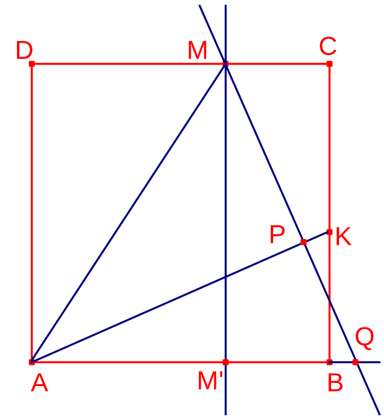
Els triangles $\overset{\Delta}{ADB}$, $\overset{\Delta}{DEB}$ són semblant ja que $\angle ABD = \angle DBE$ i $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = 2$.

Aleshores, $\angle DAB = \angle EDB = \alpha$.

Aleshores, $\angle ADE = \angle ADB - \angle EDB = 90^o + \alpha - \alpha = 90^o$.

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és rectangle $\angle ADE = 90^o$.

2162.- Siga K un punt qualsevol del costat $\overline{BC}$ del quadrat ABCD.
La bisectriu de l'angle $\angle DAK$ talla el costat $\overline{CD}$.
Proveu que $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.

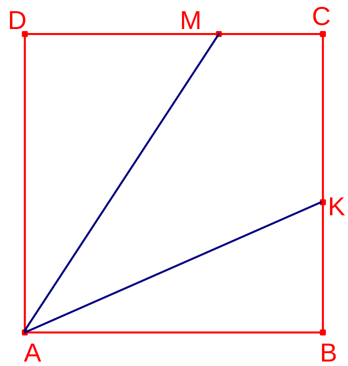


Solució 1:
Siga $\alpha = \angle DAK$.
La recta perpendicular al segment $\overline{AK}$ que passa pel punt M talla el segment $\overline{AK}$ en el punt P i a la recta AB en el punt Q.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{APM}$, són iguals
Aleshores, $\overline{DM} = \overline{MP}$, $\overline{AD} = \overline{AP}$.

$\angle DMP = 180^o - \angle DAK = 90^o + \alpha$.
Siga M' la projecció de M sobre el costat $\overline{AB}$.
$\angle M'MQ = \angle DMP - 90^o = \alpha$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{MM'Q}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{BK} = \overline{PQ} = \overline{M'Q}$, $\overline{MQ} = \overline{AK} = \overline{AQ}$.

$\overline{AK} = \overline{MQ} = \overline{MP} + \overline{PQ} = \overline{DM} + \overline{BK}$.



Solució 2:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$.
Siga $\alpha = \angle DAK$.

$\angle DAM = \angle MAK = 45^o - \dfrac{\alpha}{2}$.

$\overline{BK} = \operatorname{tg}\alpha$, $\overline{AK} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

$\overline{DM} = \operatorname{tg}\left(45^o - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

$$\overline{DM} + \overline{BK} = \operatorname{tg}\left(45^o - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

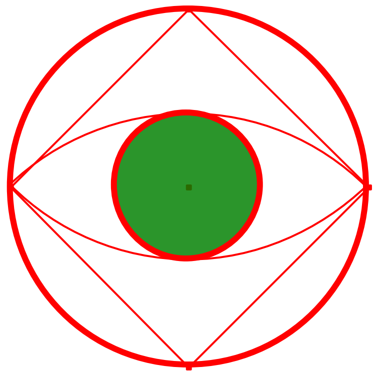
$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

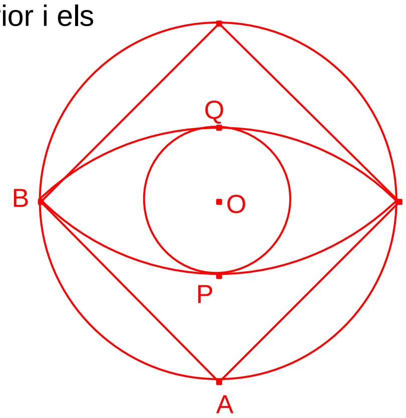
$$= \frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} = \overline{AK}.$$

Aleshores, $\overline{AK} = \overline{DM} + \overline{BK}$.

