2201.- Un quadrat s'ha dividit en 9 quadrats iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea d'un cercle i l'àrea de l'el·lipse.
En la figura, l'el·lipse és tangent a les circumferències.
Sangaku, Temple Kon'noh Hachiman, Tokyo

Solució:
Siga m el costat del quadrat.
El diàmetre del cercle és $\frac{m}{3}$
L'àrea del cercle és:

$$S_{cercle} = \pi \frac{m^2}{36}$$

El semieixos de l'el·lipse són:

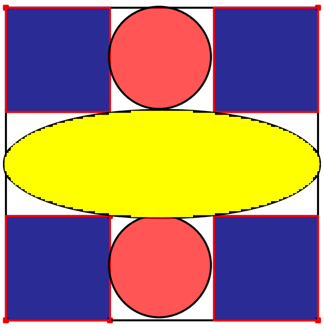
$$a = \frac{m}{2}, b = \frac{m}{6}$$

L'àrea de l'el·lipse és:

$$S_{el\cdot lipse} = \pi ab = \pi \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{6} = \pi \frac{m^2}{12}$$

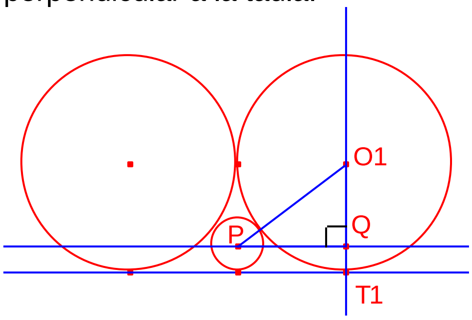
La proporció entre l'àrea del cercle i de l'el·lipse és:

$$\frac{S_{cercle}}{S_{el\cdot lipse}} = \frac{\pi \frac{m^2}{36}}{\pi \frac{m^2}{12}} = \frac{1}{3}$$



2202.- Dues esferes tangents d'igual radi R estan damunt d'una taula.
Quin és el radi més gran de l'esfera que pot passar entre les dues esferes per damunt de la taula.
Sangaku, Temple Kon'noh Hachiman, Tokyo. 1846

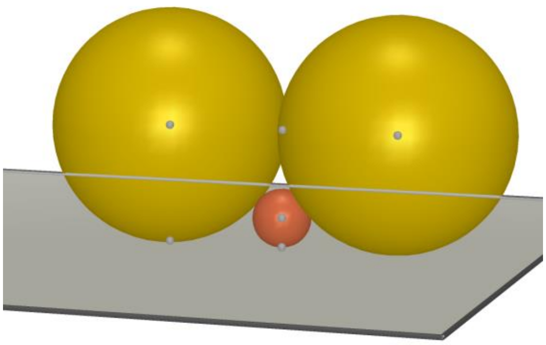
Solució.
Siga r el radi de l'esfera màxima.
Aquesta esfera serà tangent a les esferes de radi R.
Els centres de les tres esferes estan en el mateix plànol.
Considerem la secció formada pel plànol que passa per les dues esferes de radi R i perpendicular a la taula.



Siga O1 el centre de l'esfera de la dreta.
Siga P el centre de l'esfera menuda.
Siga T1 el punt de tangència de l'esfera de centre O1 i la taula.
Siga Q la projecció de P sobre la recta O1T1.

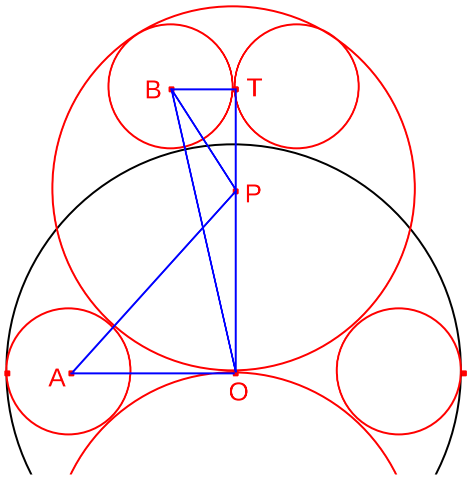
$\overline{PQ} = R, \overline{PO1} = R + r, \overline{QO1} = R - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO1}$:
$(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2$
Simplificant:
$4Rr = R^2$
$r = \frac{1}{4}R$



2203.- El sangaku de la dreta està format per 9 circumferències.
Dues roges d'igual radi tangents exteriors.
Una groga.
Sis blanques d'igual radi tangents a les anteriors.
Calculeu la proporció entre els radis de les circumferències.
Sangaku, Temple Kon'noh Hachiman, Tokyo

Solució:
Siga P el centre d'una de les circumferències roges i R_1 el seu radi.
Siga O el centre de la circumferència central i R_2 el seu radi.
Siga B el centre d'una de les circumferències blanques i r el seu radi.



