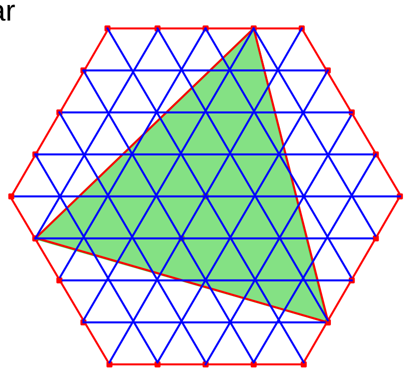
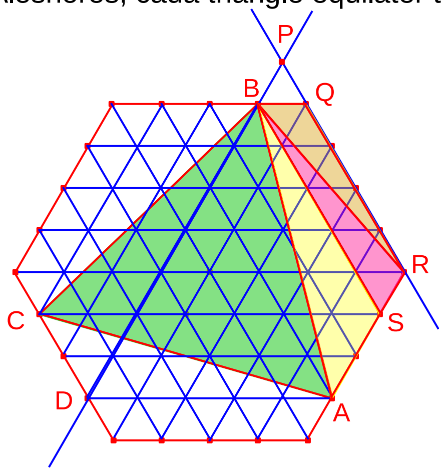
Problemes de Geometria per a l’ESO 220

2191.- Un triangle equilàter està inscrit en un hexàgon regular com el que mostra la figura.
L’àrea de l’hexàgon regular és 96.
Determineu l’àrea del triangle.
Crux Mathematicorum MA21



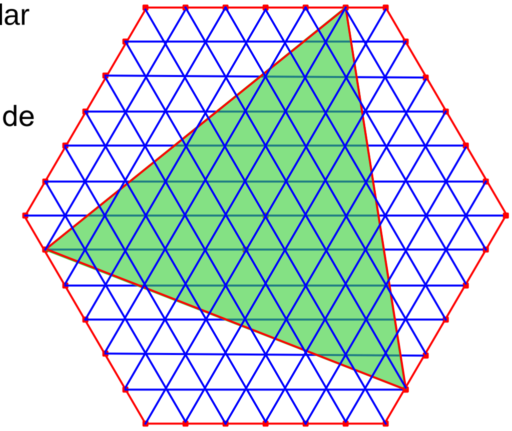
Solució:
Notem que cada costat de l’hexàgon regular està dividit en 4 parts iguals.
El total de triangles iguals formats és:
$T = 6(1 + 3 + 5 + 7) = 96$
Aleshores, cada triangle equilàter té àrea 1



Les rectes DB, QR es tallen en el punt P formant el paral·lelogram BPRS d’area 10
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$ és la meitat de l’àrea del paral·lelogram BPRS.
$S_{BRS} = 5$
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BQR}$ és la meitat de l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$ menys 1
$S_{BQR} = 4$
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BSA}$ és el doble de l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$.
$S_{BSA} = 10$

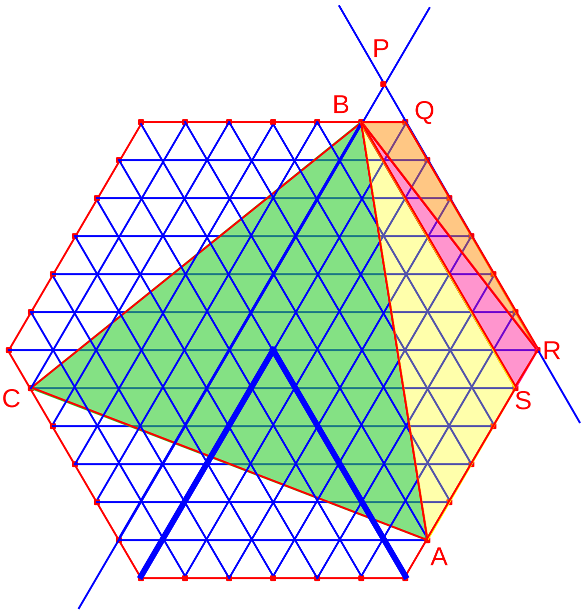
L’àrea del quadrilàter BQRA és:
$S_{BQRA} = S_{BQR} + S_{BRS} + S_{BSA} = 4 + 5 + 10 = 19.$
L’àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l’àrea de l’hexàgon regular menys tres vegades l’àrea del quadrilàer BQRA:
$S_{ABC} = 96 - 3 \cdot 19 = 39$

Generalització:



Un triangle equilàter està inscrit en un hexàgon regular com el que mostra la figura.
Cada costat s'ha dividit en n parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea del triangle i l'àrea de l'hexàgon regular.

