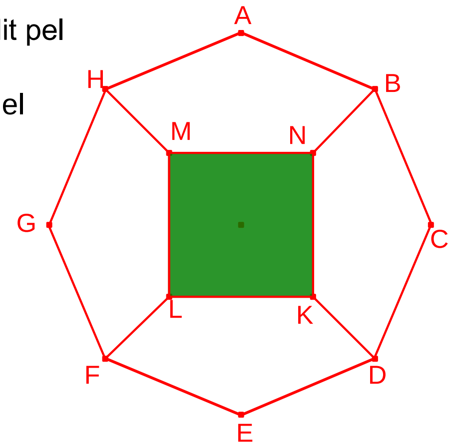
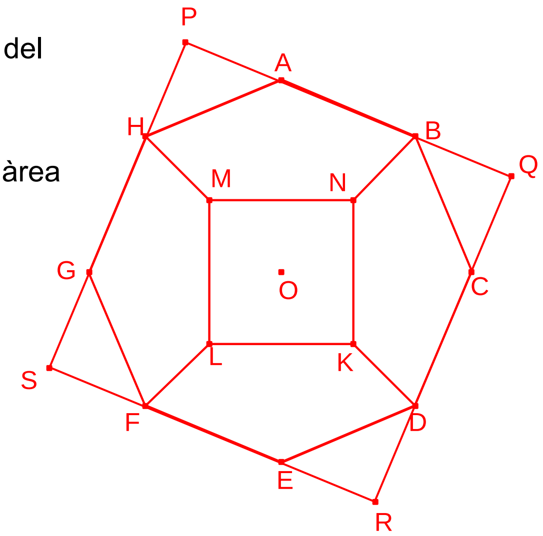
Problemes de Geometria per a l'ESO 219

2181.- L'octògon regular ABCDEFGH de costat c està dividit pel quadrat KLMN i 4 pentàgons, tots cinc d'igual àrea.
Calculeu la mesura del costat $\overline{KL}$ del quadrat i la mesura del segment $\overline{MH}$.



Solució:
Dibuixem el quadrat PQRS circumscrit a l'octògon regular-



$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\,.$$

$$\overline{PQ} = \left(1+\sqrt{2}\right)c\,.$$

L'àrea de l'octògon regular ABCDEFGH és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys l'àrea d'un quadrat de costat c:

$$S_8 = \left(\left(1+\sqrt{2}\right)c\right)^2 - c^2 = \left(2+2\sqrt{2}\right)c^2$$

L'àrea del quadrat KLMN és igual a la cinquena part de l'àrea de l'octògon:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{5}S_8 = \frac{2+2\sqrt{2}}{5}c^2\,.$$

Siga $d = \overline{MN}$.

Aleshores, $d = \sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{2}}{5}}c\,.$

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}d = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{5}}\,.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCH}$:

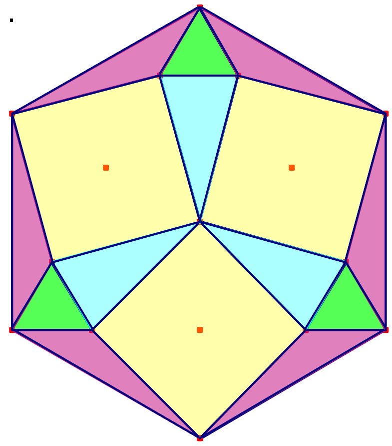
$$\overline{DH} = \sqrt{1^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2}\,c = \sqrt{4+2\sqrt{2}}\,c\,.$$

Siga O el centre de l'octògon regular.

$$\overline{OH} = \frac{1}{2}\overline{DH} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}c\,.$$

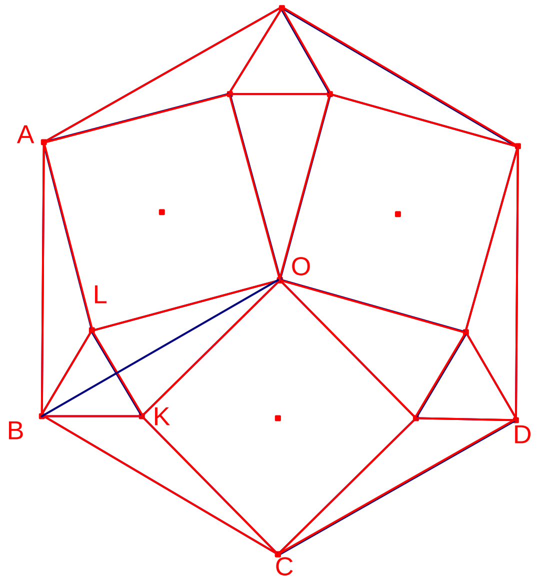
$$\overline{MH} = \overline{OH} - \overline{OM} = \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{5}}\right)c\,.$$

