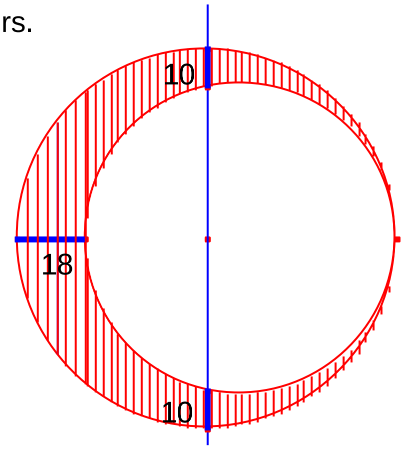
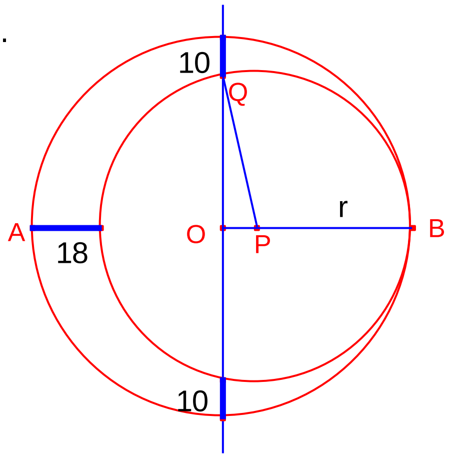
2171.- En la figura hi ha dues circumferències tangents interiors. Calculeu l'àrea ratllada entre ambdues circumferències.

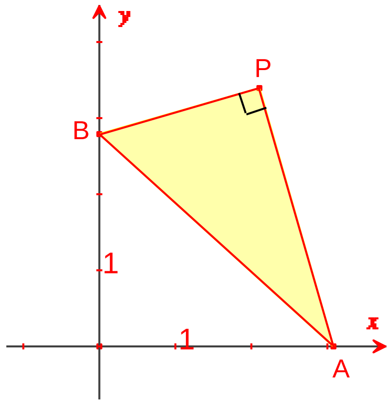


Solució:
Siga $r = \overline{PB}$ radi de la circumferència menuda.
Siga $\overline{AB} = 2R = 2r + 18$ diàmetre de la circumferència gran.
$R = 9 + r$

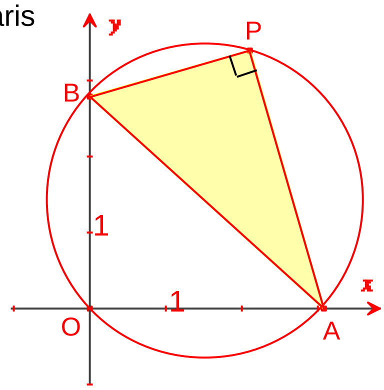


Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$,
$\overline{PQ} = r, \overline{OP} = R - r = 9, \overline{OQ} = R - 10 = r - 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$r^2 = 9^2 + (r - 1)^2$
Resolent l'equació:
$r = 41$, aleshores, $R = 50$
L'àrea afitada entre les dues circumferències és:
$S = \pi(R^2 - r^2) = 819\pi$
:

2172.- El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$, $P = 90°$, amb el vèrtex A sobre l'eix d'abscisses i B sobre l'eix positiu d'ordenades. Determineu el lloc geomètric del vèrtex P.