Solució:



Calculem e nombre de triangle $T_n$equilàters que té l'hexàgon regular.
$T_n = 6(1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) = 6n^2$

L'àrea del paral·lelogram BPRS és:
$S_{BPRS} = 2n.$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$ és la meitat de l'àrea del paral·lelogram BPRS.
$S_{BRS} = n + 1$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BQR}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$ menys 1
$S_{BQR} = n$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BSA}$ és el $n - 2$ vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BRS}$.
$S_{BSA} = (n + 1)(n - 2)$

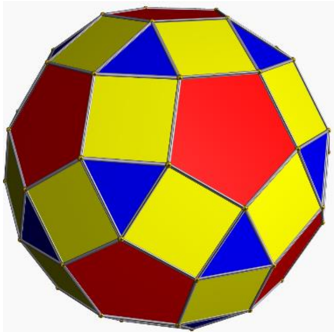
L'àrea del quadrilàter BQRA és:
$S_{BQRA} = S_{BQR} + S_{BRS} + S_{BSA} = n + n + 1 + (n + 1)(n - 2) = n^2 + n - 1.$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a l'àrea de l'hexàgon regular menys tres vegades l'àrea del quadrilàer BQRA:
$S_{ABC} = 6n^2 - 3(n^2 + n - 1) = 3n^2 - 3n + 3 = 3(n^2 - n + 1)$

La proporció entre l'àrea del triangle equilàter i l'hexàgon regular és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{Hexàgon}} = \frac{3(n^2 - n + 1)}{6n^2} = \frac{n^2 - n + 1}{2n^2}$$

2192.- El rombicosidodecàedre és un políedre arquimedià que té 62 cares que són 30 quadrats 12 pentàgons regulars i 20 triangles equilàters
Determineu el nombre de vèrtexs.



Solució:
El rombicosidodecàedre és un políedre convex per tant compleix la fórmula d'Euler:
El nombre de cares mes el nombre de vèrtexs és igual al nombre d'arestes més 2.
$C + V = A + 2$

Les arestes estan formades per la intersecció de dos costats dels poliedres que formen les cares. Aleshores el nombre d'arestes és igual a la meitat del nombre de costats que formen els polígons que formen les cares.

$$A = \frac{4 \cdot 30 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 20}{2} = 120$$

$$62 + V = 120 + 2$$

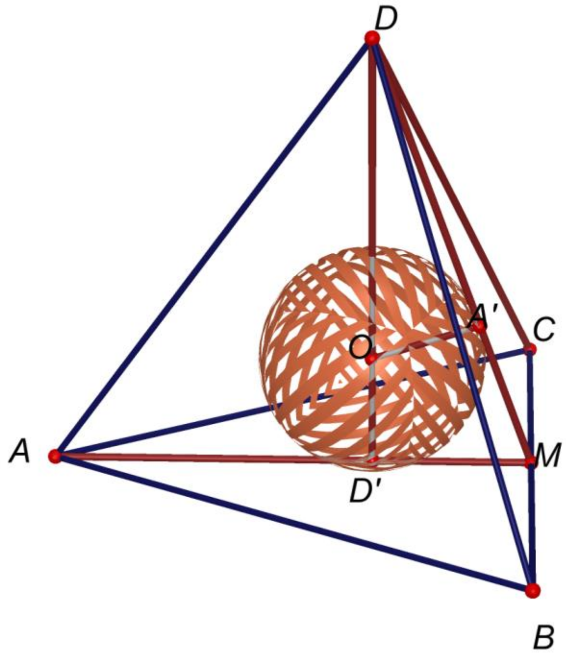
Resolent l'equació: $V = 60$
El rombicosidodecaedre té 60 vèrtexs.

2193.- El radi de l'esfera inscrita a un tetràedre regular és r. Determineu la seua altura.

Solució:
Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga D' la projecció de D sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga O el centre de l'esfera.
Siga M el punt mig de l'aresta BC.

