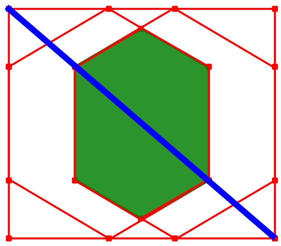
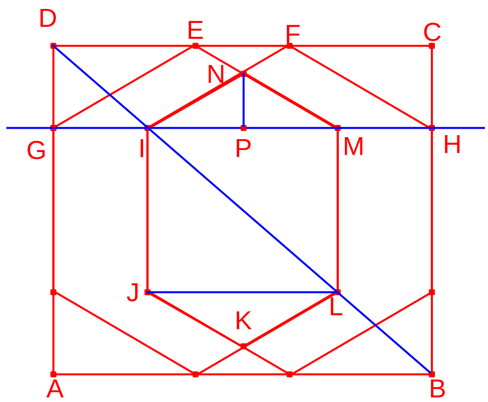


2241.- En la figura, un vèrtex de cadascun dels hexàgons regulars pertanyen a la diagonal del rectangle.
Determineu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos hexàgons regulars i l'àrea del rectangle.

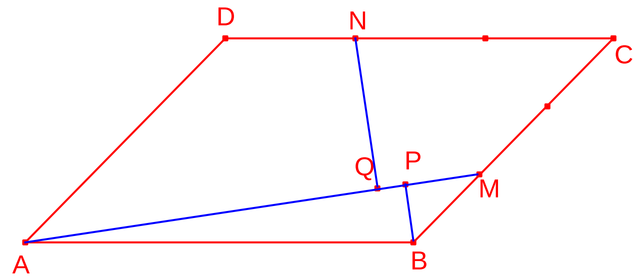
Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Siguen E i F els vèrtexs superiors dels dos hexàgons regulars.
Siga IJKLMN l'hexàgon intersecció.
Siga $\overline{IJ}=c$ ostat de l'hexàgon regular.
Siga P el punt mig de segment $\overline{IM}$
La recta IM talla els costats $\overline{AD},\overline{BC}$ en els punts G, H, respectivament.
Siga $\overline{EF}=x$



$$\overline{DG}=\frac{1}{2}c,\overline{DE}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$
$$\overline{GI}=\overline{MH}=\overline{EF}=x$$
$$\overline{AD}=2c,\overline{AB}=c\sqrt{3}+x$$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DGI},\overset{\Delta}{DAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{2c}{c\sqrt{3}+x}=\frac{\frac{1}{2}c}{x}$$
Resolent l'equació:
$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}c$$
Aleshores,
$$\overline{IM}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c,\overline{AB}=\frac{4\sqrt{3}}{2}c$$
$$\frac{\overline{NP}}{\overline{IP}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
Aleshores, $\overline{NP}=\frac{1}{3}c$
L'àrea del rectangle és:
$$S_{ABCD}=2c\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}c=\frac{8\sqrt{3}}{3}c^2$$
L'àrea de l'hexàgon IJKLMN és igual a dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{IMN}$ més l'àrea del rectangle IJLM
$$S_{IJKLMN}=\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\frac{1}{3}c+c\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}c=\frac{8\sqrt{3}}{9}c^2$$
La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{IJKLMN}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{3}$$

2242.- En un paral·lelogram ABCD, siga M el punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{MC} = 2\overline{BM}$ i siga N un punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{NC} = 2\overline{DN}$
Si la distància del punt B a la recta AM és 3, calculeu la distància del punt N a la recta AM.

