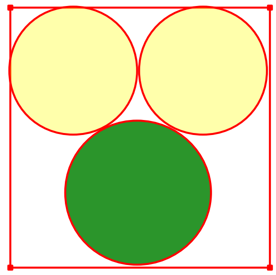
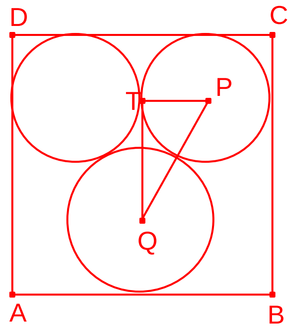
Problemes de Geometria per a l'ESO 224

2231.- En un quadrat s'han dibuixat dues circumferències tangents exteriors i cadascuna d'elles tangent a dos costats consecutius.
Una tercera circumferència és tangent exterior a les dues anteriors i tangent al costat del quadrat.
Calculeu la proporció entre els dos tipus de radis de les circumferències.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre P tangent als costat $\overline{BC}, \overline{CD}$ de radi $r = \overline{PT}$.

$$r = \frac{1}{4}c$$



Siga la circumferència de centre Q tangent al costat $\overline{AB}$ de radi s.

$$\overline{PQ} = \frac{1}{r}c + s, \overline{QT} = c - \frac{1}{4}c - s = \frac{3}{4}c - s$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTQ}$

$$\left(\frac{1}{4}c + s\right)^2 = \left(\frac{1}{4}c\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c - s\right)^2$$

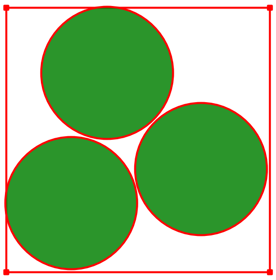
Simplificant:

$$s = \frac{9}{32}c$$

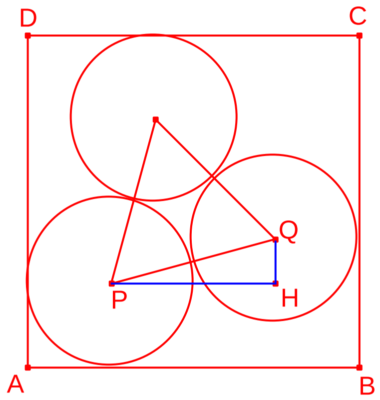
La proporció entre els radis és:

$$\frac{r}{s} = \frac{8}{9}$$

2232.- En un quadrat s’ha empaquetat tres circumferències d’igual radi.
Calculeu la proporció entre costat del quadrat i el radi de les circumferències.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Sigen P, Q centres de dues circumferències de radi r.
Considerem la recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per P i la recta paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per Q.
Siga H la intersecció de les dues rectes.
$\overline{PQ} = 2r, \overline{PH} = c - 2r, \angle QPH = 15°$



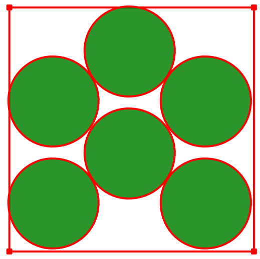
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PHQ}$

$$\frac{c-2r}{2r} = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

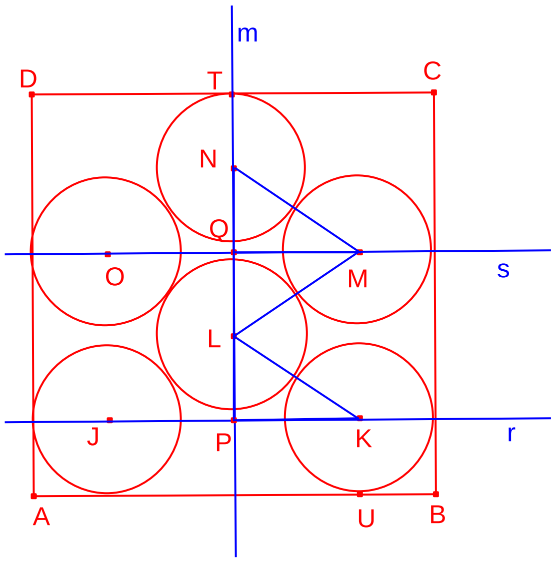
$$\frac{c}{r} - 2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{c}{r} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

2233.- Per empaquetar 6 circumferències iguals en un quadrat s'ha de fer la distribució de la figura (provat per Graham l'any 1963).
Determineu la proporció entre el radi d'una circumferència i el costat del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Siguen J, K, L, M, N, O els centres de les sis circumferències de radi r.
Considerem la recta m mediatriu del costat $\overline{AB}$
Siga r la recta que passa pels centres J, K.
Siga s la recta que passa pels centres O, M.
Les rectes m, r s'intersecten en el punt P.
Les rectes m, s s'intersecten en el punt Q.