Siga A' la projecció de A sobre la cara $\overset{\Delta}{BCD}$



$r = \overline{OD'} = \overline{OA'}$

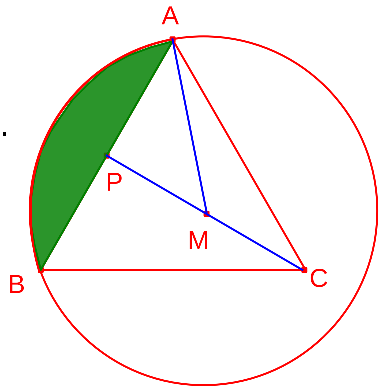
D' és el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$
A' és el baricentre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$

Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{AD'} = 2 \cdot \overline{D'M}$
$\overline{AM} = 3 \cdot \overline{D'M}$
Siga $h = \overline{DD'} = \overline{AA'}$ altura del tetraedre

Siga $\overline{DM} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DD'M}$
$(3x)^2 = x^2 + h^2$
$x^2 = \frac{1}{8}h^2$
$\overline{OD} = h - r$
$\overline{DA'} = 2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OA'D}$
$(h-r)^2 = r^2 + (2x)^2$
$h^2 - 2hr = 4x^2$
$h = 4r$

2194.- Considerem la següent figura.



$\overset{\Delta}{ABC}$ és u n triangle equilàter de costat 1 m.
P és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
L'arc de circumferència $\widehat{AB}$ té centre M, el punt mig del segment $\overline{CP}$.

a) Calculeu la mesura del segment $\overline{AM}$
b) Determineu la mesura de l'angle $\angle AMP$
c) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

Solució:
a)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{CP} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

b)
Siga $\alpha = \angle AMP$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

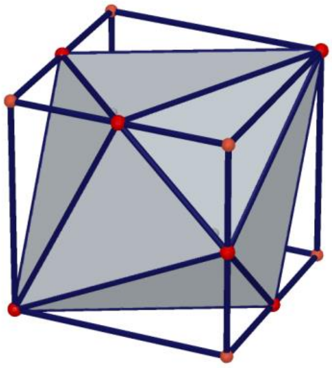
$$tg\ \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 49°6'24"$$

c)
$2\alpha = \angle AMB = 98°12'48"$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del sector de radi $\overline{AM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, angle $2\alpha = 98°12'48"$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMB}$

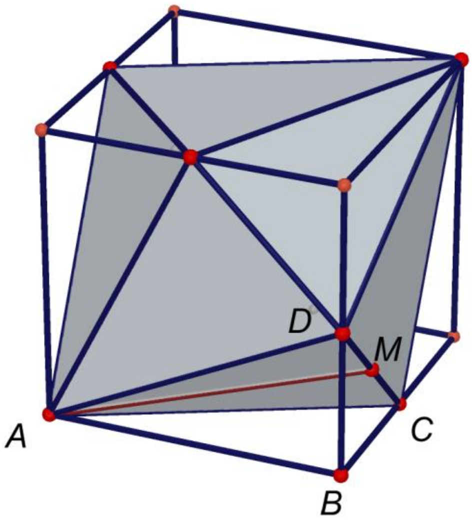
$$S = \frac{98°12'48}{360°}\pi\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.1585\ \mathrm{m}^2$$

2195.- A l'interior d'un cub s'ha inscrit una dipiràmide hexagonal regular.
Determineu la proporció entre els volums de la dipiràmide i el cub.
Determineu la proporció entre les àrees de la dipiràmide i el cub



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del cub.
El volum del cub és
$V_{cub} = a^3$
L'àrea del cub és
$S_{cub} = 6a^2$

El volum de la dipiràmide és igual al volum del cub menys 6 tetràedres ABCD.
$$V_{dipiràmide} = a^3 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a^3$$



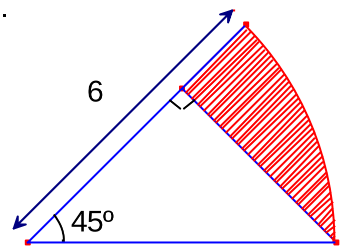
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$
$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