2182.- En la figura l'hexàgon regular exterior té costat $c = 10$. S'han dibuixat e quadrats, cadascun d'ells té un vèrtex en el centre de l'hexàgon i el vèrtex oposat és vèrtexs de l'hexàgon regular.



a) Proveu que els triangles verds són equilàters.
b) Calculeu l'àrea del cadascun dels 3 quadrats.
c) Calculeu l'àrea de cadascun dels 3 triangles equilàters.
d) Calculeu l'àrea de cadascun dels e triangles isòsceles.
e) Calculeu l'àrea de cadascun dels 6 triangles escalens

Solució:



Siga $c = \overline{AB}$ costat de l'hexàgon regular.
Siga O el centre de l'hexàgon regular.

Per simetria de la figura, $\angle KOL = \dfrac{360^o - 3\cdot 90^o}{3} = 30^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{KOL}$ és isòsceles, aleshores, $\angle OKL = \angle OLK = \dfrac{180^o - 30^o}{2} = 75^o$.

$\angle ABC = \angle BCD = 120^o$.

$\angle BCK = \dfrac{120^o - 90^o}{2} = 15^o$.

Siga $\alpha = \angle KBC = \angle LBA$.

$\angle BOL = \dfrac{1}{2}\angle KOL = 15^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCK}$, $\overset{\Delta}{BKO}$ són iguals.
Aleshores, $\angle OBK = \angle OBL = \alpha$.
Aleshores, $4\alpha = 120^o$.
$\alpha = 30^o$
Aleshores, $\angle LBK = 60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{LBK}$ és equilàter.
b)
La diagonal del quadrat és $\overline{OA} = \overline{AB} = c$.

El costat del quadrat $\overline{OL} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

L'àrea del quadrat és $S_4 = \frac{1}{2}c^2$.

c)

Siga $d = \overline{KL}$, costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{LBK}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LOK}$:

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\cos 30^{o} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c^2.$$

L'àrea del triangle equilàter és:

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}d^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{8}c^2.$$

d)

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{LOK}$.

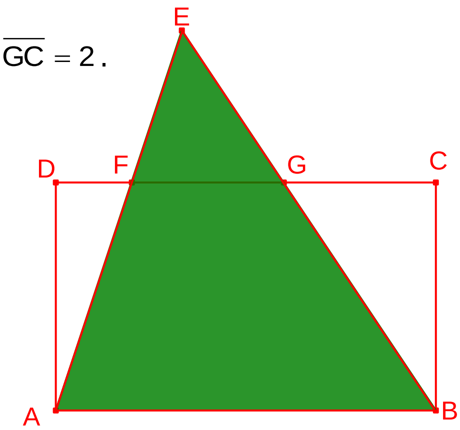
$$S_{LOK} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\sin 30^{o} = \frac{1}{8}c^2.$$

e)

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{BKC}$.

$$S_{BKC} = \frac{1}{2}c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\sin 15^{o} = \frac{1}{2}c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}c^2$$

2183.- Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$.
Siguen F i G dos punts en el segment $\overline{CD}$ tals que $\overline{DF} = 1$, $\overline{GC} = 2$.
Les rectes AF i BG s'intersecten en el punt E.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.



Solució:
$\overline{FG} = 2$.