$\overline{JK} = c - 2r.$

$\overline{PQ} = \overline{QM} = \dfrac{c-2r}{2}, \overline{LK} = \overline{MN} = \overline{LM} = 2r$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LPK}, \overset{\Delta}{LQM}, \overset{\Delta}{NQM}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{LP} = \overline{QL} = \overline{QN}$

$2r + 3\overline{LQ} = c$

$\overline{LQ} = \dfrac{c-2r}{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LPK}$

$$(2r)^2 = \left(\frac{c-2r}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-2r}{3}\right)^2$$

Simplificant:

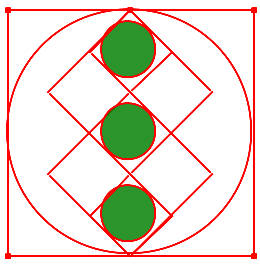
$$92r^2 + 52cr - 13c^2 = 0$$

$$92\left(\frac{r}{c}\right)^2 + 52\left(\frac{r}{c}\right) - 13 = 0$$

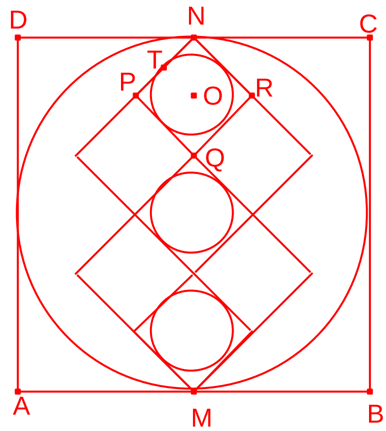
Resolent l'equació:

$$\frac{r}{c} = \frac{-13 + 6\sqrt{13}}{46}$$

2234.- Calculeu la raó entre el radi d'una de les circumferències centrals i el radi de la circumferència inscrita al quadrat.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{CD}$, respectivament.
El radi de la circumferència inscrita al quadrat ABCD és
$$r = \frac{1}{2}c$$

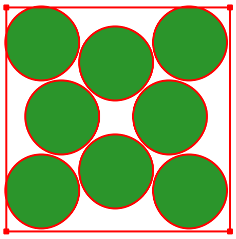


Siga la circumferència de centre O inscrita al quadrat NPQR de radi $s = \overline{OT}$
$\overline{NP} = 2\overline{OT} = 2s$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NPQ}$
$\overline{NQ} = 2s\sqrt{2}$

$\overline{MN} = 3\overline{NP} = 6s\sqrt{2} = c$
Resolent l'equació:
$$s = \frac{\sqrt{2}}{12}c$$
La proporció entre els radis és:

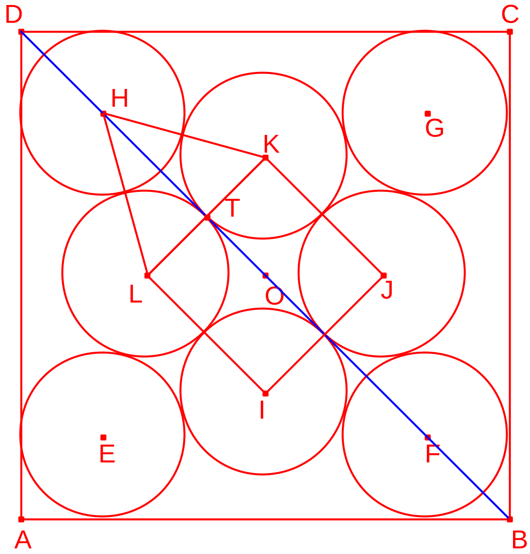
$$\frac{s}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

2235.- Per empaquetar 8 circumferències iguals en un quadrat s'ha de fer la distribució de la figura (provat per Schaer l'any 1964).
Determineu la proporció entre el radi d'una circumferència i el costat del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ de centre O.