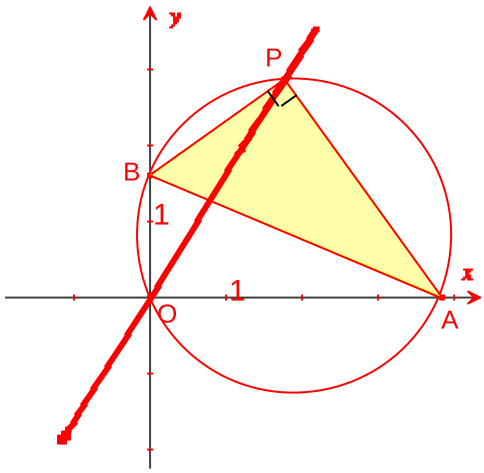


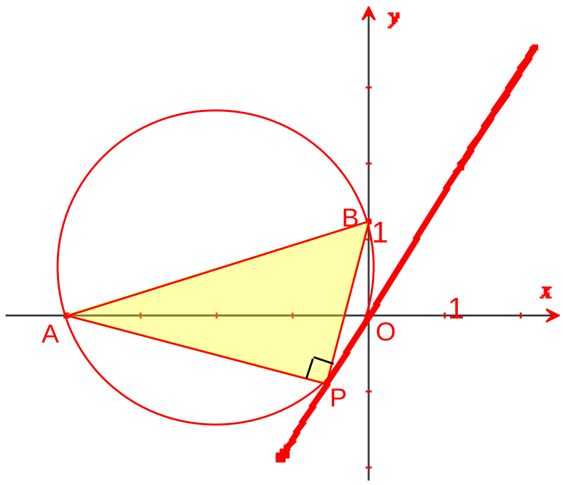
Solució 1:
Siga O l'origen de coordenades.
El quadrilàter OAPB té els vèrtex oposats O, P suplementaris $O = P = 90°$.



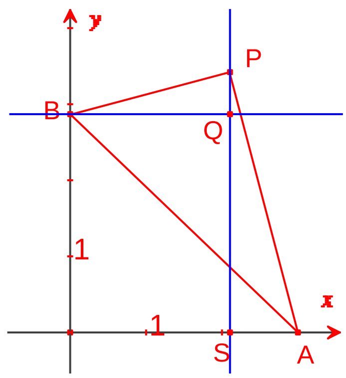
Aleshores el quadrilàter s'inscriu en una circumferència de diàmetre constant $\overline{AB}$.
$\overline{AP}$ és constant.
Aleshores, per a tota posició de P l'angle inscrit en la circumferència $\angle POA$ és constant.

Aleshores, P recorre un segment de la recta OP.





Solució 2:
Siga $P(x, y)$
Siga $\overline{AB} = d$, $\overline{AP} = e$.

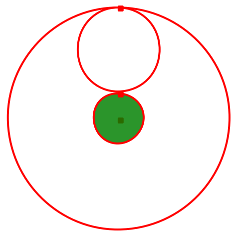


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$
$\overline{BP}^2 = d^2 - e^2$.
Pel punt B tracem una recta perpendicular a l'eix OY.
Pel punt P tracem una recta perpendicular a l'eix OX.
Les dues rectes es tallen en el punt Q.
Siga S la projecció de P sobre l'eix OX.

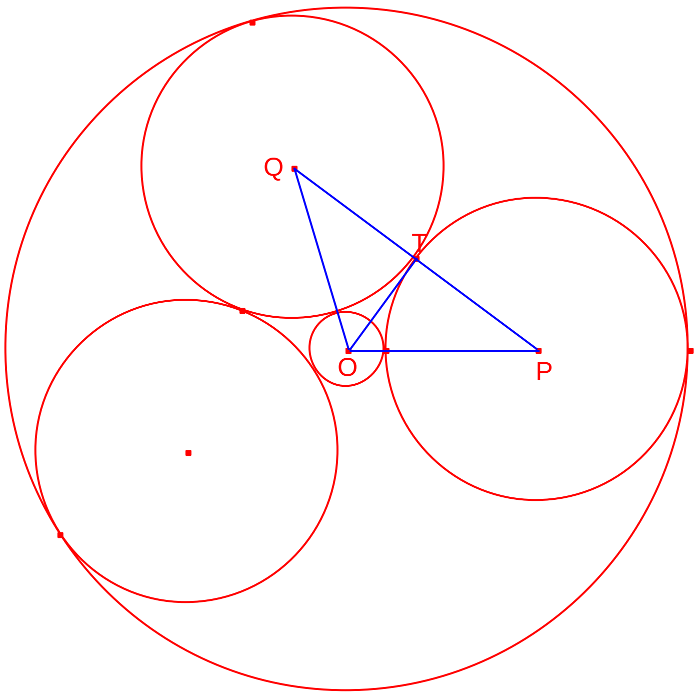
Els triangle $\overset{\Delta}{BQP}$, $\overset{\Delta}{PSA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{\sqrt{d^2 - e^2}} = \frac{y}{e}$$

2173.- Dues circumferències de radis 1 i 9 defineixen una corona circular. En l'interior d'aquesta corona circular es dibuixen n circumferències sense superposicions, cadascuna tangent a les dues circumferències de la corona.
Determineu el màxim valor per a n.



