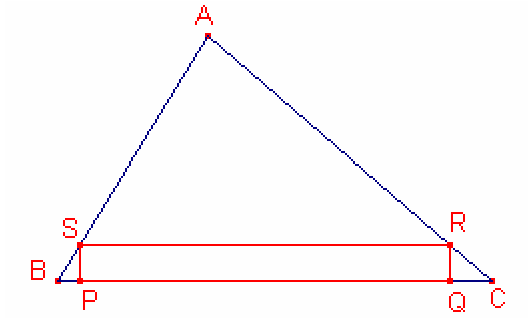
Problemes de Geometria per a l'ESO 22

211.- Donat un triangle inscriviu un rectangle l'àrea del qual siga la quarta part de l'àrea del triangle.

Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Volem inscriure un rectangle PQRS de manera que P, Q estiga sobre el costat $\overline{BC}$, R sobre $\overline{AC}$ i S sobre $\overline{AB}$.
Siga h_a l'altura del triangle sobre el costat $\overline{BC}$.
Siga $x=\overline{PQ}$, $y=\overline{PR}$ costats del rectangle.
El problema quedarà determinat en conéixer l'altura del paral·lelogram.



L'àrea del triangle és $S_{ABC}=\frac{a\cdot h_a}{2}$.
L'àrea del rectangle és $S_{PQRS}=xy$.
L'àrea del rectangle ha de ser la quarta part de l'àrea del triangle. Aleshores:

$$xy=\frac{a\cdot h_a}{8} \qquad (1)$$

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ASR}$. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a}=\frac{h_a-y}{h_a}$. Aïllant x:

$$x=\frac{a}{h_a}(h_a-x) \qquad (2)$$

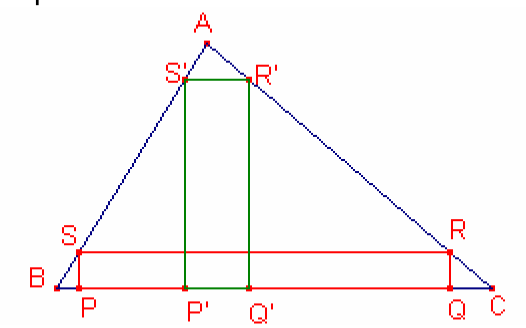
substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$\frac{a}{h_a}(h_a-x)y=\frac{a\cdot h_a}{8}$. Simplificant:

$8y^2-8h_a\cdot y+h_a^2=0$. Resolent l'equació en la incògnita y:

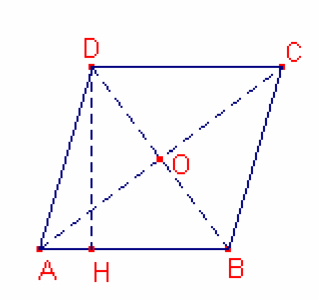
$y=\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}h_a$.

El problema té dues solucions sobre el costat a. Aleshores, el problema té 6 solucions.



212,. Donat el rombe de diagonals 6cm, 8cm, determineu el volum de revolució de la seua rotació de 360º al voltant d'un costat.

Solució:



Siga el rombe ABCD de diagonals $\overline{AC}=8$, $\overline{BD}=6$.
Volem calcular el volum de revolució del rombe al girar 360º al voltant del costat $\overline{AB}$.
El volum de revolució és equivalent a un cilindre d'altura $\overline{AB}$ i radi igual a l'altura del rombe sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{DH}$ altura del rombe.
Calculem el costat i l'altura del rombe.
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars i divideixen el rombe en 4 triangles rectangles iguals.. Siga O la intersecció de les diagonals.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$\overline{AB}=5$.
L'àrea del rombe és:

$$S_{PQRS}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}=\overline{AB}\cdot\overline{DH}.$$

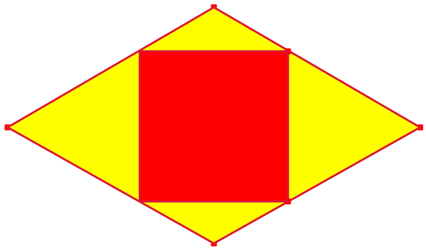
$$\frac{8\cdot 6}{2}=5\cdot\overline{DH}.$$

$$\overline{DH}=\frac{24}{5}.$$

El volum de revolució és:

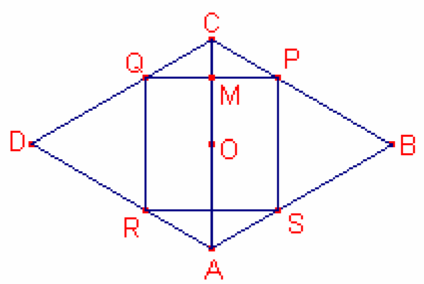
$$V=\pi\left(\frac{24}{5}\right)^2 5=\frac{576\pi}{5}\approx 361'92\text{cm}^3.$$

213.- Siga un rombe de costat 10 i angle agut 60º.
Determineu el costat del quadrat inscrit en el rombe.