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$, $\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$



Siguen E, F, G, H, I, J, K, L els centres de les sis circumferències de radi r

Els centres I, J, K, L, formen un quadrat de costat 2r.
$\overline{OT} = r$

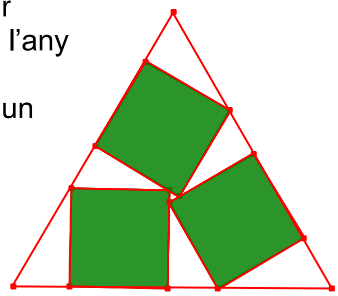
Els centre K, L, H, formen un triangle equilàter de costat 2r.
$\overline{HT} = r\sqrt{3}$

$\overline{DH} = r\sqrt{2}$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = r + r\sqrt{3} + r\sqrt{2}$$

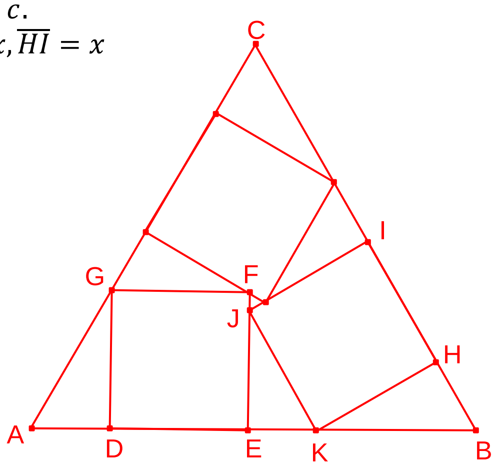
$$\frac{c}{r} = \sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

2236. Per empaquetar 3 quadrats iguals en un triangle equilàter s'ha de fer la distribució de la figura (provat per Erich Friedman l'any 1997).
Determineu la proporció entre el costat del triangle i el costat d'un quadrat.



Solució:

Siga el triangle equilàter gran $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen els quadrats DEFG, HIJK de costat $\overline{DE} = x, \overline{HI} = x$

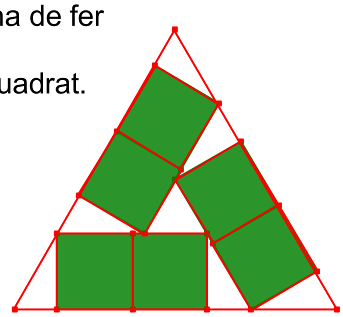


$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{EK} = \frac{1}{2}x, \overline{KB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = c = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)x$$

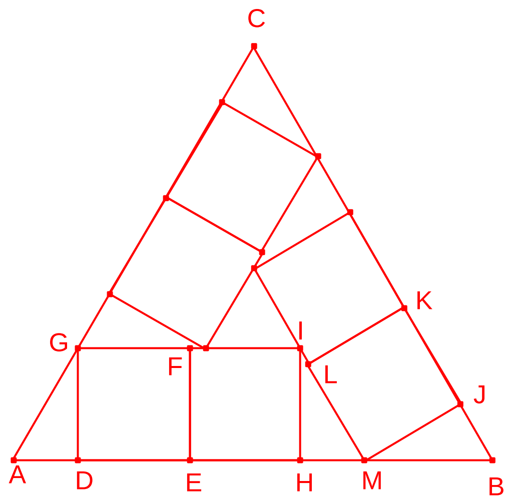
$$\frac{c}{x} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$$

2237.- Per empaquetar 6 quadrats iguals en un triangle equilàter s’ha de fer la distribució de la figura (provat per Erich Friedman l’any 1997).
Determineu la proporció entre el costat del triangle i el costat d’un quadrat.



Solució:

Siga el triangle equilàter gran $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen els quadrats DEFG, EHIF, JKLM de costat $\overline{DE} = x, \overline{EH} = x, \overline{JK} = x$

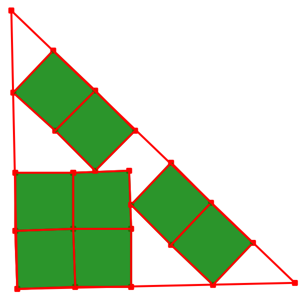


$$\overline{AD} = \overline{HM} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \overline{MB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AB} = c = \left(2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)x$$

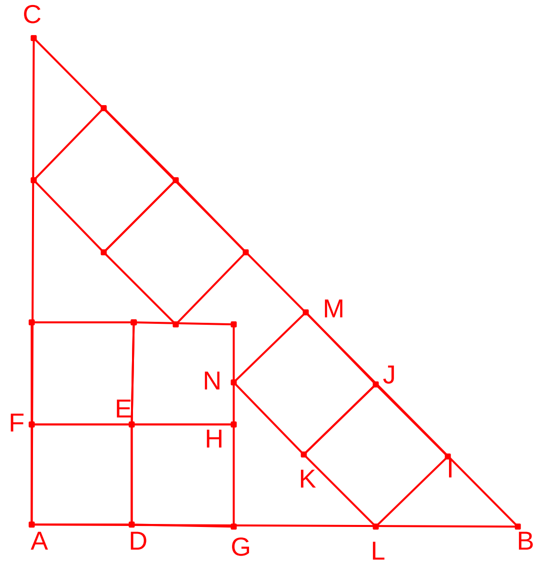
$$\frac{c}{x} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2238.- Per empaquetar 8 quadrats iguals en triangle rectangle Isòsceles s'ha de fer la distribució de la figura (provat per Erich Friedman l'any 2005).
Determineu la proporció entre catet i el costat del quadrat.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90°$ de catet $\overline{AB} = c$.
Siguen els quadrats ADEF, DGHE, IJKL, JMNK de costats $\overline{AD} = \overline{DG} = \overline{IJ} = \overline{JM} = x$