$\overline{AP} = R_1 + r, \overline{OP} = R_1, \overline{OA} = R_2 - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$

$(R_1 + r)^2 = (R_2 - r)^2 + {R_1}^2$

Simplificant:

$2R_1 \cdot r = {R_2}^2 - 2R_2 \cdot r$ (1)

$\overline{OB} = R_2 + r, \overline{BT} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTO}$

$\overline{OT} = \sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r}$

$\overline{PT} = \sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r} - R_1, \overline{PB} = R_1 - r, \overline{BT} = r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTP}$

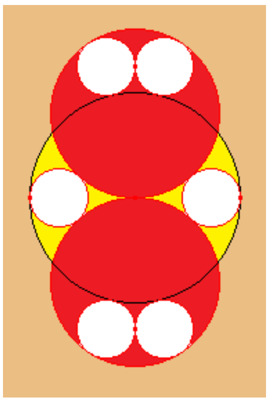
$(R_1 - r)^2 = r^2 + \left(\sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r} - R_1\right)^2$

Simplificant:

$-2R_1 \cdot r = {R_2}^2 + 2R_2 \cdot r - 2R_1\sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r}$ (2)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2) i simplificant:

$2R_1\sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r} = 2{R_2}^2$ (3)



Multipliquem l'expressió (3) per r:

$2R_1 \cdot r\sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r} = 2{R_2}^2 \cdot r$ (4)

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (4) i simplificant:

$(R_2 - 2r)\sqrt{{R_2}^2 + 2R_2 \cdot r} = 2R_2 \cdot r$ (5)

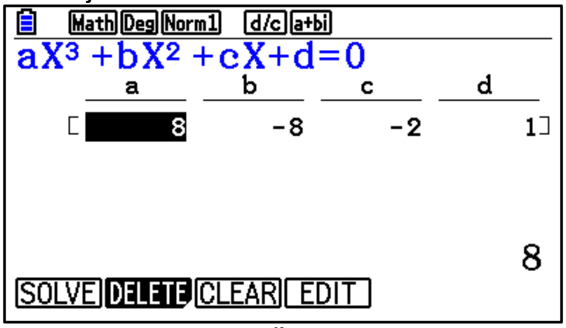
Elevant al quadrat i simplificant:

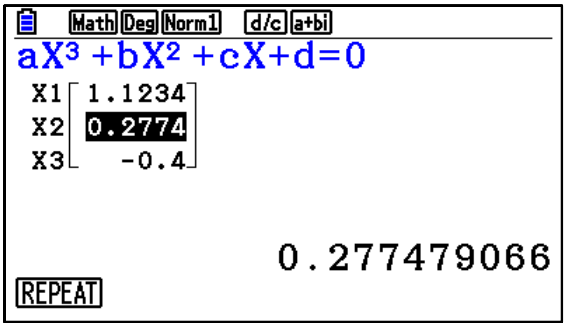
$8R_2 \cdot r^3 - 8{R_2}^2 \cdot r^2 - 2{R_2}^3 \cdot r + {R_2}^4 = 0$ (6)

Dividint l'expressió (6) per ${R_2}^4$:

$$8\left(\frac{r}{R_2}\right)^3 - 8\left(\frac{r}{R_2}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R_2}\right) + 1 = 0$$

Amb ajut de la calculadora:

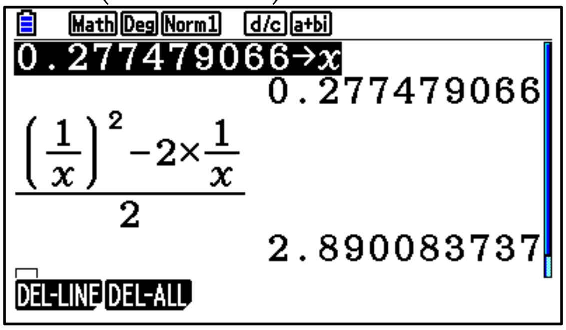


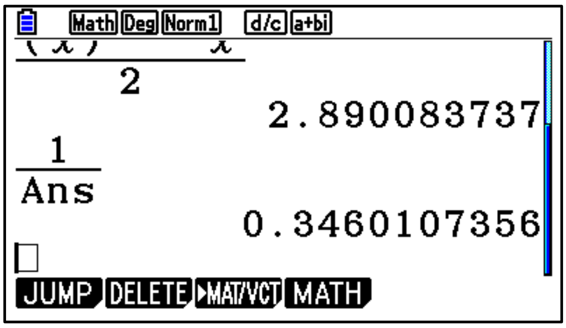


Resolent l'equació: $\frac{r}{R_2} \approx 0.277479066$

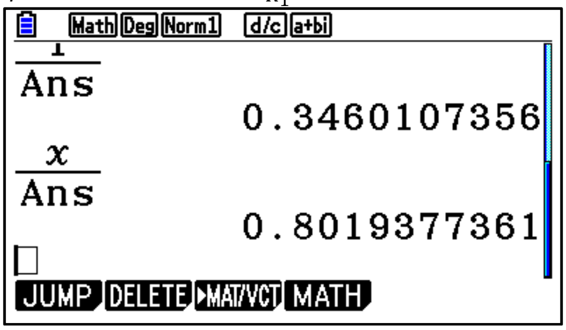
Dividint l'expressió (1) $2R_1 \cdot r = {R_2}^2 - 2R_2 \cdot r$ per r^2

$$\frac{R_1}{r} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R_2}{r}\right)^2 - 2\frac{R_2}{r}\right)$$





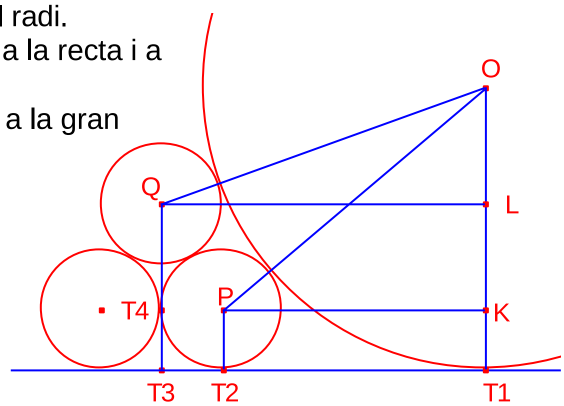
$\frac{R_1}{r} \approx 2.890083737$, $\frac{r}{R_1} \approx 0.3460107356$



$$\frac{R_1}{R_2} \approx 0.8019377361$$

2204.- En la figura, hi ha 3 circumferències tangents dos a dos, d'igual radi r i dues tangents a una recta. Una circumferència gran de radi R, es tangent a dues de les anteriors i tangent a la recta.
Calculeu la proporció entre el radis d'una menuda i de la gran.
Sangaku, Temple Suwa, Nagano. 1879

Solució:
Siga O el centre de la circumferència gran i $\overline{OT_1} = R$ el radi.
Siga P el centre de la circumferència menuda tangent a la recta i a la circumferència gran, $\overline{PT_2} = r$ el radi.
Siga Q el centre de la circumferència menuda tangent a la gran i a les dues inferiors.