Solució:

Siga el rombe ABCD de costat $\overline{AB}=10$, i angle $B=D=60^{o}$.
Siga PQRS el quadrat inscrit en el rombe. Siga $x=\overline{PQ}$ el seu costat.
Per construcció els costats del quadrat són paral·lels a les diagonals del rombe.
Siga O el centre del rombe. Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.



El triangle $\overset{\Delta}{AB}$ és equilàter.

$\angle QPC=30^{o}$. $\overline{PM}=\dfrac{x}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$:

$\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{x}{2}$.

$\overline{AC}=\overline{AB}=10$. $\overline{OC}=5$.

$\overline{OC}=\overline{OM}+\overline{CM}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.

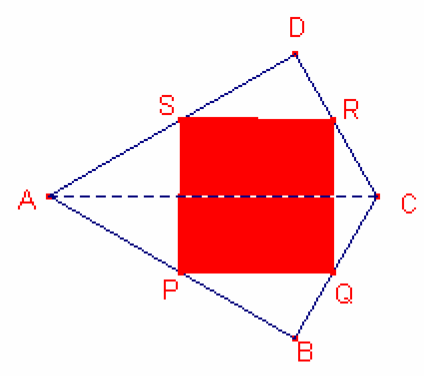
Aleshores, $5=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x\sqrt{3}}{6}$.Resolent l'equació:

$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}10$.

214.- La figura el cometa ABCD està format per dos triangles rectangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}$, $B=90^{o}$, $\overset{\Delta}{ADC}$, $D=90^{o}$, $\overline{BC}=\overline{CD}=10$, $\angle CAD=30^{o}$.

PQRS és un quadrat inscrit al cometa, de costats paral·lels a les diagonals del cometa.

Calculeu el costat del quadrat.



Solució:

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

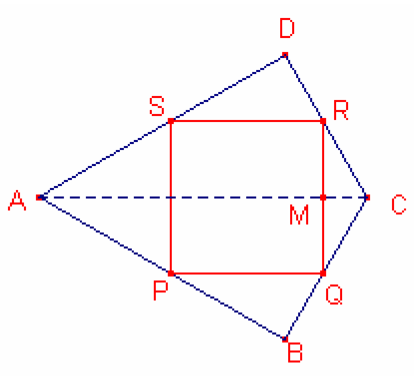
$\overline{AB}=10\sqrt{3}$, $\overline{AC}=20$.

Siga $x=\overline{PQ}$ el costat del quadrat.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SRD}$:

$\overline{DR}=\frac{x}{2}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{QR}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RMC}$:

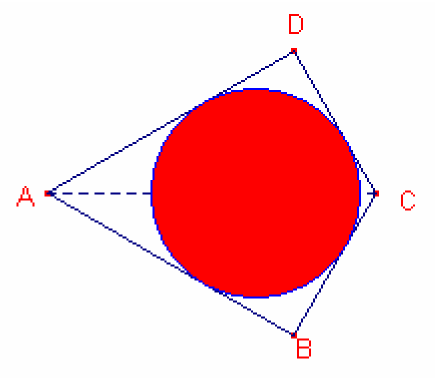
$\overline{CR}=\frac{x}{2\sin 60^{o}}=\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

$\overline{CD}=10$, $\overline{CD}=\overline{DR}+\overline{CR}=\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Aleshores, $\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{3}}{3}=10$.

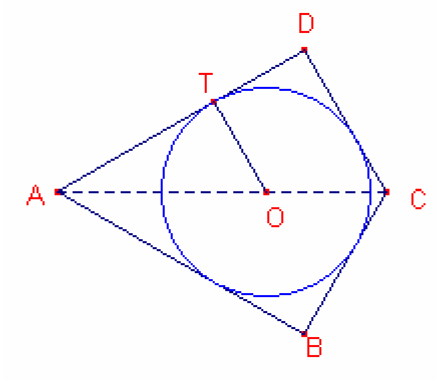
$x=\left(4\sqrt{3}-6\right)10$.