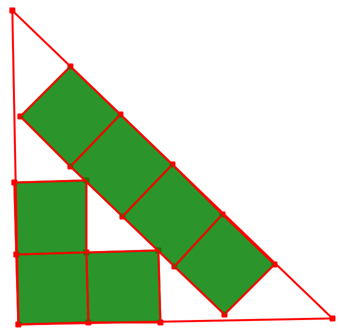


$\overline{GL} = \overline{LB} = x\sqrt{2}$

$\overline{AB} = c = (2 + 2\sqrt{2})x$

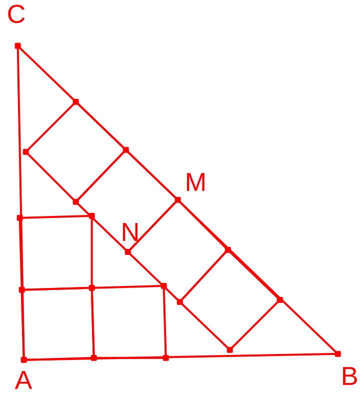
$\frac{c}{x} = 2 + 2\sqrt{2}$

2239.- Per empaquetar 7 quadrats iguals en triangle rectangle Isòsceles s'ha de fer la distribució de la figura (provat per Erich Friedman l'any 2005).
Determineu la proporció entre catet i el costat del quadrat.



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90°$ de catet $\overline{AB} = c$.
Siga M el punt mig de la hipotenusa
Siga $\overline{MN} = x$ costat del quadrat



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

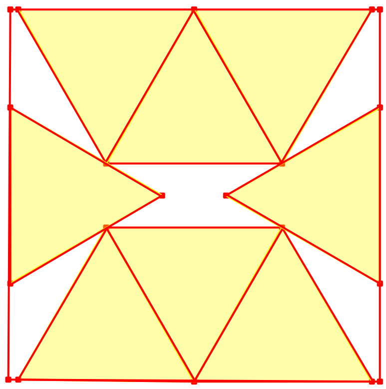
$$\overline{AN} = \frac{3}{2}\sqrt{2}r$$

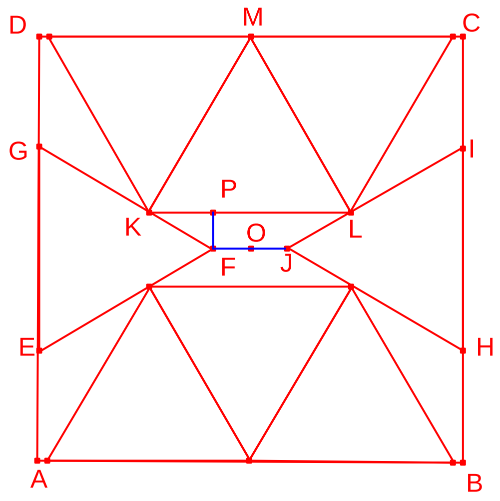
$$\overline{AM} = \overline{AN} + x$$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1\right)x$$

$$\frac{c}{x} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 + \sqrt{2}$$

2240.- Per empaquetar 8 triangles equilàters iguals en un quadrat s’ha de fer la distribució de la figura (provat per Erich Friedman l’any 1996).
Determineu la proporció entre el costat del quadrat i el costat d’un triangle equilàter.





Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$ de centre O.
Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{HIJ}, \overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{GE} = \overline{KL} = x$
Siga P la projecció de F sobre $\overline{KL}$

$\angle PKF = 30°$

$\overline{FO} = \dfrac{c - x\sqrt{3}}{2}, \overline{PF} = \dfrac{c - x\sqrt{3}}{2}$

$\overline{KP} = \dfrac{\overline{KL}}{2} - \overline{FO} = \dfrac{x - c + x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)x - c}{2}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPF}$

$\dfrac{c - x\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)x - c} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\left(3+\sqrt{3}\right)c = \left(4\sqrt{3}+3\right)x$

La proporció entre el costat del quadrat i el costat del triangle equilàter és:

$\dfrac{c}{x} = \dfrac{4\sqrt{3}+3}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2}$