Solució:

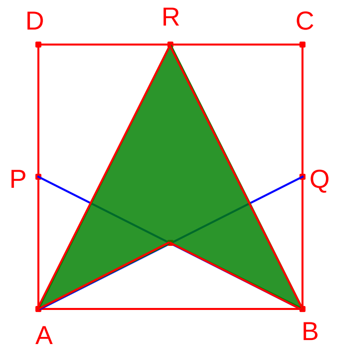


Siga O el centre de de dues circumferències concèntriques.
Siguen P i Q els centre de dues circumferències tangents a les concèntriques.
Suposem que aquestes dues circumferències són tangents entre elles.
Siga T el punt de tangència.
L'angle que forma una circumferència de vèrtex O i tangent a una de les circumferències és $\alpha = \angle POQ$.
$\angle POT = \frac{\alpha}{2}, \angle PTQ = 90º$.
$\overline{PT} = 4, \overline{OP} = 5$
$\alpha = 2 \cdot arcsin\frac{4}{5} \approx 106°15'37"$

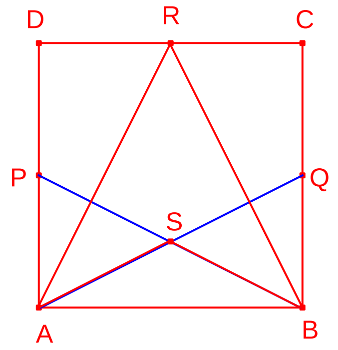
$n\alpha \leq 360°$
Si $n = 2, 2\alpha \approx 212°31'14"$.
Si $n = 3, 3\alpha \approx 318°46'50"$.
Si $n > 3, n\alpha > 360º$.

Aleshores, el màxim valor de n és $n = 3$

2174.- Siga el quadrat ABCD amb P, Q, R els punts migs dels costats $\overline{DA}, \overline{BC}, \overline{CD}$ respectivament.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga S la intersecció de intersecció dels segments $\overline{BP}, \overline{AQ}$.
El punt S és punt mig del segment $\overline{BP}$.
L'àrea del quadrilàter ASBR és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ARD}, \overset{\Delta}{BCR}, \overset{\Delta}{ABS}$.



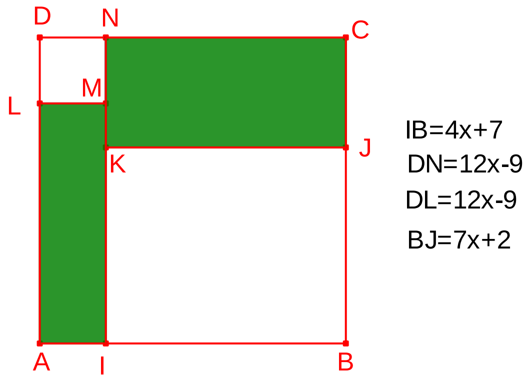
$S_{ARD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{ABS}$ tenen la mateixa altura sobre la base $\overline{BP}$.
Aleshores, $S_{ABS} = \frac{1}{2} S_{ARD} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$

$$S_{ASBR} = S_{ABCD} - (2 \cdot S_{ARD} + S_{ABS}) = S_{ABCD} - \left(2 \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} + \frac{1}{8} S_{ABCD}\right) = \frac{3}{8} S_{ABCD}$$

Aleshores, $\frac{S_{ASBR}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$

2175.- Donat el quadrat ABCD determineu l'àrea de la zona ombrejada.
Si $x=1$ calculeu l'àrea de la zona ombrejada.
Si l'àrea ombrejada és 200 calculeu el valor de x
Determineu el valor de x a fi que l'àrea ombrejada siga $\frac{2}{5}$ parts de l'àrea del quadrat ABCD.



Solució:

$x \ge \frac{3}{4}$.

$\overline{CD} = \overline{BI} + \overline{DN} = 16x - 2$.