215.- La figura el cometa ABCD està format per dos triangles rectangles iguals $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^o$, $\overset{\Delta}{ADC}$, $D = 90^o$, $\overline{BC} = \overline{CD} = 10$, $\angle CAD = 30^o$.
En el quadrilàter ABCD hi ha inscrita una circumferència
Calculeu el radi de la circumferència.



Solució:

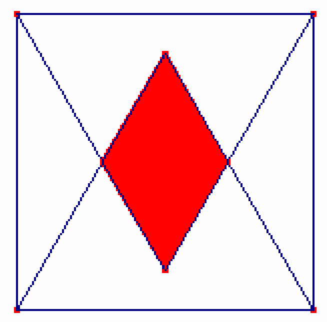
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$\overline{AD} = 10\sqrt{3}$.
Siga O el centre de la circumferència.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AD}$.
$r = \overline{OT}$ el radi de la circumferència.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOT}$:
$\overline{AO} = 2r$, $\overline{AT} = r\sqrt{3}$.
Notem que $\overline{DT} = r$.
$\overline{AD} = r\sqrt{3} + r$.
Aleshores, $r\sqrt{3} + r = 10\sqrt{3}$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{10\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 5\left(3-\sqrt{3}\right).$$

216.- La figura està formada per un quadrat de costat 10 i dos triangles equilàters sobre dos costats oposats que s'intersecten formant un rombe.
Calculeu l'àrea del rombe.

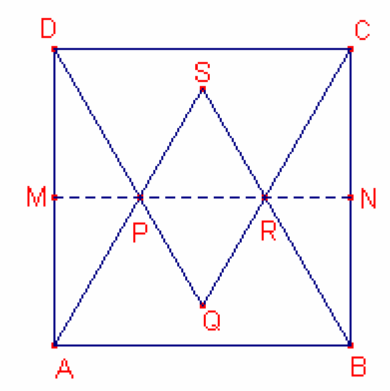


Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 10.

Siga el rombe PQRS format per la intersecció dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{CDQ}$.

El rombe està format per dos triangles equilàters $\overset{\Delta}{PRS}$, $\overset{\Delta}{PRQ}$.

Siga MN la paral·lela mitjana als costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.



Siga $x=\overline{PM}$. $\overline{DM}=5$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPD}$:
$\overline{DP}=2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPD}$:
$(2x)^2=x^2+5^2$. Resolent l'equació:

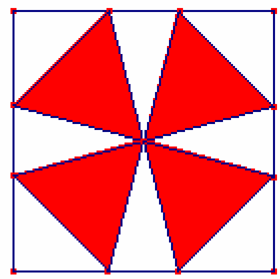
$$x=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{PR}=\overline{AB}-2\cdot\overline{PM}=10-\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

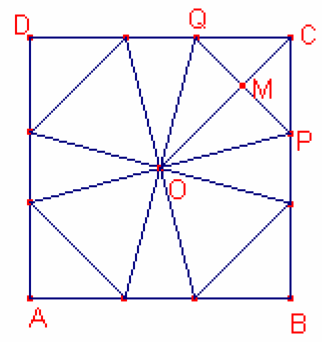
L'àrea el rombe PQRS és:

$$S_{PQRS}=2\cdot S_{PRS}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(10-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

217.- En la figura el quadrat té costat 10 els quatre triangles són equilàters i iguals.
Calculeu l'àrea dels quatre triangles.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat 10 i centre O.



Siga $\overset{\Delta}{OPQ}$ un dels quatre triangles equilàters.
Siga $x=\overline{PQ}$ costat del triangle equilàter.
Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

$\overline{PM}=\frac{x}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$\overline{OM}=\frac{x\sqrt{3}}{2}$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{CM}=\overline{PM}=\frac{x}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$\overline{AC}=10\sqrt{2}$.

$\overline{OC}=\frac{\overline{AC}}{2}=5\sqrt{2}$.

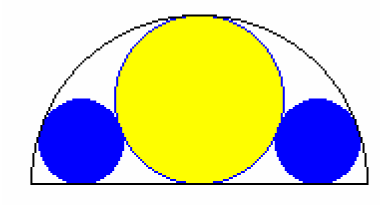
$\overline{OC}=\overline{OM}+\overline{CM}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}x$.