Siga T_3 la projecció de Q sobre la recta.
Siga T_4 el punt de tangència de les circumferències inferiors.
Siga K la projecció de P sobre $\overline{OT_1}$
Siga L la projecció de Q sobre $\overline{OT_1}$

Siga $x = \overline{T_1T_2}$. $\overline{OK} = R - r, \overline{OP}R + r$

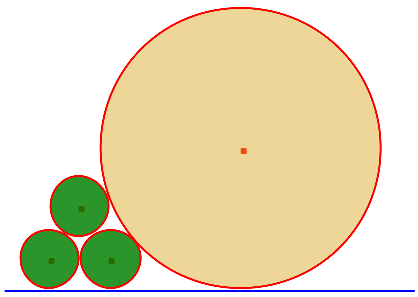
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKO}$
$(R + r)^2 = x^2 + (R - r)^2$. Simplificant:
$4Rr = x^2$ (1)

Els centres de les tres circumferències iguals formen un triangle equilàter de costat $2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QT_4P}$
$\overline{QT_4} = r\sqrt{3}$, $\overline{QT_3} = r(1 + \sqrt{3})$

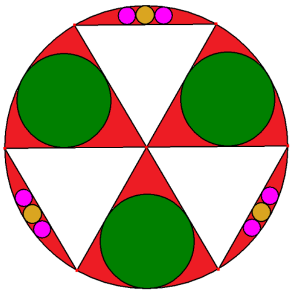
$\overline{QL} = x + r, \overline{OL} = R - (1 + \sqrt{3})r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLO}$
$(R + r)^2 = (x + r)^2 + \left(R - (1 + \sqrt{3})r\right)^2$. Simplificant:
$2Rr = x^2 + 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$
Substituint l'expressió (1) en l'expressió anterior i simplificant:
$-2Rr = 2xr + (4 + 2\sqrt{3})r^2 - 2(1 + \sqrt{3})Rr$
$x = R\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})r$ (2)
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):
$4Rr = \left(R\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})r\right)^2$. Simplificant:
$(7 + 4\sqrt{3})r^2 + (-10 - 4\sqrt{3})Rr + 3R^2 = 0$
$r^2 + (-22 + 12\sqrt{3})Rr + (21 - 12\sqrt{3})R^2 = 0$
$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + (-22 + 12\sqrt{3})\frac{r}{R} + (21 - 12\sqrt{3}) = 0$
Resolent l'equació:
$\frac{r}{R} = 21 - 12\sqrt{3}$



2205.- En la figura hi ha una circumferència exterior de radi R, tres triangle equilàters, tres circumferències tangent al costat de dos triangles i a la circumferència exterior, tres circumferències tangents al punt mig del triangle equilàter i tangent a la circumferència exterior, sis circumferències cadascuna tangent a dos circumferències i al costat del triangle. Calculeu el radi dels tres tipus de circumferències.

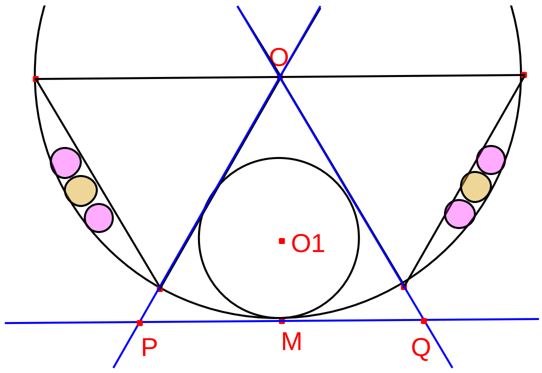
Sangaku, Temple Suwa Nagano. 1879



Solució:

Siga O el centre de la circumferència exterior de radi R.

Considerem O_1 el centre de la circumferència tangent en M a la circumferència exterior.



La circumferència està inscrita en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$

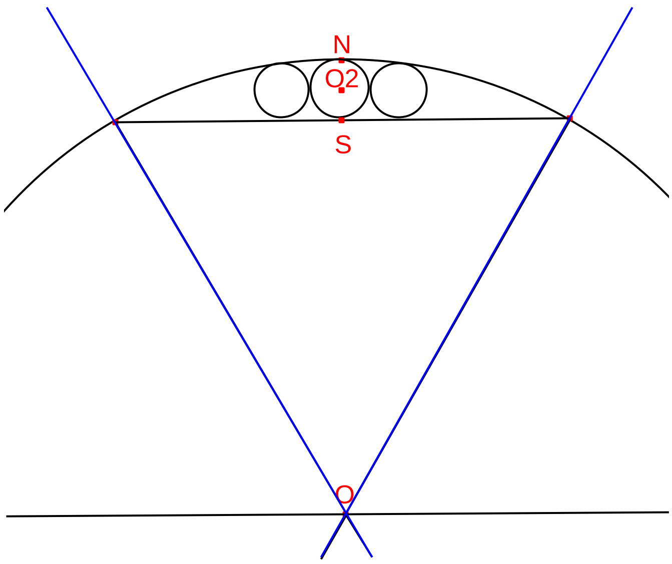
El radi és $\overline{O_1M} = \frac{1}{3}\overline{OM} = \frac{1}{3}R$

Siga O_2 el centre de la circumferència tangent al punt mig S del costat del triangle i al punt N de la circumferència exterior.