$\overline{CJ} = \overline{CD} - \overline{BJ} = 16x - 2 - (7x + 2) = 9x - 4$.

$\overline{AL} = \overline{IB} = 4x + 7$.

L'àrea ombrejada és:

$S(x) = (4x + 7)(9x - 4) + (4x + 7)(12x - 9)$.

$S(x) = (4x + 7)(21x - 13) = 84x^2 + 95x - 91$.

Si $x = 1$, $S(1) = 88$.

Si l'àrea ombrejada és 200:

$84x^2 + 95x - 91 = 200$.

$84x^2 + 95x - 291 = 0$.

Resolent l'equació:

$x = \frac{-95 + \sqrt{106801}}{168} \approx 1.38$.

L'àrea ombrejada siga igual a la quarta part de l'àrea de quadrat ABCD

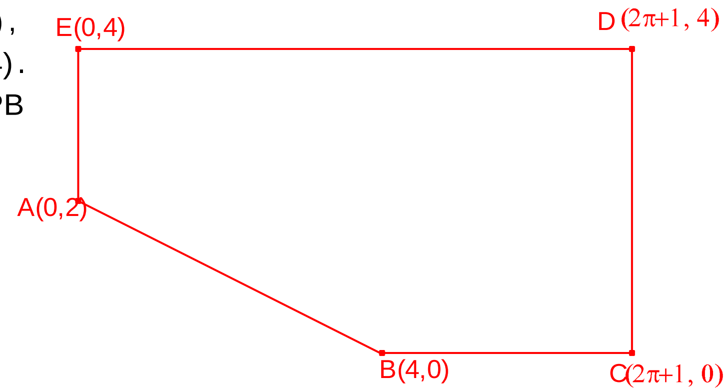
$84x^2 + 95x - 91 = \frac{2}{5}(16x - 2)^2$.

$92x^2 + 603x + 463 = 0$.

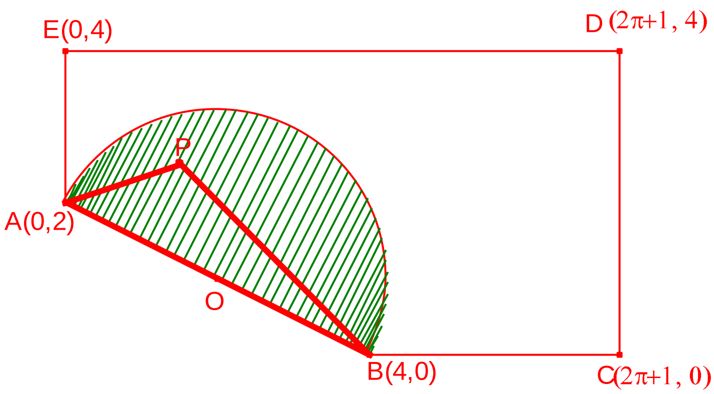
Resolent l'equació:

$x = \frac{603 + 5\sqrt{7729}}{184} \approx 5.67$, $x = \frac{603 - 5\sqrt{7729}}{194} \approx 0.89$.

2176.- S'escull un punt P a l'atzar a l'interior del pentàgon de vèrtexs $A(0,2)$, $B(4,0)$, $C(2\pi+1,0)$, $D(2\pi+1,4)$, $E(0,4)$. Calculeu la probabilitat que l'angle $\angle APB$ siga obtusangle.



Solució:



Els casos possibles són l'àrea del pentàgon ABCDE:

$S_{ABCDE} = (2\pi+1)\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 8\pi$.

A fi que l'angle $\angle APB$ siga obtusangle el punt P ha d'estar a l'interior del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AB} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$

Els casos favorables són l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$.