Solució 1:
Siga $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \angle ABC = \alpha$
Siga P la projecció de B sobre la recta AM.
$\overline{BP} = 3$
Siga $x = \overline{AM}$
Siga Q la projecció de N sobre la recta AM.
Siga a distància de N a la recta AM, $\overline{NQ} = y$



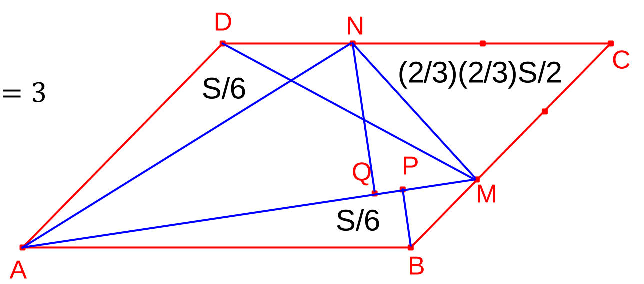
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:
$S_{ABM} = \frac{1}{2}a\frac{1}{3}b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}3x = \frac{3}{2}x$
Aleshores, $ab \cdot \sin\alpha = 9x$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADN}$ és:
$S_{ADN} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ab \cdot \sin\alpha = \frac{1}{6}ab \cdot \sin\alpha = \frac{3}{2}x$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMN}$ és:
$S_{CMN} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}a\frac{2}{3}b \cdot \sin\alpha = \frac{2}{9}ab \cdot \sin\alpha = 2x$

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:
$S_{ABCD} = ab \cdot \sin\alpha = 9x$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{ADN}$, $\overset{\Delta}{CMN}$.
$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{AMN}) = 9x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + 2x\right) = 4x$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és:
$S_{AMN} = \frac{1}{2}xy$
Igualant ambdues expressions:
$S_{AMN} = 4x = \frac{1}{2}xy$
Simplificant:
$\overline{NQ} = y = 8$

Solució 2:
Siga P la projecció de B sobre la recta AM. $\overline{BP} = 3$
Siga Q la projecció de N sobre la recta AM.

Siga S l'àrea del rectangle ABCD.
$S_{ABM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S$
$S_{ADN} = \frac{1}{3}S_{ADC} = \frac{1}{6}S$
$S_{CMN} = \frac{2}{3}S_{CMD} = \frac{2}{3}\frac{2}{3}S_{BCD} = \frac{2}{9}S$



S_{AMN}=S-(S/6+S/6+4S/9)=4S/9

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ és igual a l’àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{ADN}$, $\overset{\Delta}{CMN}$.

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{AMN}) = S - \left(\frac{1}{6}S + \frac{1}{6}S + \frac{2}{9}S\right) = \frac{4}{9}S$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AMN}, \overset{\Delta}{BMN}$ tenen la mateixa base les altures són proporcionals a les bases.

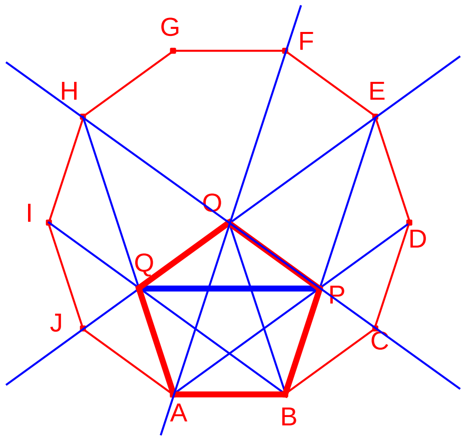
$$\frac{S_{AMN}}{S_{BMN}} = \frac{\frac{4}{9}S}{\frac{1}{6}S} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{BP}}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{\overline{NQ}}{3}$$

Aleshores, $\overline{NQ} = 8$

2243.- Siga ABCDEFGHIJ un decàgon regular que té els vèrtexs en una circumferència de centre O i radi 5. Les diagonals $\overline{AD}, \overline{BE}$ es tallen en el punt P i les diagonals $\overline{AH}, \overline{BI}$ es tallen en el punt Q.
Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$.