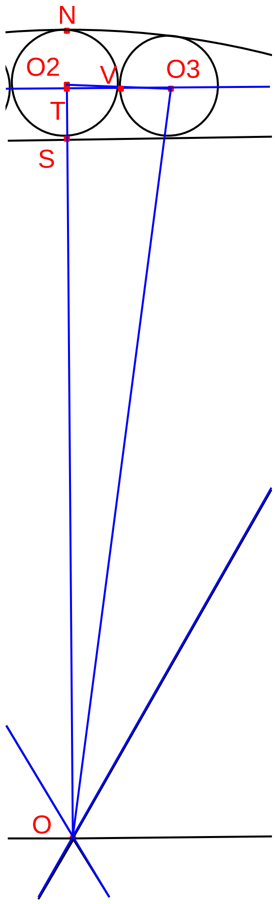
$\overline{OS} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$

El radi de és:

$$\overline{O_2S} = \frac{R - \overline{OS}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}R$$



Siga O_3 el centre de la circumferència tangent a les dues circumferències i al costat del triangle.
Siga V el punt de tangència de dues circumferències.
Siga T la projecció de O_3 sobre $\overline{OO_2}$
Siga $\overline{O_3V} = s$ radi de la circumferència.



$\overline{O_2O_3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}R + s$, $\overline{O_2T} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} - s$

$$\overline{OT} = \overline{OS} + s = \frac{\sqrt{3}}{2}R + s$$

$$\overline{OO_3} = R - s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O_2\overset{\Delta}{T}O_3$

$$\overline{TO_3}^2 = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}R + s\right)^2 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}R - s\right)^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O\overset{\Delta}{T}O_3$

$$\overline{TO_3}^2 = (R-s)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R + s\right)^2$$

Igualant ambdues expressions:

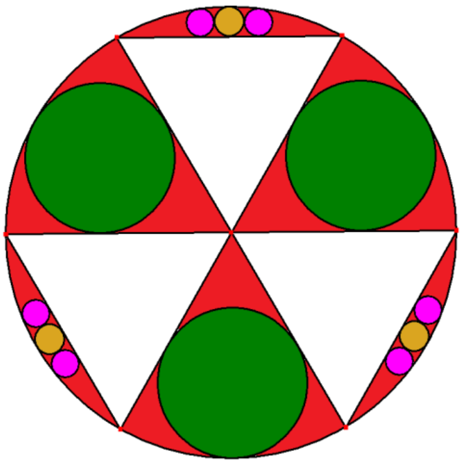
$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}R + s\right)^2 - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}R - s\right)^2 = (R-s)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R + s\right)^2$$

Simplificant:

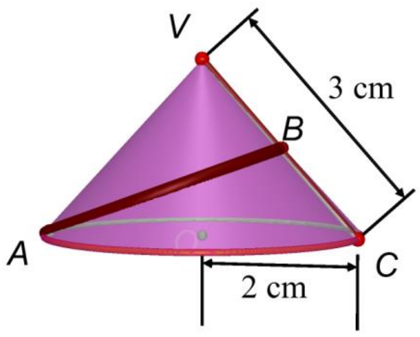
$$4Rs = \frac{1}{4}R^2$$

Resolent l'equació:

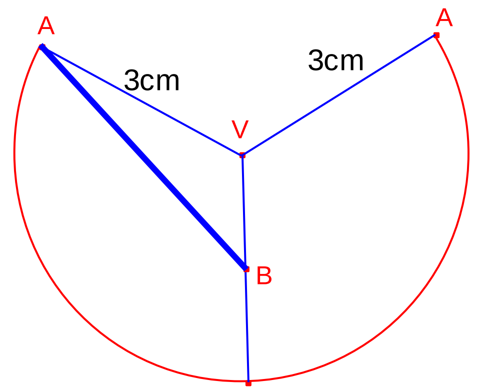
$$s = \frac{1}{16}R$$



2206.- Siga el con massís de diàmetre $\overline{AC} = 4\ cm$, vèrtex V i generatriu $\overline{CV} = 3\ cm$
Siga B el punt mig de la generatriu $\overline{CV}$
Quina és la mínima distància entre A i B.