Aleshores, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}x=5\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

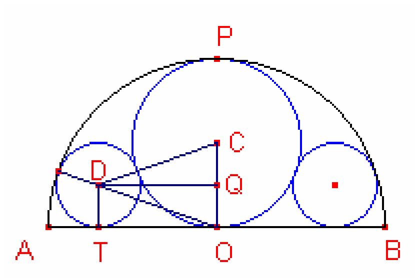
$x=5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

L'àrea del quatre triangles és:

$$S=4\cdot S_{OPQ}=4\cdot\left(5\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=100\left(2\sqrt{3}-3\right).$$



218.- Dins d'una semicircumferència de diàmetre 20 s'han dibuixat 3 circumferències tangents dos a dos i tangent al diàmetre i a la semicircumferència.
Determineu el radi de les tres circumferències.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 2R$ el diàmetre de la semicircumferència.
Siga O el seu centre.
Siga C en centre de la circumferència central.
El seu radi és $\overline{CO} = \frac{R}{2}$.
Siga D el centre d'una de les circumferències menudes.
Siga T el punt de tangència d'aquesta circumferència i el diàmetre $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de D sobre $\overline{OC}$.
Siga $r = \overline{DT}$, radi de la circumferència menuda.
Siga $x = \overline{OT} = \overline{QD}$.

$\overline{CD} = r + \frac{R}{2}$, $\overline{OD} = R - r$.

$\overline{CQ} = \frac{R}{2} - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQD}$:

$\left(r + \frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 + x^2$. Simplificant:

$$x^2 = 2Rr \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTD}$:

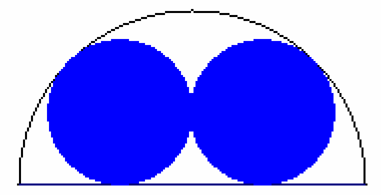
$(R - r)^2 = r^2 + x^2$. Simplificant:

$$x^2 = R^2 - 2Rr \qquad (2)$$

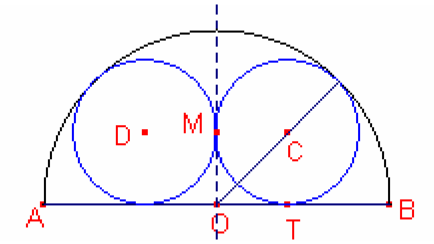
Igualant les expressions (1) (2):

$2Rr = R^2 - 2Rr$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{R}{4}$.



219.- Dins d'una semicircumferència de diàmetre 20 s'han dibuixat 2 circumferències iguals tangents dos a dos i tangent al diàmetre i a la semicircumferència. Determineu el radi de les tres circumferències.
Sangaku.

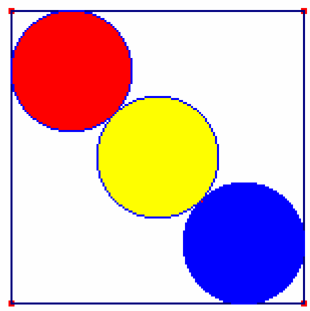


Solució:

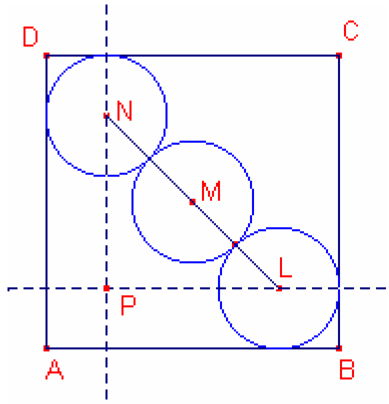
Siga $\overline{AB} = 2R$ el diàmetre de la semicircumferència.
Siga O el seu centre.
Siga C en centre de la circumferència central.
Siga T el punt de tangència d'una circumferència i el diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $\overline{CT} = r$ el radi de les circumferències.
La recta CD és paral·lela al diàmetre $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{CD} = 2r$.
$\overline{CM} = \overline{TO} = r$.
$\overline{OC} = R - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:
$(R-r)^2 = r^2 + r^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:
$r = \left(-1+\sqrt{2}\right)R$.

220.- En un quadrat de costat 10 s'han dibuixat 3 circumferències iguals.
Calculeu el radi de les tres circumferències.
Sangaku



Solució.
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen L, M, N els centres de les tres circumferències.
Siga la recta perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per N
Siga la recta perpendicular al costat $\overline{AD}$ que passa per L.
Siga P la intersecció de les rectes anteriors.
Siga r el radi de les tres circumferències.



$\overline{LN} = 4r$.
$\overline{LP} = \overline{NP} = c - 2r$.

Aplicant el teorema e Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPN}$:
$(4r)^2 = 2(c - 2r)^2$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$$r = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)c.$$