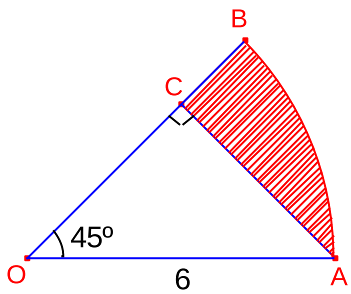
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACM}$
$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$$

L'àrea de la dipiràmide és igual a 12 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$
$$S_{dipiràmide} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{9}{2}a^2$$
La proporció entre els volums és:
$$\frac{V_{dipiràmide}}{V_{cub}} = \frac{3}{4}$$
La proporció entre les àrees és
$$\frac{S_{dipiràmide}}{S_{cub}} = \frac{\frac{9}{2}a^2}{6a^2} = \frac{3}{4}$$

2196.- Calculeu l’àrea de la regió ratllada.



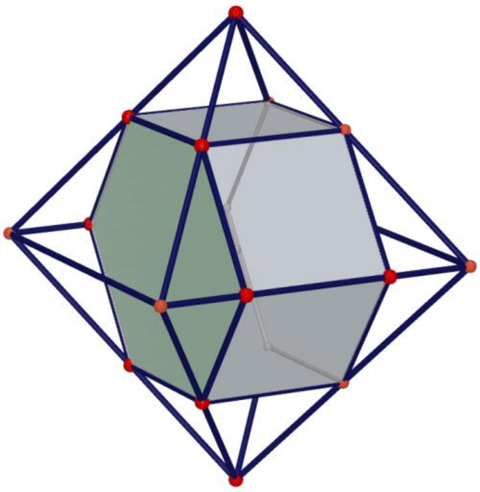


Solució
Siga O el centre del sector.
$\overline{OA} = \overline{OB} = 6$
El triangle $\overset{\Delta}{OCA}$ és rectangle i isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{OC} = AC = 3\sqrt{2}$

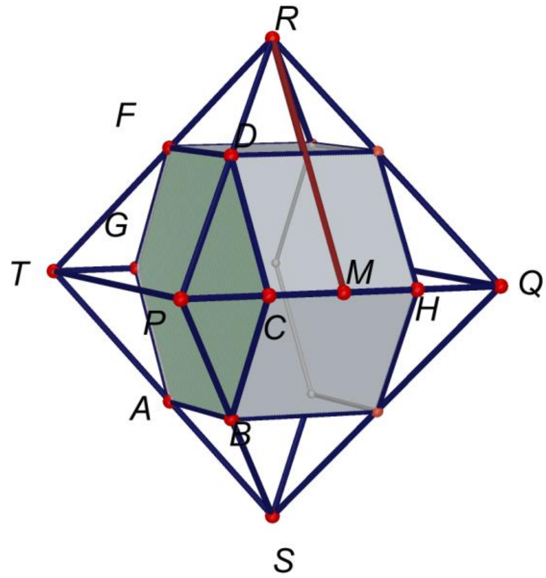
L’àrea ratllada és igual a l’àrea de l’octant menys l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCA}$

$$S = \frac{1}{8}\pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{2} - 9$$

2197.- En un octàedre regular s'ha inscrit un prisma hexagonal recte que té totes les arestes iguals.
Determineu la proporció entre els volums del prisma i octàedre.
Nota: el prisma hexagonal no és regular.



Solució:
Siga l'octàedre regular d'aresta $\overline{PQ} = a$
Siga $ABCDEFG$ la base del prisma.
Siga $\overline{CD} = \overline{CH} = x$, arestes del prisma.
Notem que totes les arestes són iguals.



$\overline{PC} = \frac{a-x}{2}$. $\angle DPC = 60°$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCD}$,

$$\frac{x}{\frac{a-x}{2}} = \sqrt{3}$$

Resolent l'equació, $x = (2\sqrt{3} - 3)a$

Notem que $TSQR$ és un quadrat de costat a
$\overline{RS} = a\sqrt{2}$

El volum de l'octàedre és

$$V_{octàedre} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

Calculem l'àrea de la base del prisma:
$\overline{CG} = a, \overline{AB} = \overline{FC} = (2\sqrt{3} - 3)a$, aleshores, la base no és un hexàgon regular.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMR}$ $\overline{MR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Els triangles $\overset{\Delta}{BCD}, \overset{\Delta}{SMR}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MR}}$$