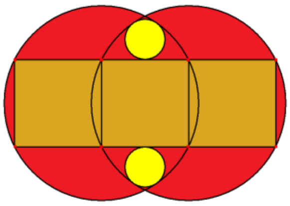
Solució:
Si retallem i desenvolupem el con per la línia AV



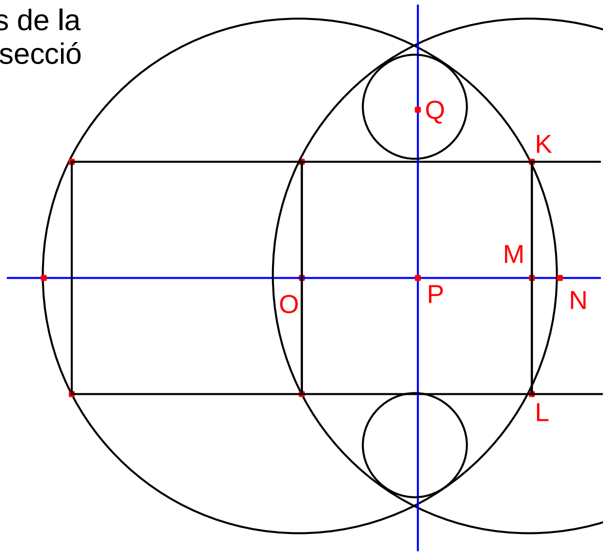
L'arc del sector és igual a la longitud de la circumferència de radi $2\ cm$
$L_{arc} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

L'angle central del sector de radi $3\ cm$ és:
$\alpha = \frac{4\pi}{3}\frac{180°}{\pi} = 240°$
El punt B és troba en la bisectriu del sector anterior.
$\angle AVB = 120°$
La mínima distància és igual a la mesura del segment $\overline{AB}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AVB}$:
$\overline{AB}^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 120° = \frac{63}{4}$
$\overline{AB} = \frac{3\sqrt{7}}{4} = 3.97\ cm$

2207.- En dues circumferències d'igual radi R secants s'han inscrit tres quadrats iguals.
El quadrat central està inscrit en la intersecció de les dues circumferències.
Dues circumferències iguals, són tangents a les circumferències de radis R i als costat del quadrat central.
Determineu la mesura del costat del quadrat i de la circumferència tangent.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi R.
Siga $c = \overline{KL}$ costat del quadrat.
Siga P la intersecció de la recta formada pels centres de la circumferències de radi R i la recta que uneix la intersecció d'aquestes dues circumferències.
Siga M el punt mig del costat $\overline{KL}$



Notem que O és el centre del rectangle que formen els dos quadrats de l'esquerra.
$\overline{OM} = c, \overline{KM} = \frac{c}{2}, \overline{OK} = R$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMK}$

$R^2 = c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Simplificant:

$c^2 = \frac{4}{5}R^2, \quad c = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$

Siga Q el centre d'una de les circumferències tangents i s el seu radi.
$\overline{OQ} = R - s, \overline{OP} = \frac{c}{2}, \overline{PQ} = \frac{c}{2} + s$

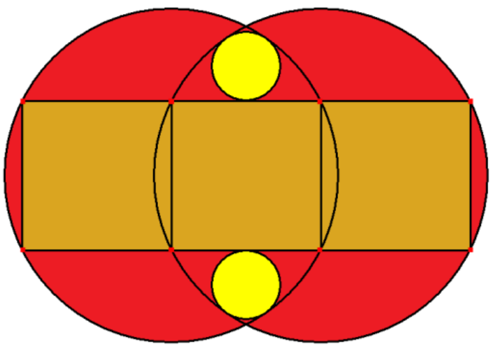
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$(R-s)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + s\right)^2$

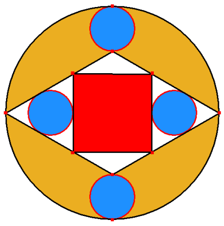
Simplificant.