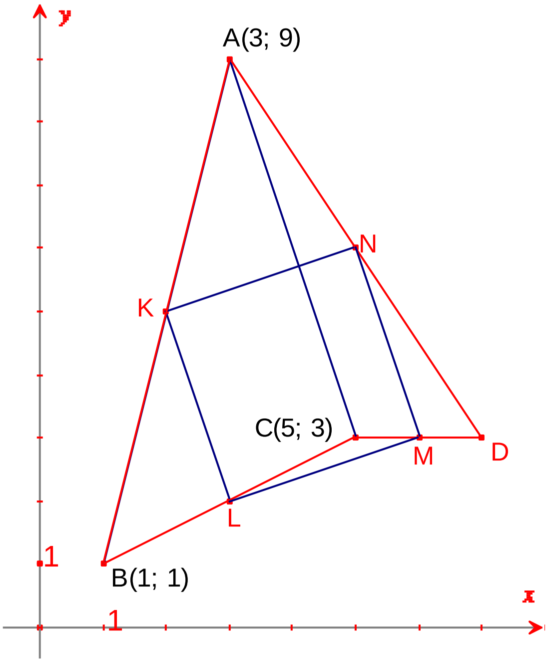
$S_{semicercle} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}\pi$.

La probabilitat és:

$$\frac{S_{semicercle}}{S_{ABCDE}} = \frac{\frac{5}{2}\pi}{8\pi} = \frac{5}{16}.$$

2177.- Siguen els punts $A(3,9)$, $B(1,1)$, $C(5,3)$ i $D(a,b)$ en el primer quadrant. Els punts migs dels costats del quadrilàter ABCD formen un quadrat. Determineu les coordenades del put D.

Solució:



Siguen K, L, M, N els punts migs del costats $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, respectivament.

KLMN és un quadrat.

Les coordenades de K i L són:

$K(2,5)$, $L(3,2)$.

$\overrightarrow{KL} = (1,-3)$, aleshores, $\overline{LM} = (3,1)$.

Les coordenades de M són:

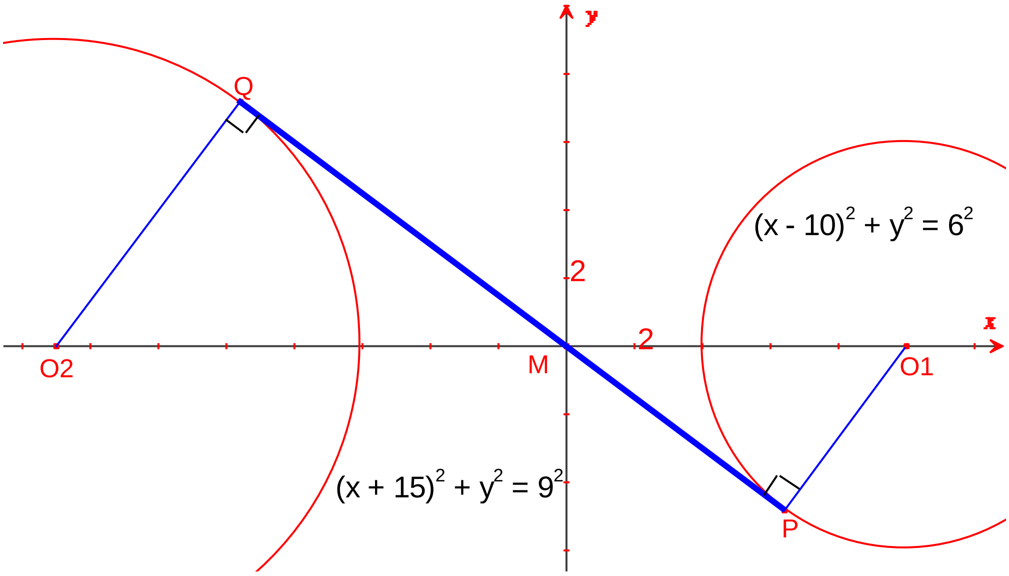
$M(6,3)$.

Les coordenades de D són:

$D(7,3)$.

2178.- Siguen les circumferències d'equacions
$C_1 \equiv (x-10)^2 + y^2 = 36$
$C_2 \equiv (x+15)^2 + y^2 = 81$
Siga $\overline{PQ}$ tangent interior a les dues circumferències, P en C_1 i Q en C_2.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$.

Solució.