Solució:



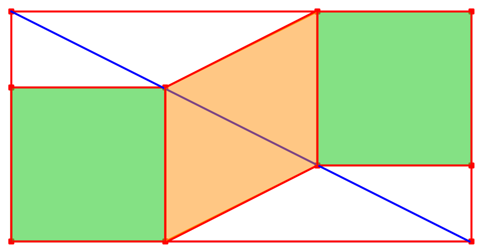
Per ser angle inscrit en un decàgon regular $\angle ABI = 36°$.
Per ser angle interior i abraçar dos arcs que sumen 72º,
$\angle AQB = 36°$
Aleshores, $\overline{AQ} = \overline{AB}$.
Anàlogament, $\overline{BP} = \overline{AB}$

Per ser angle inscrit en un decàgon regular $\angle AHI = 36°$.
Per ser angle interior i abraçar dos arcs que sumen 72º,
$\angle IQH = 36°$
Aleshores, $\overline{IQ} = \overline{AB}$.
Aleshores, AQIJ és un rombe. Per tant, les seues diagonals són perpendiculars.
Aleshores, els punts J, Q, O, E estan alineats.
Anàlogament, els punts C, P, O, H estan alineats.

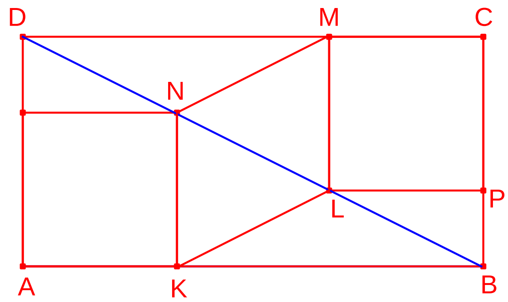
$\angle QAO = 36°, \angle QOA = 36°$
Aleshores, $\overline{OQ} = \overline{AQ} = \overline{AB}$.
Anàlogament, $\overline{OP} = \overline{AB}$.

$\angle QAB = \angle ABP = \angle BPO = \angle POQ = \angle OQA = 108°$
Aleshores ABPOQ és un pentàgon regular.
Aleshores, les diagonals són iguals.
$\overline{PQ} = \overline{OA} = 5$

2244.- En el rectangle de la figura, els dos quadrats verds tenen una àrea de 16 unitats.
Si la llargada del rectangle és el doble de l'amplada, quina fracció de l'àrea toral està ombrejada en color taronja.



Solució.
Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AB} = 2\overline{AD}$
Siga $\overline{AK} = 4$ costat del quadrat.
Siga KLMN el paral·lelogram taronja
Els triangles rectangles $D\overset{\Delta}{A}B, N\overset{\Delta}{K}B$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{4}{\overline{KB}} = \frac{1}{2}$$
Resolent l'equació:
$\overline{KB} = 8$
Aleshores, $\overline{AB} = 12, \overline{AD} = 6$



L'àrea del rectangle ABCD és:
$S_{ABCD} = 12 \cdot 6 = 72$

$\overline{BP} = \overline{AD} - AK = 2$
L'àrea del paral·lelogram KLMN és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys dues vegades la suma del quadrat LPCM i del trapezi KBPL:
$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - 2(S_{LPCM} + S_{KBPL}) = 72 - 2\left(16 + \frac{8+4}{2}2\right) = 16$$

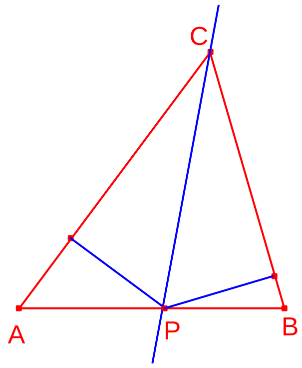
La proporció entre les àrees del paral·lelogram KLMN i del rectangle ABCD és:
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{16}{72} = \frac{1}{6}$$

2245.- La bisectriu interior a l'angle C del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tall el costat oposat en el punt P. La distància del punt P als costats és $\frac{24}{11}$.
Si $\overline{AC} = 6, \overline{BC} = 5$, calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$
KöMaL C1556.

