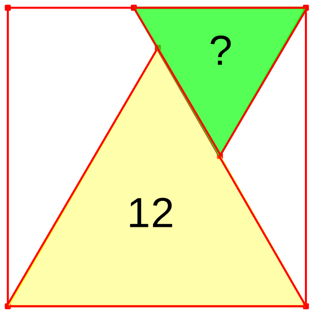
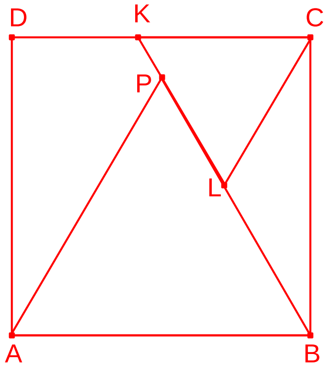
2221.- Dos triangles equilàters estan en l'interior d'un quadrat.
Si l'àrea del triangle equilàter gran és 12, determineu l'àrea del triangle equilàter menut.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$



Siga c el costat del triangle equilàter gran $\overset{\Delta}{ABP}$, que és igual al costat del quadrat..

Siga x el costat del triangle equilàter menut $\overset{\Delta}{CKL}$.

$\angle KBC = 30°$

$\overline{AK} = 2 \cdot \overline{CK} = 2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCK}$

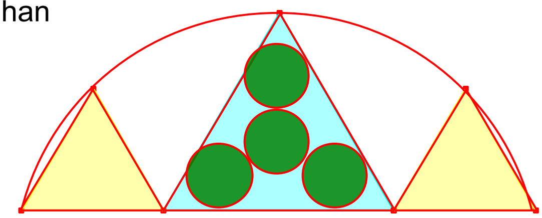
$$\frac{x}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Les àrees de dos triangles és proporcional al quadrat del quocient dels costats
Siga S l'àrea del triangle equilàter menut.

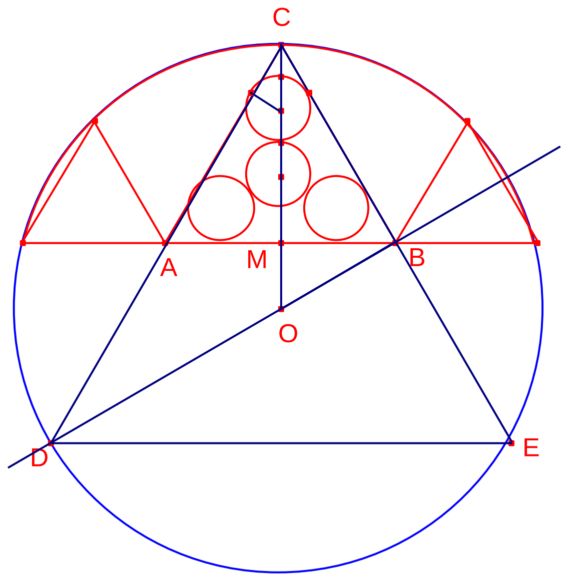
$$\frac{S}{12} = \left(\frac{x}{c}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Aleshores, $S = 4$

2222.- En una corda de circumferència de radi R s'han dibuixat 3 triangles equilàters.
En el triangle equilàter central s'han dibuixat 4 circumferències de radi r.
Determineu la relació entre els radis r i R.



Solució:



Considerem la circumferència de centre O i radi R
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter central de costat $\overline{AB} = a$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

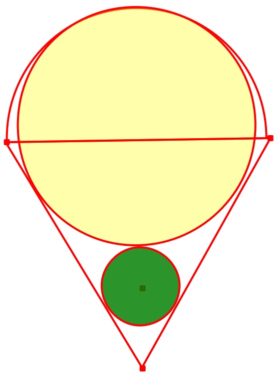
Notem que $\overline{CM} = 6r$
Dibuixem el triangle equilàter inscrit en la circumferència de radi R.
Notem que OB és perpendicular a CE ja que OB és la mediatriu del triangle equilàter de la dreta.