2163.- Una circumferència té inscrit un quadrat.
Fent centre en dos vèrtexs oposats del quadrat s'han dibuixat dos quadrats.
En l'interior dels dos quadrants s'ha inscrit una circumferència tangent als dos quadrants.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



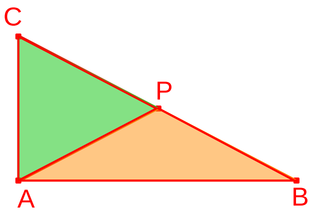
Solució:
Notem que les dues circumferències són concèntriques.
Siga O el centre.
Siguen P i Q els punts de tangència de la circumferència interior i els dos quadrants.
Siga R el radi de la circumferència exterior. $\overline{OA} = R$
Siga r el radi de la circumferència interior. $\overline{OQ} = r$



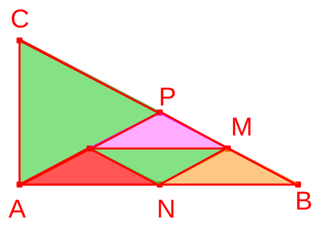
$\overline{AQ} = \overline{AB} = R\sqrt{2}$.
$r = \overline{OQ} = R\sqrt{2} - R = \left(\sqrt{2} - 1\right)R$.
La proporció entre les àrees dels cercles és:
$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

2164.- Demostreu que qualsevol triangle rectangle és pot dividir en $3k+2$ triangles isòsceles, per a tot $k \in \mathbb{N}$
KöMaL, C1529.

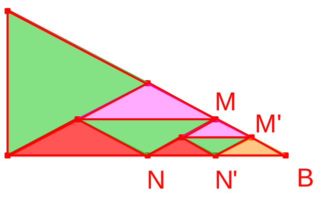
Solució:



2



5



8

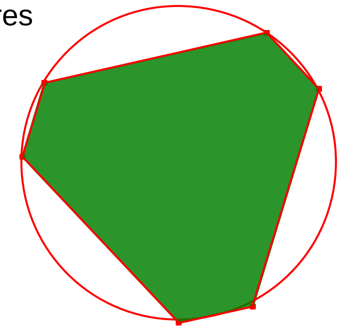
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga P el punt mig de la hipotenusa.
$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{APB}$ són isòsceles.

En el triangle $\overset{\Delta}{APB}$ dibuixem els punts migs dels costats que formen 4 triangles rectangles congruents.
Aleshores tenim $3 \cdot 1 + 2$ triangles.

En el triangle $\overset{\Delta}{NMB}$ dibuixem els punts migs dels costats que formen 4 triangles rectangles congruents.
Aleshores tenim $3 \cdot 2 + 2$ triangles.
I així successivament.

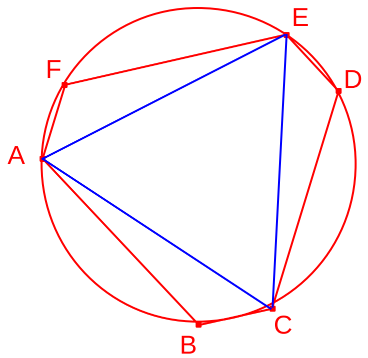
2165.- Un hexàgon que té tres costats de longitud 1 i els altres tres costats de longitud 3, està inscrit en una circumferència.
Determineu l'àrea de l'hexàgon.
Crux Mathematicorum MA3



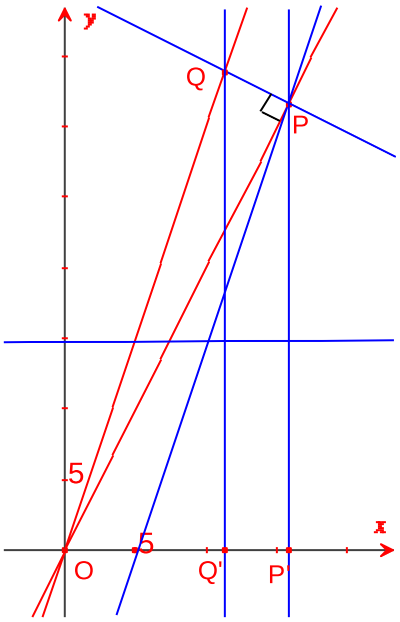
Solució:
Siga ABCDEF l'hexàgon $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = 3, \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{AF} = 1$
Els arcs $\widehat{ABC} = \widehat{CDE} = \widehat{EFA} = 120°$
Aleshores, l'hexàgon és equiangular.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos 120°$
$\overline{AC} = \sqrt{13}$.
L'àrea de l'hexàgon és igual a 3 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ més l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$

$$S_{ABCDEF} = 3\left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot sin60°\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{13}\right)^2 = \frac{11\sqrt{3}}{2}$$



2166.- Un punt P està sobre la recta $y = 2x$.
El punt Q esta sobre la recta $y = 3x$ i és tal que el segment $\overline{PQ}$ té longitud 5 i és perpendicular a la recta $y = 2x$.
Determineu les coordenades de P.
Crux Mathematicorum MA5