$\frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Aleshores, $\overline{BD} = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

$$S_{ABCDEFG} = 2 \cdot S_{CDFG} = \frac{\overline{CG} + \overline{DF}}{2}\overline{BD} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{2}(4\sqrt{2} - 2\sqrt{6})a^2 = (6\sqrt{6} - 10\sqrt{2})a^2$$

El volum del prisma és:

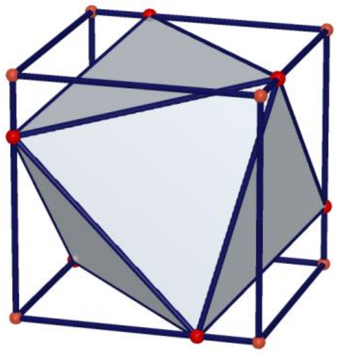
$$V_{prisma} = (6\sqrt{6} - 10\sqrt{10})(2\sqrt{3} - 3)a^3 = (66\sqrt{2} - 38\sqrt{6})a^3$$

La proporció entre els volums és

$$\frac{V_{prisma}}{V_{octàedre}} = \frac{66\sqrt{2} - 38\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 6(33 - 19\sqrt{3})$$

2198.- En un cub d’aresta a s’ha inscrit un octàedre regular amb vèrtexs amb sis arestes del cub (veure figura).

a) Calculeu l’aresta de l’octàedre.
b) Calculeu la proporció entre els volums de l’octàedre i el cub.



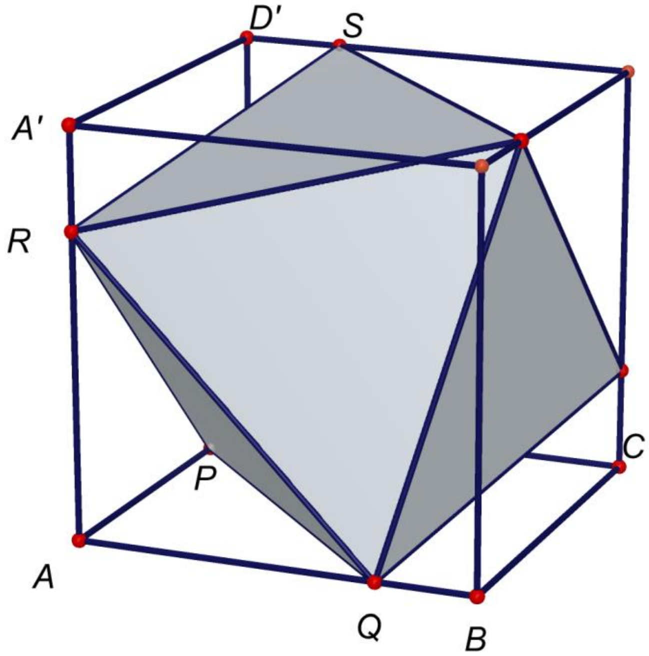
Solució.

Siga $\overline{AB} = a$, aresta del cub.

Siga $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{AR} = x$

L’àresta de l’octàedre regular és

$\overline{PQ} = x\sqrt{2}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'D'S}$

$\overline{A'S} = \sqrt{a^2 + (a - x)^2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RA'S}$

$\overline{RS} = \sqrt{a^2 + 2(a - x)^2}$

Igualant les arestes:

$\sqrt{a^2 + 2(a - x)^2} = x\sqrt{2}$

Resolent l’equació:

$x = \frac{3}{4}a$

L’aresta de l’octàedre és:

$\overline{PQ} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$

El volum del cub és

$V_{cub} = a^3$

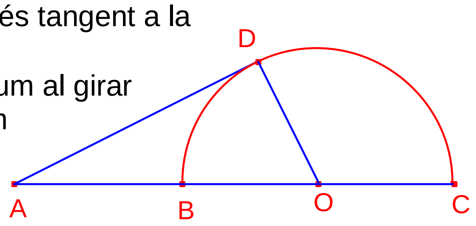
El volum de l’octàedre és:

$$V_{octàedre} = \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{PQ}^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^3 = \frac{9}{16}a^3$$

La proporció entre els volums és

$$\frac{V_{octàedre}}{V_{cub}} = \frac{9}{16}$$

2199.- En la figura, A, B, O i C estan alineats, $\overline{AO} = 4$, $\overline{AD}$ és tangent a la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$.