Solució:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la suma de les àrees dels triangle $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{BPC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} 6 \cdot \frac{24}{11} + \frac{1}{2} 5 \cdot \frac{24}{11} = 12$$



Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(11+c)(11-c)(1+c)(-1+c)}}{4}$$

Igualant les àrees:

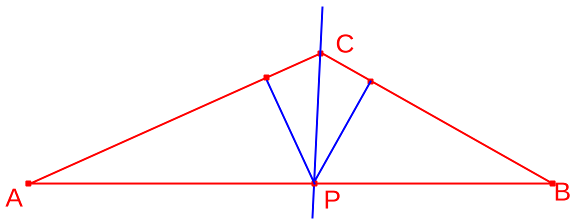
$$\frac{\sqrt{(11+c)(11-c)(1+c)(-1+c)}}{4} = 12$$

Elevant al quadrat i simplificant:

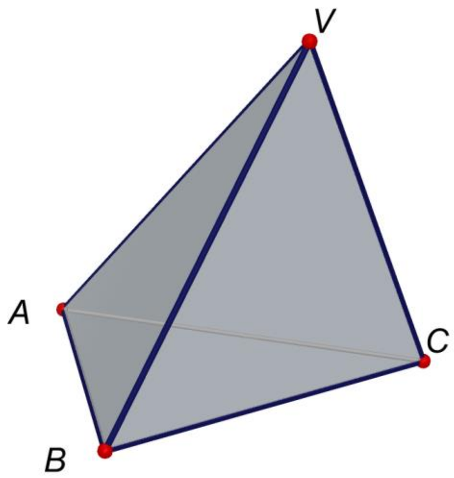
$c^4 - 122c^2 + 2425 = 0.$

Resolent l'equació:

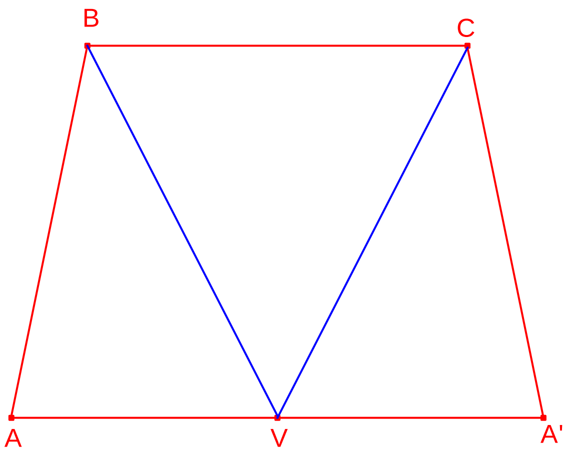
$c = 5, c = \sqrt{97}$



2246.- La base d'un tetràedre és un triangle equilàter, i les tres cares laterals desplegades i posades en un plànol formen un trapezi de costats 10, 10, 10 i 14 unitats de longitud.
Calculeu la suma de les longituds de tots les arestes del tetràedre i també determineu la seua àrea.
KöMaL C1559.



Solució.
Siga ABCV el tetràedre de base el triangle equilàter de costats 10, ja que el desenvolupament té tres costats iguals a 10.
Siga el trapezi isòsceles AA'CB format pel desenvolupament de les cares laterals.



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA'} = 10$ arestes de la base del tetràedre, $\overline{AA'} = 14$
El vèrtex V del tetràedre és el punt mig del segment $\overline{AA'}$
$\overline{AV} = 7$
Siguen $\overline{BV} = \overline{CV} = a$ les altres dues arestes.
Siga P la projecció de B sobre $\overline{AA'}$
$\overline{PV} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPV}$
$a = 11$