Solució:
Siga P’ la projecció de P sobre l’eix d’abscisses.
Siga Q’ la projecció de Q sobre l’eix d’abscisses.
Siga $P(x, 2x)$
Siga $\alpha = \angle POP', \beta = \angle QOQ'$
$\angle POQ = \beta - \alpha$

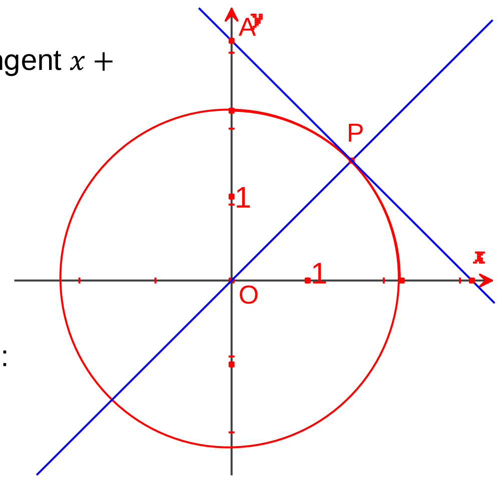
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = tg(\beta - \alpha)$$
$tg\alpha = 2, tg\beta = 3$

$$\frac{5}{\overline{OP}} = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7}$$
$\overline{OP} = 35$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle retangle $\overset{\Delta}{OP'P}$:
$x^2 + 4x^2 = 35^2$
Resolent l’equació:
$x = 7\sqrt{5}$
Les coordenades de P són:
$P(7\sqrt{5}, 14\sqrt{5})$

2167.- Quines condicions han d'acomplir a i b a fi que la recta $x + y = a$ siga tangent a la circumferència $x^2 + y^2 = b$.
Crux Mathematicorum MA4

Solució
$b > 0$, $\sqrt{b}$ és el radi de la circumferència.
Siga A el punt de tall amb l'eix d'ordenades de la recta tangent $x + y = a$ a la circumferència.
$A(0, a)$
Siga P el punt de tangència. P pertany al primer quadrant.
Aleshores, $a \geq 0$.
La recta OP és perpendicular a la recta $x + y = a$.
Aleshores, el seu pendent és 1.
$\overline{OP} = \sqrt{b}, \overline{OA} = a$.

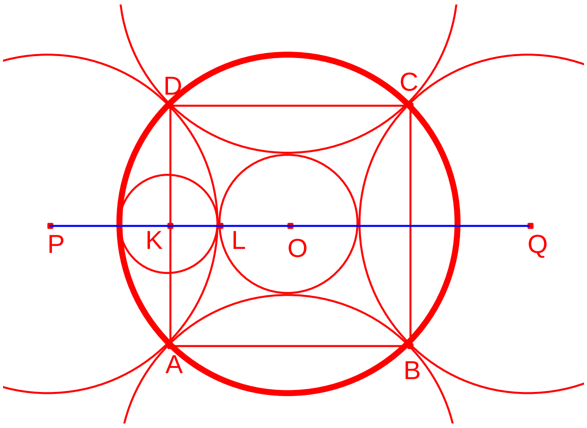


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPA}$:
$a^2 = 2b$, $a \geq 0, b > 0$.

2168.- El cercle circumscrit d'un quadrat es reflecteix a cada costat.
Siga T l'àrea del cercle tangent exterior als 4 cercles reflectits.
Siga t l'àrea del cercle tangent interior al cercle circumscrit i a un dels reflectits.
Determineu la proporció $\frac{T}{t}$

KöMaL, C1526.

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga P i Q els centres de dues circumferències reflectides a costats oposats.
$\overline{PQ} = 2c$

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al quadrat.

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

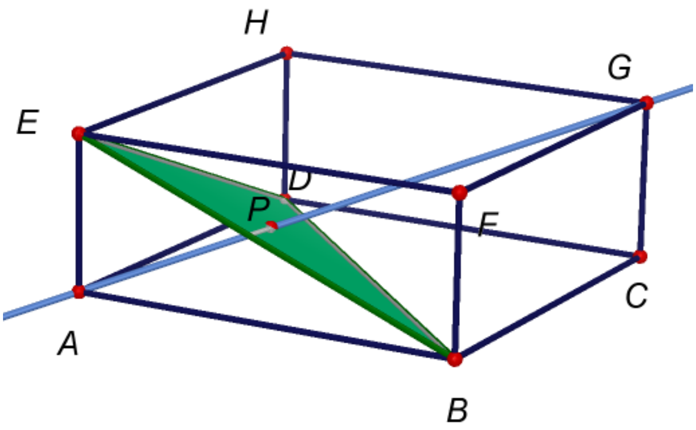
Siga r el radi de la circumferència tangent exterior a les 4 reflectides.
Siga s el radi de la circumferència tangent interior a la circumscrita i a una de les reflectides.