$R^2 - 2Rs = \frac{c^2}{2} + cs$

$3R = \left(10 + 2\sqrt{5}\right)s$, aleshores, $s = \frac{3\left(10-2\sqrt{5}\right)}{80}R$

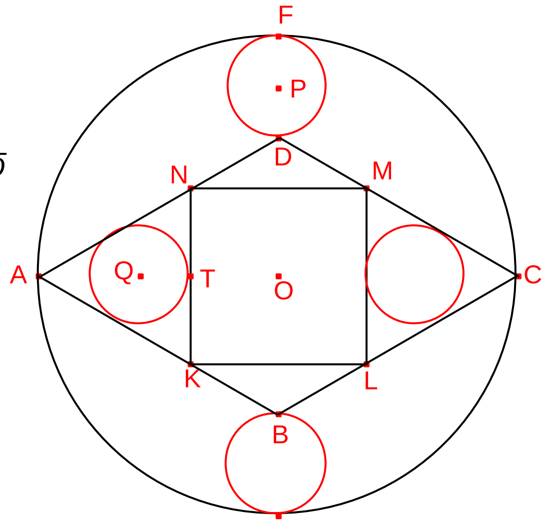


2208.- En el sangaku es mostra una circumferència de radi R, un rombe que una diagonal és el diàmetre de la circumferència i l'angle agut de 60º.
En el rombe hi ha inscrit un quadrat
Comproveu que el radi de les quatre circumferències tenen el mateix radi.
Sangaku, Temple Suwa Nagano. 1879



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi $R = \overline{OA}$
Siga $c_T = \overline{AD} = \overline{BD}$, costat del rombe.

$$c_T = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$



Siga P el centre de la circumferència superior i $s = \overline{PD}$ el seu radi.

$$s = R - \frac{c_T}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}R$$

Siga $c_Q = \overline{KN} = \overline{KL}$, costat del quadrat KLMN.
Siga T el punt mig del costat $\overline{KN}$

$$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}c_Q$$

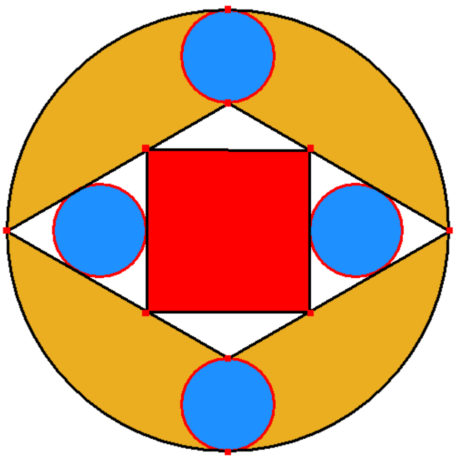
$$\frac{\sqrt{3}}{2}c_Q + \frac{1}{2}c_Q = R$$

$$c_Q = (\sqrt{3}-1)R$$

Siga Q el centre de la circumferència dee l'esquerra i $r = \overline{QT}$ el seu radi.

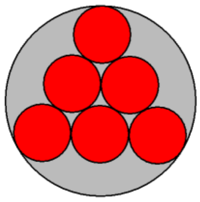
$$r = \frac{1}{3}\overline{AT} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}c_Q = \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}-1)R = \frac{3-\sqrt{3}}{6}R$$

Aleshores, les quatre circumferències són iguals.

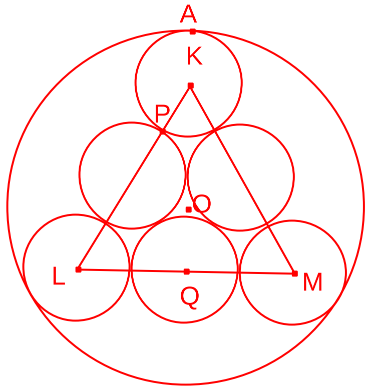


2209.- En una circumferència de radi R s'ha inscrit sis circumferències iguals, tangents dos a dos.

Calculeu el radi de les sis circumferències.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi R.
Siga $r = \overline{KP}$ radi de les sis circumferències.
Els centres de les 3 circumferències tangents a la circumferència de radi R formen un triangle equilàter de costat $\overline{KL} = 4r$.