Siga $\overline{HE} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.
La recta EH talla el costat $\overline{CD}$.
$\overline{HE} = h - 3$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{FGE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

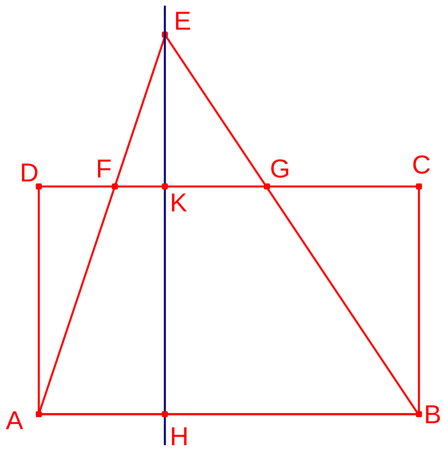
$$\frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{KE}}{\overline{HE}}.$$

$$\frac{2}{5} = \frac{h-3}{h}.$$

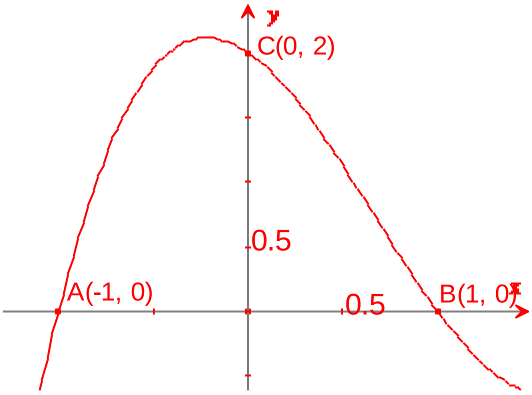
Resolent l'equació:
$h = 5$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = \frac{25}{2}.$$



2184.- Siga una part de la gràfica de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



a) Determineu el valor b.
b) Determineu el tercer punt de tall.

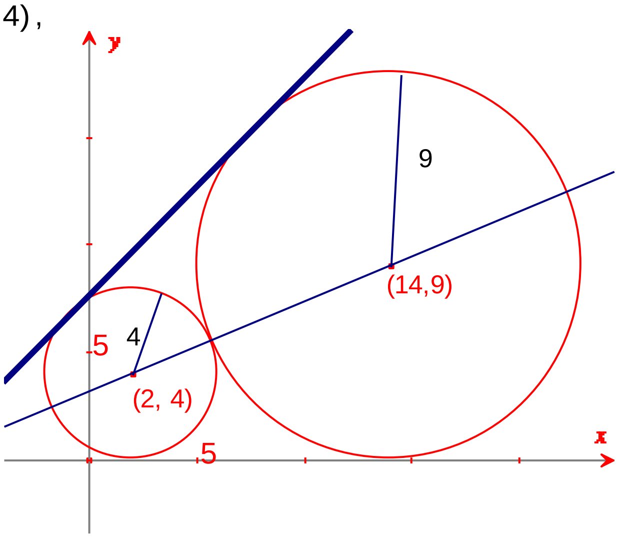
Solució:
a)
L'ordenada a l'origen és el punt $C(0, 2)$, aleshores:
$d = 2$.
El punt $A(-1, 0)$ és un punt de tall amb l'eix d'abscisses, aleshores:
$a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 0$. Simplificant:
$-a + b - c + 2 = 0$ (1)
El punt $B(1, 0)$ és un punt de tall amb l'eix d'abscisses, aleshores:
$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$. Simplificant:
$a + b + c + 2 = 0$ (2)
Sumant les expressions (1) (2):
$2b + 4 = 0$.
Resolent l'equació:
$b = -2$.

b)
Substituint l'expressió $b = -2$ en l'expressió (1)
$-a + 2 - c + 2 = 0$
Aleshores,
$c = -a$.
$f(x) = ax^3 - 2x^2 - ax + 2$.
Per calcular els punts de tall amb l'eix d'abscisses resolem l'equació $f(x) = 0$.

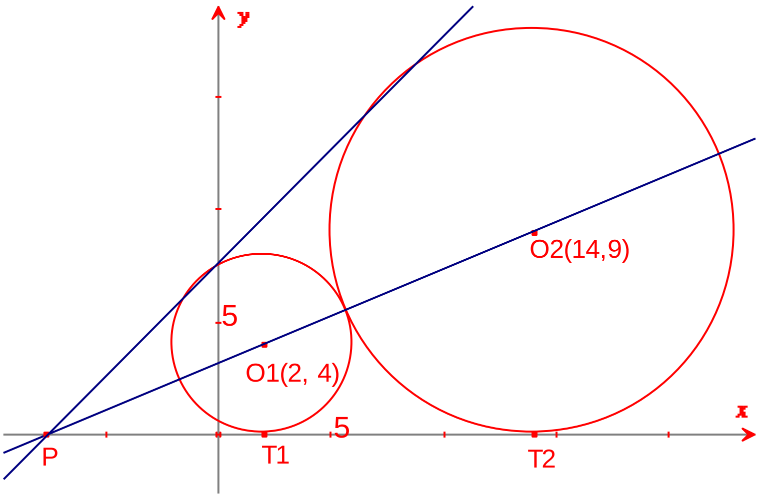
Aplicant la regla de Ruffini:
$ax^3 - 2x^2 - ax + 2 = (x-1)(x+1)(ax-2)$

El tercer punt de tall és $x = \frac{2}{a}$.