$$\overline{OB} = \frac{R}{2}$$
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{R}{4}$$

$$6r + \frac{R}{4} = R$$

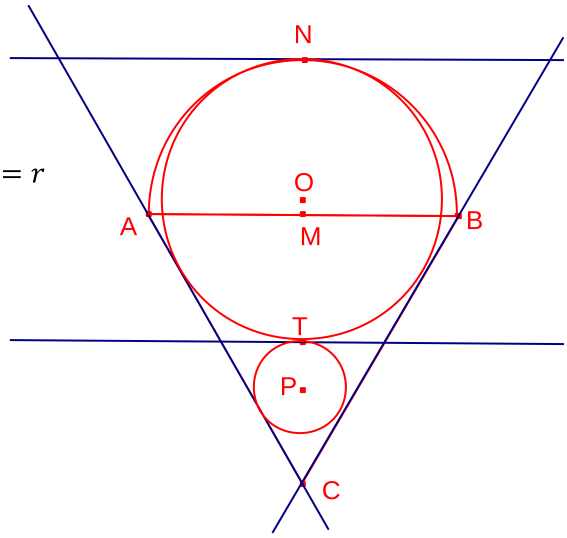
Aleshores, $r = \frac{1}{8}R$

2223.- Sobre un costat d'un triangle equilàter s'ha dibuixat una semicircumferència.
Una circumferència és tangent interior a la semicircumferència i a dos costats del triangle.
Una altra circumferència és tangent exterior a la circumferència anterior i a mateixos costats del triangle.
Determineu la proporció entre els radis de les dues circumferències.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga N el punt mig de la semicircumferència, punt de tangència.
Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{ON} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{NC} = \overline{MC} + \frac{c}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{NC}$$

$$r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

Siga T el punt de tangència de les dues circumferències
Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $\overline{PT} = s$

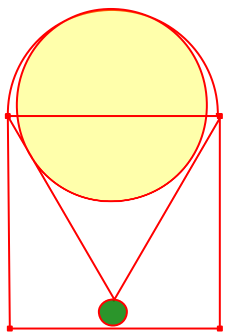
$$\overline{TC} = \overline{NC} - 2r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

$$\overline{PT} = \frac{1}{3}\overline{TC}$$

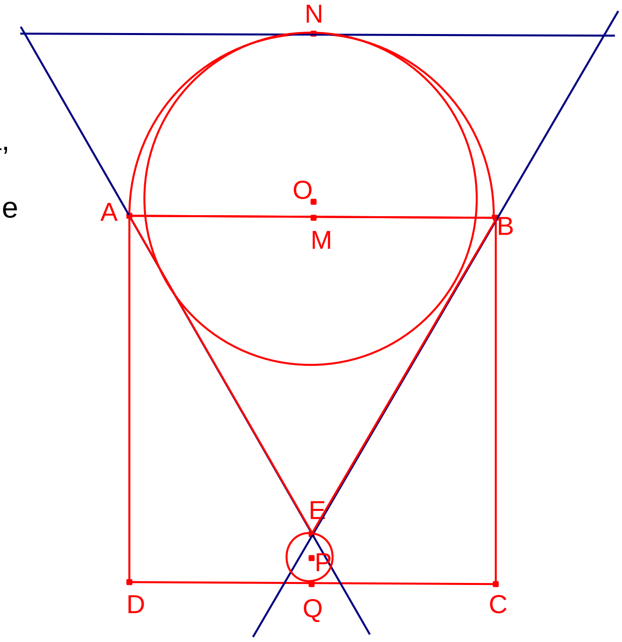
$$s = \frac{1+\sqrt{3}}{18}c$$

$$\frac{s}{r} = \frac{1}{3}$$

2224.- Sobre un costat d'un quadrat s'ha dibuixat un triangle equilàter interior al quadrat i una semicircumferència exterior al quadrat.
Una circumferència és tangent interior a la semicircumferència i a dos costats del triangle.
Una altra circumferència és tangent al punt mig del costat d'un quadrat i passa pel vèrtex del triangle.
Determineu la proporció entre els radis de les dues circumferències.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga ABC el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga N el punt mig de la semicircumferència, punt de tangència.
Siga O el centre de la circumferència gran de radi $\overline{ON} = r$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{NE} = \overline{ME} + \frac{c}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c$$

$$\overline{ON} = \frac{1}{3}\overline{NE}$$

$$r = \frac{1+\sqrt{3}}{6}c$$

Siga Q el punt mig del costat $\overline{CD}$
Siga P el centre de la circumferència menuda de radi $s = \overline{PE} = \overline{PQ}$.