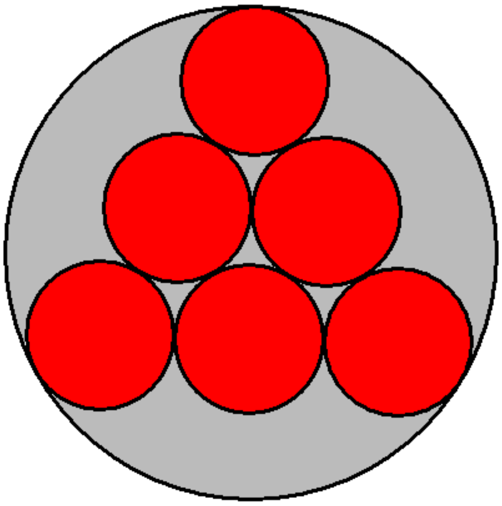
Siga Q el punt mig del segment $\overline{LM}$

$$\overline{KQ} = \frac{\sqrt{3}}{2} 4r$$

$$\overline{OK} = \frac{2}{3}\overline{KQ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} r$$

$$\overline{OA} = R = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 1\right) r$$

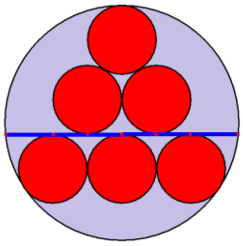
$$r = \frac{4\sqrt{3} - 3}{13} R$$



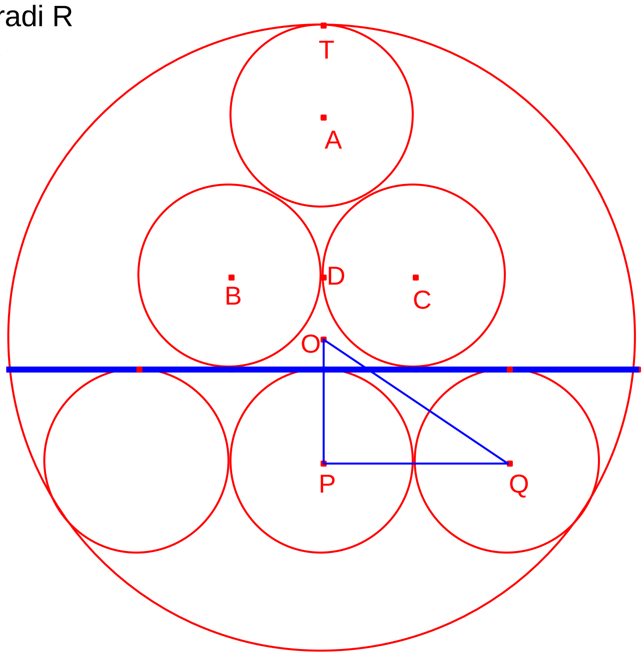
Generalització si hi ha n files de circumferències:

$$r = \frac{(n+1)\sqrt{3} - 3}{n^2 + 2n - 2} R$$

2210.- En el sangaku hi ha una circumferència de radi R i 6 circumferències d’igual radi al seu interior.
Tres tangents dos a dos i dues d’elles tangents a una corda
Tres inferior tangent i alineades.
Tres d’aquestes són tangents interior a la circumferència de radi R.
Calculeu el radi de les 6 circumferències.
Sangaku, Temple Suwa Nagano. 1879



Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior de radi R
Aiguen A, B, C els centres de les circumferències tangents superiors.
Siga $r = \overline{AD}$ el radi.



$\overline{AD} = r\sqrt{3}$
$\overline{OP} = R - r, \overline{PQ} = 2r$
$\overline{TP} = (3 + \sqrt{3})r$
$\overline{OP} = \overline{TP} - R = (3 + \sqrt{3})r - R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$(R - r)^2 = (2r)^2 + \left((3 + \sqrt{3})r - R\right)^2$

Simplificant:

$(15 - 6\sqrt{3})r = (4 - 2\sqrt{3})R.$

$$r = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{15 - 6\sqrt{3}}R = \frac{8 - 2\sqrt{3}}{39}R$$