2185.- Siguen les circumferències de centres $(2, 4)$, $(14, 9)$ de radis 4 i 9 respectivament.
Determineu les equacions de les rectes tangents comunes.



Solució:



Siguen $O_1(2, 4)$, $O_2(14, 9)$ els centres de les dues circumferències de radis 4 i 9 respectivament.
Notem que la distància de $O_1(2, 4)$ a l'eix d'abscisses és igual al radi 4 de la circumferència. Aleshores la circumferència de centre $O_1(2, 4)$ és tangent a l'eix d'abscisses.

Notem que la distància de $O_2(14, 9)$ a l'eix d'abscisses és igual al radi 9 de la circumferència. Aleshores la circumferència de centre $O_2(14, 9)$ és tangent a l'eix d'abscisses.
Aleshores, l'eix d'abscisses $y = 0$ és tangent comuna a les dues circumferències.

La recta que passa pels centres $O_1(2, 4)$, $O_2(14, 9)$ és la bisectriu de les rectes tangents a les dues circumferències.

L'equació de la recta pels centres $O_1(2, 4)$, $O_2(14, 9)$ té pendent $\text{tg}\alpha = m = \dfrac{5}{12}$.

L'equació de la recta és:

$r_{O_1O_2} \equiv y = \dfrac{5}{12}(x - 2) + 4$.

Calculem el punt de tall P de la recta i l'eix d'abscisses.

$\frac{5}{12}(x-2)+4=0$. Resolent l'equació:

$x=-\frac{38}{5}$.

Les coordenades del punt P són $P\left(-\frac{38}{5},0\right)$.

El pendent de la recta tangent a les dues circumferències és:

$$m' = tg(2\alpha) = \frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

La recta tangent passa pel punt $P\left(-\frac{38}{5},0\right)$ y té pendent $m'=\frac{120}{119}$, la seua equacció és:

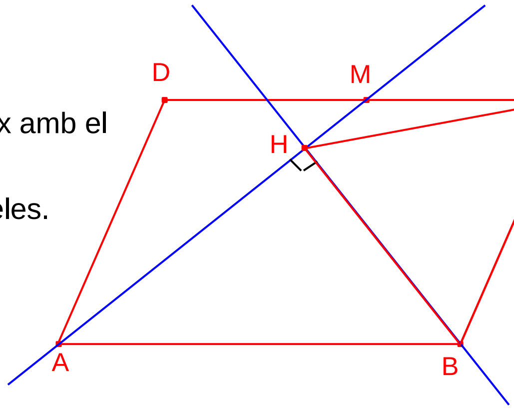
$$r_T \equiv y = \frac{120}{119}\left(x+\frac{38}{5}\right).$$

$$r_T \equiv y = \frac{120}{119}x+\frac{912}{119}.$$

2186.- Siga ABCD un paral·lelogram.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$
Siga H la projecció de B sobre la recta AM.

a) Determineu quan el punt M coincideix amb el punt H.

b) Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{BCH}$ és isòsceles.



Solució:

a)

La recta AM talla la recta BC en el punt K.

Els triangles $\overset{\Delta}{MCK}$, $\overset{\Delta}{ABK}$ són semblants i de raó 1:2.