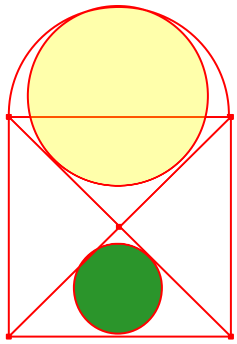
$$\overline{NQ} = \frac{3c}{2}$$

$$\overline{EQ} = \overline{NQ} - \overline{NE} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c$$

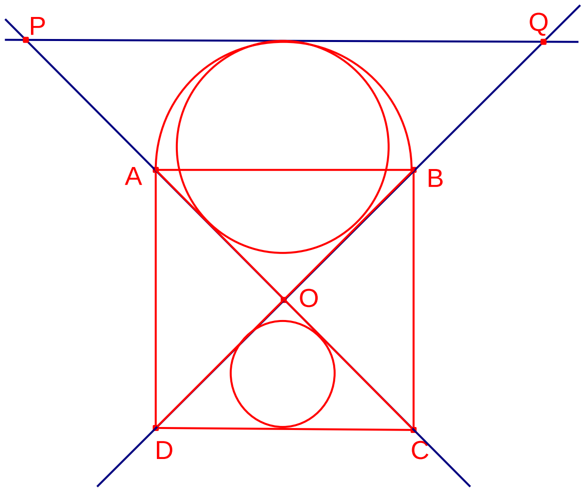
$$s = \frac{1}{2}\overline{EQ} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}c$$

$$\frac{s}{r} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\left(2\sqrt{3}-5\right)}{4}$$

2225.- Sobre un costat d’un quadrat s’ha dibuixat una semicircumferència exterior al quadrat i les dues diagonals.
Una circumferència és tangent interior a la semicircumferència i a les dues diagonals del quadrat.
Una altra circumferència és tangent al punt mig del costat d’un quadrat i és tangent a dues diagonals.
Determineu la proporció entre els radis de les dues circumferències.



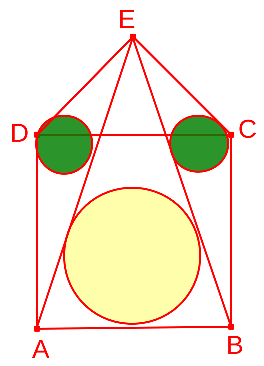
Solució:



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCO}, \overset{\Delta}{PQO}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, els radis de les circumferències inscrites estan en raó 1:2.

2226.- Sobre el costat $\overline{AB}$ del quadrat ABCD s'ha dibuixat el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDE}, E = 90°$

Calculeu la proporció entre els radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABE}$



Solució:

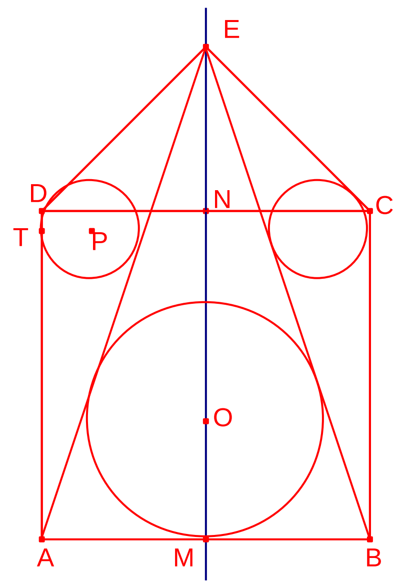
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Siguen M, N els punts mig dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.

Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ de radi $r = \overline{OM}$.

$\overline{NE} = \overline{CN} = \frac{c}{2}, \overline{AM} = \frac{c}{2}$

$\overline{ME} = \frac{3c}{2}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$\overline{AE} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}c\frac{3}{2}c = \frac{1 + 2\frac{\sqrt{10}}{2}}{2}cr$$

Aïllant r:

$$r = \frac{\sqrt{10} - 1}{6}c$$

Siga P el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ de radi $s = \overline{PT}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}c\frac{1}{2}c = \frac{1 + \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}cs$$

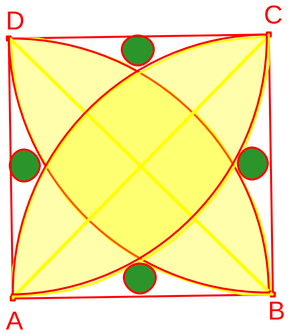
Aïllant s:

$$s = \frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}c$$

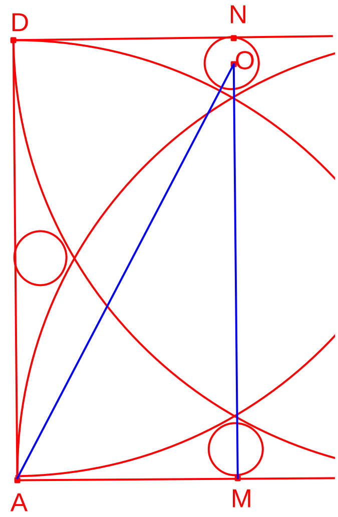
La proporció entre els radis és

$$\frac{s}{r} = \frac{\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{10}}}{\frac{\sqrt{10} - 1}{6}} = \frac{6}{8 - \sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10}}$$

2227.- En el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ s'han dibuixat quatre quadrants de entres els vèrtexs del quadrat.
Tangents exteriors a dos quadrants i a un costat s'han dibuixat 4 circumferències.
Determineu el radi de es circumferències.



Solució.
Siguen M i N els punt migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
Siga O el centre de la circumferència superior de radi $\overline{ON} = r$.



$\overline{AO} = c + r, \overline{AM} = \frac{c}{2}, \overline{MO} = c - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$(c + r)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (c - r)^2.$

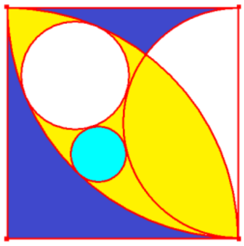
Simplificant:

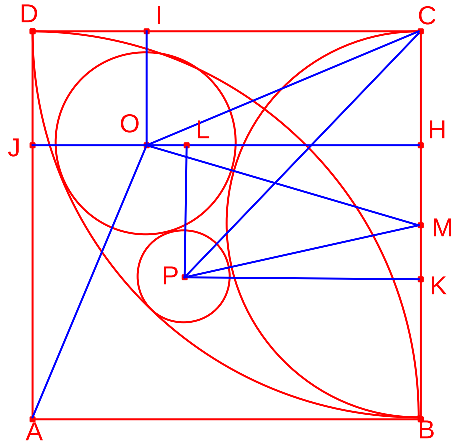
$4cr = \frac{c^2}{4}$

Resolent l'equació:

$r = \frac{1}{16}c$

2228.- Dins d'un quadrat es dibuixen dos quadrats de centres dos vèrtexs oposats i una semicircumferència de diàmetre un costat. S'ha dibuixat una circumferència tangent interiors als quadrants i exterior a la semicircumferència.
Una altra circumferència és tangent exterior a la circumferència anterior, tangent interior a un quadrant i tangent exterior a la semicircumferència.
Determineu la proporció entre els radis de les dues circumferències.





Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$
Siga O el centre de la circumferència tangent interior als quadrants i exterior a la semicircumferència, de radi r.
Siga H la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$
Siga $\overline{CH} = \overline{OI} = \overline{OJ} = x$.