Determineu el radi de la semicircumferència a fi que el volum al girar la semicircumferència sobre el diàmetre siga igual al volum engendrat pel triangle $\overset{\Delta}{AOD}$ al girar al voltant del radi $\overline{OD}$.

Solució:
Siga $r = \overline{OD}$ radi de la semicircumferència.
El cos generat per la semicircumferència al girar sobre el diàmetre és l'esfera de radi r.
El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Per ser $\overline{AD}$ és tangent a la semicircumferència $\angle ADO = 90°$

El cos generat pel triangle $\overset{\Delta}{AOD}$ al girar al voltant del radi $\overline{OD}$ és el con recte de radi $\overline{OD}$ i altura $\overline{OD}$
El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot \overline{OD}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:
$\overline{AD}^2 = 4^2 - r^2$
El volum del con és:

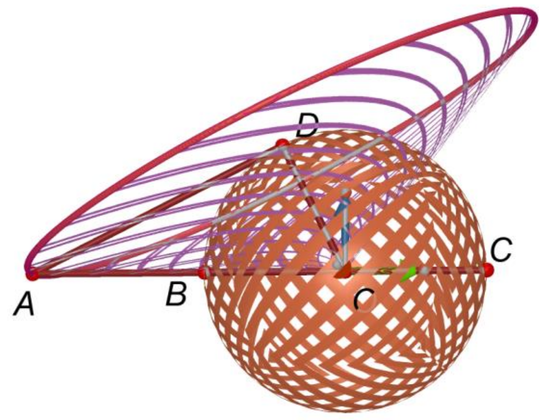
$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi(16 - r^2)r$$

El volum de l'esfera i el con són iguals, aleshores:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi(16 - r^2)r$$

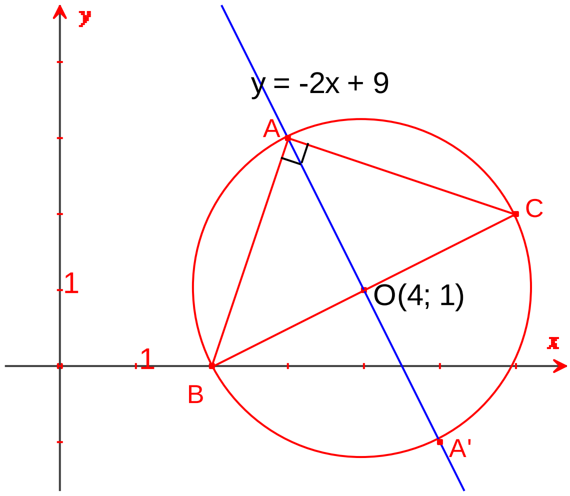
Simplificant:
$4r^2 = 16 - r^2$.
Resolent l'equació:

$$r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$



2200.- Les coordenades d'un triangle rectangle isòsceles son $B(2,0), C(6,2)$.
Determineu les coordenades del vèrtex de l'angle recte, sabent que són positives.

Solució:



El vèrtex A corresponent a l'angle recte es la intersecció de la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$ i la mediatriu del diàmetre.

El centre O de la circumferència és el punt mig del segment $\overline{BC}$.
Les seues coordenades són $O(4, 1)$
El radi de la circumferència és $r = \sqrt{(2-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

El pendent de la recta hipotenusa BC és
$m = \frac{2-0}{6-2} = \frac{1}{2}$
El pendent de la recta mediatriu al segment $\overline{BC}$ és -2
L'equació de la recta mediatriu és:
$y = -2(x-4) + 1$
$y = -2x + 9$

Un punt de la mediatriu té coordenades $X(x, -2x + 9)$

La distància de O a X ha de ser $\sqrt{5}$

$\sqrt{(x-4)^2 + (-2x+8)^2} = \sqrt{5}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$x^2 - 8x + 5 = 0$
Resolent l'equació $x = 3, 5$
Els punts solució són:
$A(3, 3), A'(5, -1)$.
La solució del problema és $A(3, 3)$ que està en el primer quadrant.