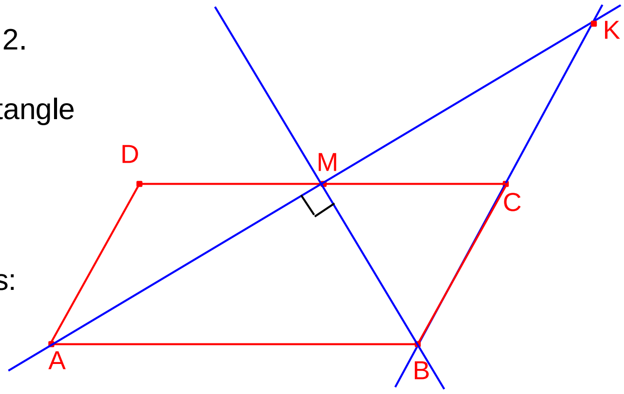
Aleshores, $\overline{BK} = 2 \cdot \overline{BC}$

C és el punt mig de la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMK}$

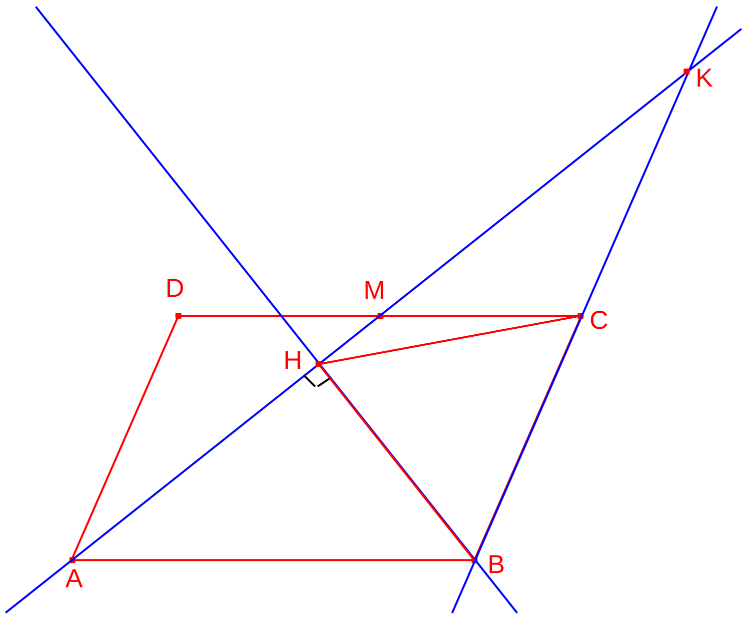
Aleshores, $\overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BK} = \overline{BC}$.

Aleshores, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$.

M coincideix amb H si la proporció dels costats és:
$\overline{AB} :\cdot \overline{BC} = 2:1$



b)



La recta AM talla la recta BC en el punt K.

Els triangles $\overset{\Delta}{MCK}$, $\overset{\Delta}{ABK}$ són semblants i de raó 1:2.

Aleshores, $\overline{BK} = 2 \cdot \overline{BC}$

C és el punt mig de la hipotenusa del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHK}$

Aleshores, $\overline{HC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BK} = \overline{BC}$.

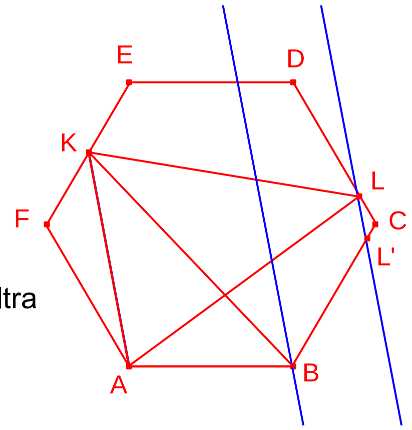
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCH}$ és isòsceles, $\overline{HC} = \overline{BC}$.

2187.- Siga K el punt mig del costat $\overline{EF}$ de l'hexàgon regular ABCDEF.

Determineu els punt (o punts de la línia poligonal ABCD tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ siga $\frac{2}{5}$ de l'àrea de l'hexàgon regular.

KöMaL, C1547

Solució:



Notem que L no pertany al segment $\overline{AB}$ ja que

$$S_{ABK} = \frac{3}{4}\frac{1}{3}S_{ABCDEF}$$

Suposem que L pertany al costat $\overline{CD}$, siga $x = \frac{\overline{CL}}{\overline{AB}}$

Aleshores, L' que pertany al costat $\overline{BC}$ tal que $\frac{\overline{CL'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}x$ és l'altra solució del problema.