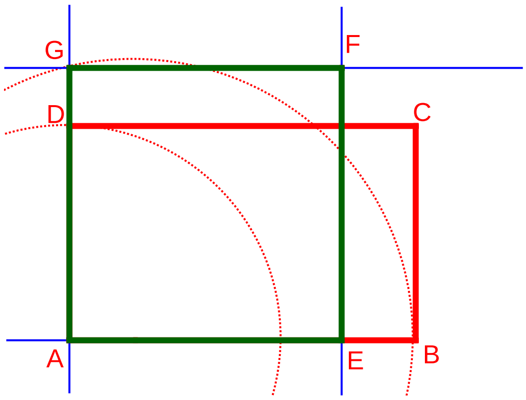
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$
$\overline{BP} = 4\sqrt{6}$
La suma de les longituds de les arestes són:
$L_{arestes} = 3\overline{AB} + 2a + \overline{AV} = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 7 = 59\,u$
L'àrea del tetràedre és:

$$S_{ABCV} = S_{ABC} + S_{AA'CB} = \frac{\sqrt{3}}{4}10^2 + \frac{14+10}{2} \cdot 4\sqrt{6} = 25\sqrt{3} + 48\sqrt{6}$$

2247.- Un rectangle un costat és $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vegades l'altre costat.
Si es forma un quadrat de la mateixa àrea que el rectangle.
Determineu la proporció entre la diagonal del rectangle i la diagonal del quadrat.
KöMaL C1554

Solució

Siga ABCD el rectangle de costats $\overline{AD} = 1, \overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ nombre auri.



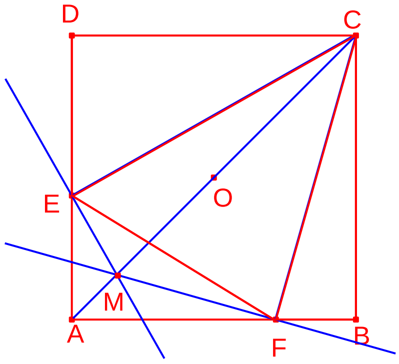
L'àrea del rectangle ABCD és
$S_{ABCD} = \Phi$
El quadrat de la diagonal del rectangle és:
$\overline{AC}^2 = 1 + \Phi^2$

Siga AEFG el quadrat d'àrea igual a $S_{ABCD} = \Phi$
El quadrat de la diagonal del quadrat és:
$\overline{AF}^2 = 2\Phi$

La proporció entre els quadrats de les diagonals és:
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AF}^2} = \frac{1 + \Phi^2}{2\Phi} = \frac{1 + 1 + \Phi}{2\Phi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{2} + \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
La proporció entre les diagonals és:
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{20}}{2} \approx 1.1180$$

2248.- En un quadrat ABCD siga un punt E del costat $\overline{AD}$ i un punt F del costat $\overline{AB}$. Dibuixem una perpendicular per E al segment $\overline{CE}$ i una perpendicular per F al segment $\overline{CF}$. Les dues perpendicular es tallen en el punt M.

Tenint en compte que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEF}$ és la meitat de l'àrea del pentàgon BCEEF, demostreu que el punt M pertany a la diagonal $\overline{AC}$.
KöMaL, B5040



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$ i centre O
Siga $\overline{AF} = a, \overline{AE} = b$
Siga $\alpha = \angle BCF = \angle AFM, \beta = \angle DCE = \angle AEM$

$$\operatorname{tg}\alpha = 1 - a, \operatorname{tg}\beta = \frac{1-b}{\sqrt{b^2 - 2b + 2}}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEF}$ és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AEF}, \overset{\Delta}{CBF}, \overset{\Delta}{CDE}$

$$S_{CEF} = 1 - \left(\frac{ab}{2} + \frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2}\right) = \frac{a+b-ab}{2}$$