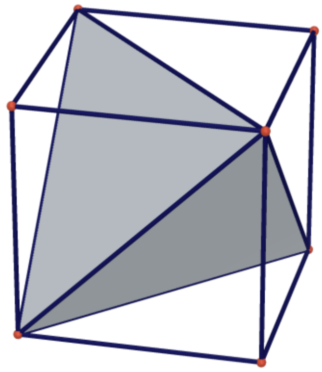
La circumferència $C_1 \equiv (x-10)^2 + y^2 = 36$ té centre $O_1(10,0)$ i radi 6.
La circumferència $C_2 \equiv (x+15)^2 + y^2 = 81$ té centre $O_2(-15,0)$ i radi 9.
Siga M la intersecció del segment $\overline{PQ}$ i l'eix d'abscisses.
Siga $\overline{O_2M} = x$
$\overline{O_1M} = 25 - x$

Els triangles rectangles $O_1\overset{\Delta}{P}M$, $O_2\overset{\Delta}{Q}M$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{6}{9} = \frac{25-x}{x}$$
Resolent l'equació:
$x = \overline{O_2M} = 15.$
$\overline{O_1M} = 10.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $O_1\overset{\Delta}{P}M$
$\overline{PM} = 8.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $O_2\overset{\Delta}{Q}M$
$\overline{QM} = 12.$
Aleshores, $\overline{PQ} = 20$

2179.- En un cub s'ha inscrit un tetraedre.
Determineu la proporció entre el volum del tetraedre i el volum del cub.



Solució 1:
Siga a l'aresta del cub.
El volum del cub és:
$V_{cub} = a^3$.
El volum del tetraedre és igual al volum del cub menys el volum de 4 tetraedres que tenen 3 arestes del cub perpendiculars.
$V_{tetraedre} = a^3 - 4\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}a^2 \cdot a\right) = \frac{1}{3}a^3$.
La proporció del volums és:
$\frac{V_{tetraedre}}{V_{cub}} = \frac{1}{3}$.

Solució 2:
El volum del cub és:
$V_{cub} = a^3$.
El tetraedre és regular d'aresta $a\sqrt{2}$.
El volum del tetraedre regular és $V_{tetraedre} = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ on x és l'aresta del tetraedre regular.
$V_{tetraedre} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^3 \cdot a\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}a^3$.
La proporció del volums és:
$\frac{V_{tetraedre}}{V_{cub}} = \frac{1}{3}$.

2180.- Siga ABCDEFGH el cub d'aresta a.

Siguen X, y els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{GH}$, respectivament.

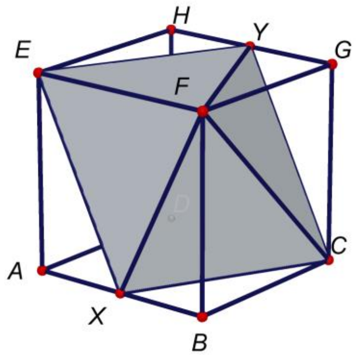
Es construeix la piràmide de base XCYE i vèrtex F.

Calculeu en funció de a:

a) La mesura del segment $\overline{XY}$.

b) L'àrea de la base XCYE.

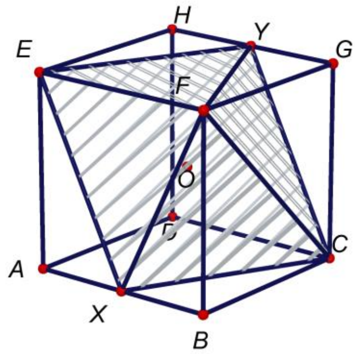
c) El volum de la piràmide XCYEF.



Solució:

Siga O el centre del cub.

El punt O pertany a la base XCYE de la piràmide i és el centre de la base de la piràmide recta XCYEF.



a)

$\overline{XY} = \overline{BG} = a\sqrt{2}$.

b)

L'àrea de la base és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEX}$.

$\overline{CE} = a\sqrt{3}$.

$\overline{OX} = \dfrac{1}{2}\overline{XY} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'àrea de la base XCYE és:

$$S_{XCYE} = 2\left(\frac{1}{2}\overline{CE}\cdot\overline{OX}\right) = a\sqrt{3}\cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2 .$$

c)

$\overline{OF} = \dfrac{1}{2}\overline{CE} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

El volum de la piràmide XCYEF és:

$$V_{XCYEF} = \frac{1}{3}S_{XCYE}\cdot\overline{OF} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{2}a^2\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a^3 .$$