Siga $S_{ABCDEF} = 1$

$$S_{AFK} = S_{KED} = \frac{1}{12}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{6}$$

$$S_{ACL} = \frac{1}{3}x$$

$$S_{FKL} = \frac{3}{4}(1-x)\frac{1}{3} = \frac{1}{4}(1-x)$$

$$\frac{2}{5}S_{ABCDEF} = S_{AKL} = S_{ABCDEF} - (2 \cdot S_{AFK} + S_{ABC} + S_{ACL} + S_{AFL})$$

$$\frac{2}{5} = 1 - \left(2 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(1-x)\right)$$

Resolent l'equació:

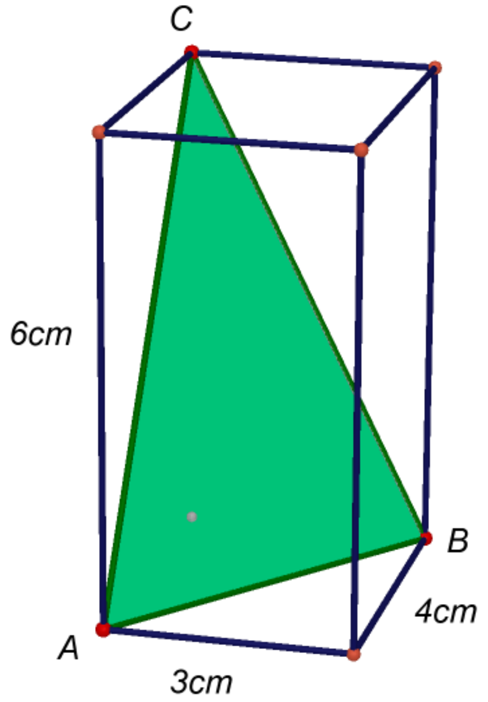
$$x = \frac{\overline{CL}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

2188.- Amb els vèrtexs l'ortoedre de la figura, s'ha dibuixat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

a) Calculeu la mesura dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

b) Calculeu la mesura dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

c) Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$



Solució:

a)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{APC}$

$\overline{AC} = 2\sqrt{13}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AQB}$

$\overline{AB} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BRC}$

$\overline{BC} = 3\sqrt{5}$

b)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 5^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{13} \cdot \cos A.$

$\cos A = \frac{8}{5\sqrt{13}},\;\; A = \arccos\frac{8}{5\sqrt{13}} \approx 63°39'21"$

$5^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{13} \cdot \cos C$

$\cos C = \frac{6}{\sqrt{85}},\;\; C = \arccos\frac{6}{\sqrt{85}} \approx 49°23'55"$

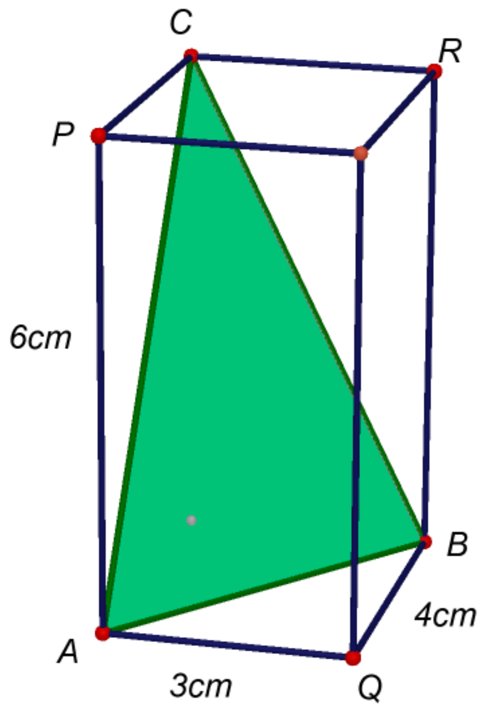
$B = 180° - (A + C) \approx 66°56'44"$

c)

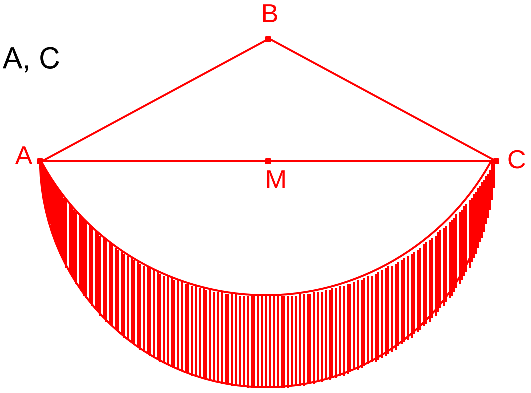
Aplicant la fórmula trigonomètrica:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot sinA$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}2\sqrt{13} \cdot 5 \cdot \sin 63°39'21" \approx 16.16\ cm^2$



2189.- En la figura, $\overline{AB} = \overline{BC} = 17, \overline{AC} = 30$
M és el punt mig del segment $\overline{AC}$
S'han dibuixat dos arcs, un de centre B que passa per A, C
i un altre de diàmetre $\overline{AC}$.
Calculeu l'àrea limitada pels dos arcs (lúnula).