L'àrea del pentàgon BCDEF és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$

$$S_{BCDEF} = 1 - \frac{ab}{2}$$

Per hipòtesi, que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEF}$ és la meitat de l'àrea del pentàgon BCEEF, aleshores:

$$2 \cdot \frac{a+b-ab}{2} = 1 - \frac{ab}{2}$$

Simplificant: $b = \frac{2-2a}{2-a}$

Siga $\gamma = \angle AFE$

$$tg\,\gamma = \frac{b}{a} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

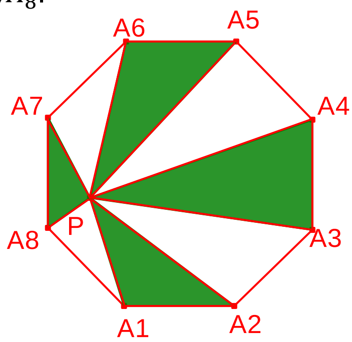
$$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2(1-a)}{1-(1-a)^2} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$$

Aleshores, $\gamma = 2\alpha$
$\angle MFE = 2\alpha - \angle MFA = \alpha$

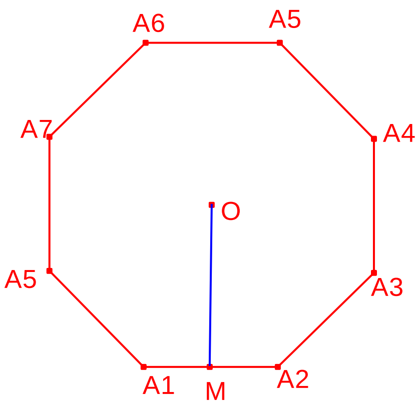
Aleshores la recta FM és bisectriu de l'angle $\gamma = \angle AFE$.
Anàlogament la recta EM és bisectriu de l'angle $\angle AEF$

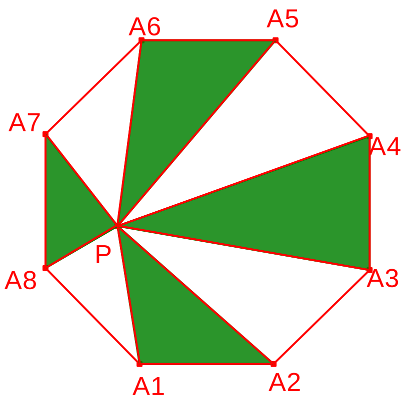
M és el incentre del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$
Aleshores, $\angle MAF = 45°$
Per tant, M pertany a la diagonal $\overline{AC}$

2249.- Siga P un punt interior d'un octògon regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$.
Demostreu que la suma de les àrees dels triangles
$A_1\overset{\Delta}{A_2}P, A_3\overset{\Delta}{A_4}P, A_5\overset{\Delta}{A_6}P, A_7\overset{\Delta}{A_8}P$ és igual a la suma de les àrees dels
triangles $A_2\overset{\Delta}{A_3}P, A_4\overset{\Delta}{A_5}P, A_6\overset{\Delta}{A_7}P, A_8\overset{\Delta}{A_1}P$
KöMaL B5038



Solució:





Els costats oposats d'un octògon regular són paral·lels i la distància entre ells és dues vegades l'apotema de l'octògon.

Siga c el costat de l'octògon regular i a l'apotema.
L'àrea de l'octògon regular és:
$$S_8 = \frac{8c}{2}a$$
La suma de les àrees dels triangles $A_1\overset{\Delta}{A_2}P,\ A_5\overset{\Delta}{A_6}P$ és:
$$S_{A_1A_2P} + S_{A_1A_2P} = \frac{1}{2}c \cdot 2a$$
Anàlogament.
$$S_{A_3A_4P} + S_{A_7A_8P} = \frac{1}{2}c \cdot 2a$$