$$r = \frac{\overline{PQ} - 2R}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}c$$

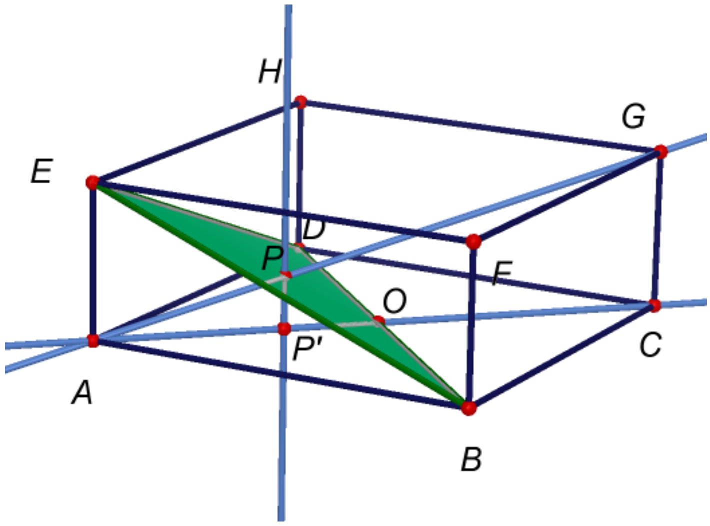
$$s = \frac{c - 2r}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}c$$

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)^2 = 2.$$

2169.- Donat l'ortoedre ABCDEFGH, la diagonal $\overline{AG}$ talla el triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ en el punt P.
Proveu que P és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$



Solució.
Siguen $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{AE} = c$ arestes de l'ortoedre.
Siga O en centre de la cara ABCD.
O és el punt mig de les diagonals del rectangle ABCD.
Siga P' la projecció de P sobre la cara ABCD
Els punts E, A, P, P', O, C, G són coplanaris.
Els punts E, P, O estan alineats.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Siga $x = \overline{AP'}$

$$\overline{OP'} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - x$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APP'}$, $\overset{\Delta}{ACG}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\overline{PP'}}{x}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAO}$, $\overset{\Delta}{PP'O}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\overline{PP'}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - x}$$

Dividint ambdues expressions:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - x}{x}$$

Resolent l'equació:

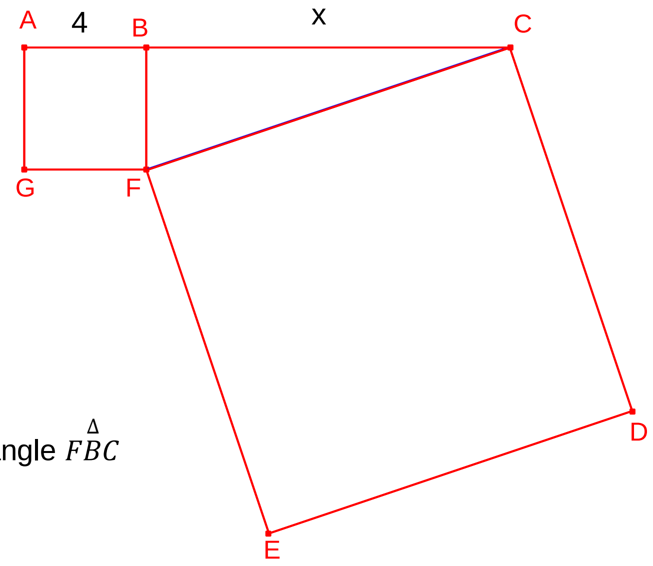
$$x = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$$

Aplicant el teorema de Tales als triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAO}$, $\overset{\Delta}{PP'O}$

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP'}} = \frac{2}{3}$$

Aleshores, P és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$

2170.- En la figura ABFG és un quadrat de costat 4.
Els punts ABC estan alineats.
CDEF és un quadrat.
Siga $x = \overline{BC}$.
Determineu x a fi que l'hexàgon ACDEFG tinga àrea 200.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $F\overset{\Delta}{B}C$
$\overline{C\,F}^2 = 4^2 + x^2 = x^2 + 16$
L'àrea de l'hexàgon ACDEFG és 200:
$4^2 + \dfrac{4x}{2} + x^2 + 16 = 200$
$x^2 + 2x - 168 = 0$
Resolent l'equació:
$x = 12$