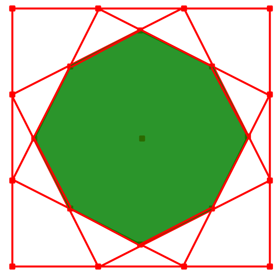
Solució:
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AC} = 30$ és:
$S_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot 15^2 = \frac{225\pi}{2} \approx 353.43$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, utilitzant la fórmula d'Heró és:
$S_{ABC} = \frac{\sqrt{64 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 4}}{4} = 120$

Calculem la mesura de l'angle B, utilitzant el teorema del cosinus:
$30^2 = 17^2 + 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 17 \cdot \cos B$
$\cos B = -\frac{161}{289}$
$B = 123°51'18"$

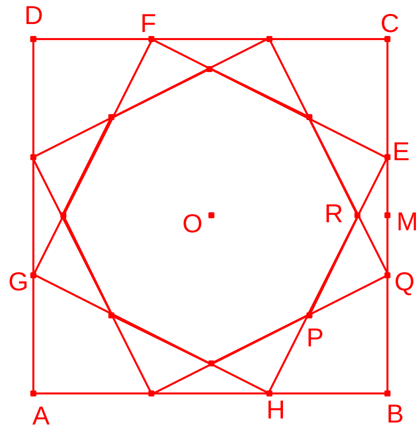
L'àrea del sector de centre B és:
$S_2 = \pi \cdot 17^2 \frac{123°51'18"}{360°} \approx 312.36$

L'àrea ombrejada és igual $S_1 - S_2 + S_{ABC}$
$S_1 - S_2 + S_{ABC} = 353.43 - 312.36 + 120 \approx 161.07$

2190.- La figura mostra dos quadrats iguals a l'interior d'un quadrat més gran.
Els vèrtexs dels dos quadrats menuts divideixen els costats del quadrat gran en tres segments iguals.
Si l'àrea ombrejada és 50, determineu l'àrea del quadrat gran.
Crux Mathematicorum 4449



Solució:
Siga el quadrat gran ABCD de costat $\overline{AB} = 3x$
L'àrea del quadrat ABCD és $S_{ABCD} = 9x^2$
Siga el quadrat menut EFGH.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
$\overline{BH} = \overline{BQ} = \overline{QE} = \overline{CE} = x$, $\overline{BE} = \overline{AH} = 2x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HBE}$
$\overline{HE} = x\sqrt{5}$
Siga $\alpha = \angle BEH$, $tg\alpha = \frac{1}{2}$.
$\angle PRQ = 2\alpha$
$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{4}{3}$$
Siguen $\overline{QR} = 3y, \overline{PQ} = 4y$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$
$\overline{PR} = 5y$
$\overline{PH} = \overline{PQ} = 4y, \overline{ER} = \overline{QR} = 3y$
$\overline{HE} = \overline{PH} + \overline{PR} + \overline{ER} = 12y.$
$\overline{HE} = x\sqrt{5} = 12y$
Elevant al quadrat:
$$x^2 = \frac{144}{5}y^2$$
L'àrea del quadrat EFGH és $S_{EFGH} = 144y^2$

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat EFGH menys l'àrea de 4 triangles $\overset{\Delta}{PQR}$
$$50 = S_{EFGH} - 4 \cdot S_{PQR} = 144y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}3y \cdot 4y$$
$$120y^2 = 50$$
$$y^2 = \frac{5}{12}$$

L'àrea del quadrat ABCD és:
$$S_{ABCD} = 9x^2 = 9 \cdot \frac{144}{5}y^2 = 9 \cdot \frac{144}{5} \cdot \frac{5}{12} = 108$$