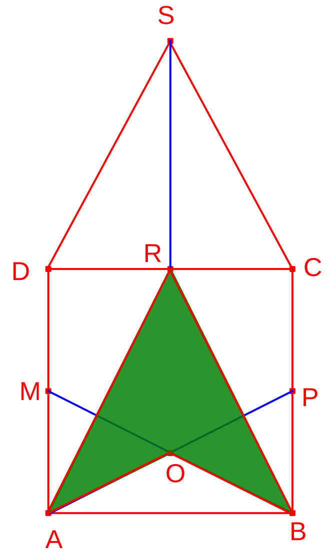
La suma dels 4 triangles és:
$$S_{A_1A_2P} + S_{A_1A_2P} + S_{A_3A_4P} + S_{A_7A_8P} = 2ca$$
Aleshores,
$$S_{A_1A_2P} + S_{A_1A_2P} + S_{A_3A_4P} + S_{A_7A_8P} = \frac{1}{2}S_8$$
Aleshores, que la suma de les àrees dels triangles $A_1\overset{\Delta}{A_2}P, A_3\overset{\Delta}{A_4}P, A_5\overset{\Delta}{A_6}P, A_7\overset{\Delta}{A_8}P$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $A_2\overset{\Delta}{A_3}P, A_4\overset{\Delta}{A_5}P, A_6\overset{\Delta}{A_7}P, A_8\overset{\Delta}{A_1}P$ i és igual a la meitat de l'àrea de l'octògon regular.

Generalització:
El problema es pot generalitzar per a qualsevol polígon regular de costats parells 2n.
La suma de les àrees dels n triangles pintats alternativament des d'un punt interior P és igual a la meitat de l'àrea del polígon regular.

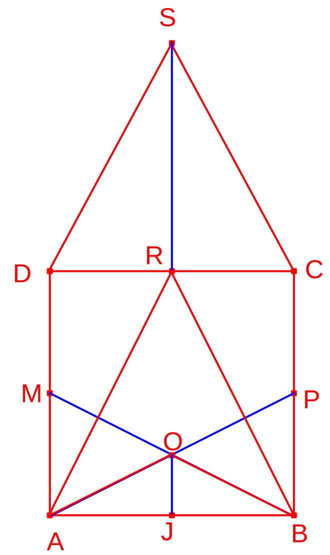
2250.- En la figura ABCD és un quadrat de 128 cm de perímetre.
M, P i R són punts migs dels costats del quadrat.
$\overline{CS} = \overline{DS}$, $\overline{CS} = \overline{RS} + 4$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{RCS}$ és 80 cm.

a) Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{CSD}$
b) Calculeu l'àrea del quadrilàter BCSR.
c) Calculeu l'àrea de la part ombrejada..
d) Calculeu l'àrea del quadrilàter APSD.



Solució:
El costat del quadrat ABCD és:
$\overline{AB} = \frac{128}{4} = 32$
$\overline{RC} = 16$
Siga $x = \overline{CS}$. $\overline{RS} = x - 4$
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{RCS}$ és 80 cm.
Aleshores, $16 + x + x - 4 = 80$
Resolent l'equació:
$x = 34$
$\overline{RS} = x - 4 = 30$
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{RCS}$ és rectangle ja que $34^2 = 16^2 + 30^2$



a)
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{CSD}$ és:
$P_{CSD} = 32 + 2x = 100\ cm$
b)
L'àrea del quadrilàter BCSR és:
$S_{BCSR} = \frac{1}{2}\overline{RS} \cdot (\overline{RS} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}16(32 + 30) = 496\ cm^2$
c)
Siga J el punt mig del costat $\overline{AB}$
$S_{OJB} = \frac{1}{4}S_{MAB} = \frac{1}{4}\frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{16}S_{ABCD}$
$S_{ABO} = 2 \cdot S_{OJB} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$
$S_{ADR} = S_{BCR} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$
L'àrea ombrejada és:
$S_{AOBR} = S_{ABCD} - \left(\frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{1}{4}S_{ABCD} + \frac{1}{8}S_{ABCD}\right) = \frac{3}{8}S_{ABCD} = 384\ cm^2$
d)
L'àrea del quadrilàter APSD és:
$S_{APSD} = S_{ABCD} + S_{CSD} - (S_{ABP} + S_{PCS}) = 32^2 + \frac{1}{2}32 \cdot 30 - \left(\frac{1}{4}32^2 + \frac{1}{8}32^2\right) = 1120\ cm^2$