$\overline{OH} = 1 - x, \overline{OC} = 1 - r, \overline{OM} = \frac{1}{2} + r, \overline{MH} = \frac{1}{2} - x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHC}$:
$(1-r)^2 = x^2 + (1-x)^2$
Simplificant:
$r^2 - 2r = 2x^2 - 2x$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHM}$:
$\left(\frac{1}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + (1-x)^2$

Simplificant:
$r^2 + r = 2x^2 - 3x + 1$ (2)
Restant les expressions (1) (2)
$x = 1 - 3r$ (3)
Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1)
$r^2 - 2r = 2(1-3r)^2 - 2(1-3r)$
Resolent l'equació:
$r = \frac{4}{17}$
Aleshores, $x = \frac{5}{17}, \overline{OH} = \frac{12}{17}$

Siga P el centre de la circumferència tangent exterior a la circumferència de centre O, tangent interior a un quadrant i tangent exterior a la semicircumferència. Siga s el seu radi.
Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$
Siga L la projecció de P sobre $\overline{OH}$
Siga $\overline{OL} = y, \overline{MK} = z$

$\overline{OP} = \frac{4}{17} + s, \overline{PL} = \overline{HK} = \frac{7}{34} + z$

$\overline{PM} = \frac{1}{2} + s, \overline{PK} = \frac{12}{17} - y$

$\overline{PC} = 1 - s, \overline{CK} = \frac{1}{2} + z$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKM}$:
$\left(\frac{1}{2} + s\right)^2 = z^2 + \left(\frac{12}{17} - y\right)^2$ (4)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKC}$:

$(1-s)^2 = \left(\frac{1}{2}+z\right)^2 + \left(\frac{12}{17}-y\right)^2$ (5)

Restant les expressions (4) i (5) i simplificant:

$z = \frac{1}{2} - 3s$ (6)

$$\overline{OP} = \frac{4}{17} + s, \overline{PL} = \overline{HK} = \frac{7}{34} + z = \frac{12}{17} - 3s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OLP}$:

$\left(\frac{4}{17}+s\right)^2 = y^2 + \left(\frac{12}{17}-3s\right)$ (7)

Simplificant:

$-8s^2 + \frac{80}{17}s = y^2 + \frac{128}{289}$ (8)

Simplificant l'expressió (4)

$\left(\frac{1}{2}+s\right)^2 = \left(\frac{1}{2}-3s\right)^2 + \left(\frac{12}{17}-y\right)$ (9)

$-8s^2 + 4s = y^2 - \frac{24}{17}y + \frac{144}{289}$ (10)

Restant les expressions (9) (10)

$y = \frac{2}{51} + \frac{1}{2}s$ (11)

Simplificant l'expressió (7)

$\left(\frac{4}{17}+s\right)^2 = \left(\frac{2}{51}+\frac{1}{2}s\right)^2 + \left(\frac{12}{17}-3s\right)$ (12)

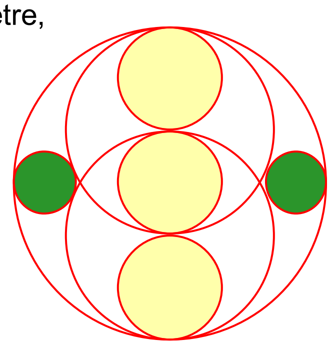
Resolent l'equació:

$$s = \frac{4}{33}$$

La proporció entre els radis és:

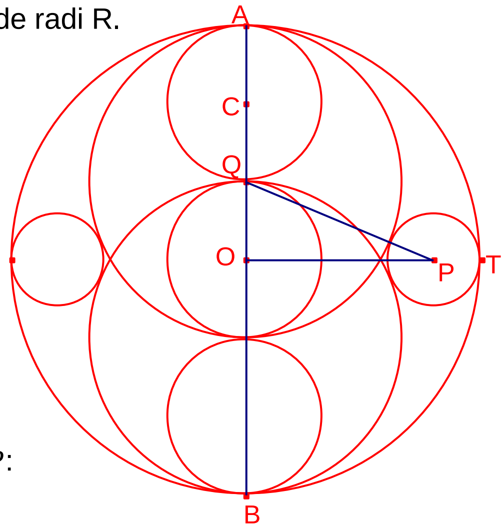
$$\frac{s}{r} = \frac{17}{33}$$

2229.- A l'interior d'una circumferència de radi R, sobre un diàmetre, s'han dibuixat 3 circumferències iguals i tangents de radi r_1.
S'ha dibuixat dos circumferències de radi r_2 tangents interiors a la de radi R i tangents exteriors a dues de les tres circumferències de radi r_1.
S'han dibuixat dues circumferències de radi r_3 tangents interior a la de radi R i exteriors a dues de radi r_2.



Calculeu la proporció $\frac{r_3}{r_1}$

Solució:
Considerem el diàmetre $\overline{AB}$ de la circumferència exterior de radi R.
Siga C el centre de la circumferència de radi $r_1 = \overline{CA}$.

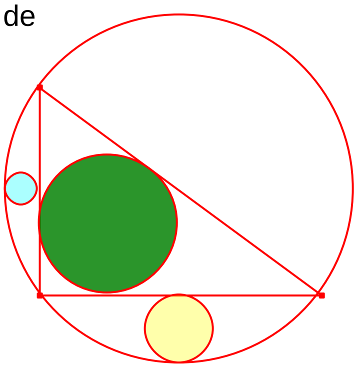


$6r_1 = 2R$
Aleshores, $r_1 = \frac{1}{3}R$

Siga Q el centre de la circumferència de radi $r_2 = \overline{QA}$.
$r_2 = 2r_1 = \dfrac{2}{3}R$
Siga P el centre de la circumferència de radi $r_3 = \overline{PT}$.
$\overline{OQ} = r_1, \overline{QP} = r_2 + r_3 = \dfrac{2}{3}R + r_3, \overline{OP} = R - r_3$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QOP}$:
$$\left(\frac{2}{3}R + r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{3}R\right)^2 + (R - r_3)^2$$

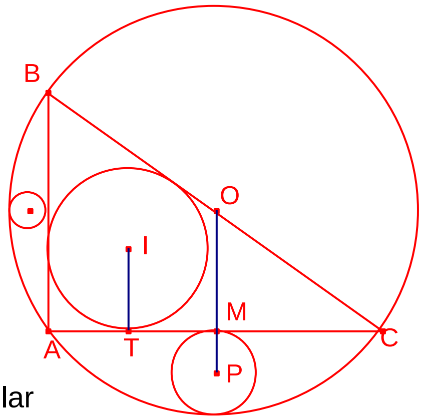
Simplificant, $r_3 = \frac{1}{5}R$
La proporció entre els radis és:
$$\frac{r_3}{r_1} = \frac{3}{5}$$

2230.- Un triangle rectangle està inscrit en una circumferència de radi R.
Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle.
Siguen r_1, r_2, els radis de les circumferències màximes inscrites ens els segments circulars que formen els catets.
Proveu que $r + 2r_1 + 2r_2 = R$



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$ de catets $\overline{AC} = b, \overline{AB} = c$.
La hipotenusa és igual al diàmetre de la circumferència inscrita.
$\overline{BC} = 2R$



Siga I el centre de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
El radi és

$$r = \overline{IT} = \overline{AT} = \frac{b + c - 2R}{2}$$

Siga M el punt mig del catet $\overline{AC}$

Siga $\overline{PM} = r_1$ radi de la circumferència màxima del segment circular del catet $\overline{AC}$.

$$\overline{OM} = \frac{c}{2}$$

$$r_1 = \frac{R - \frac{c}{2}}{2} = \frac{2R - c}{4}$$

Anàlogament, siga $r_2$el radi del segment circular referit a l'altre catet.

$$r_2 = \frac{R - \frac{b}{2}}{2} = \frac{2R - b}{4}$$

$$r + 2r_1 + 2r_2 = \frac{b + c - 2R}{2} + 2\frac{2R - c}{4} + 2\frac{2R - b}{4} = R$$