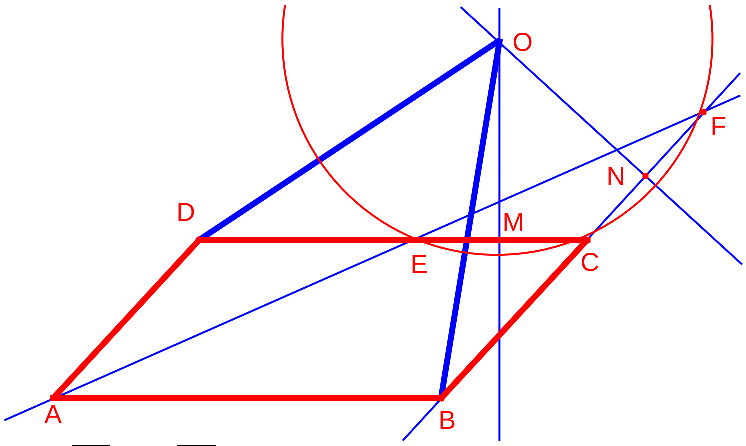
Problemes de Geometria per a l'ESO 226

2251.- Siga ABCD un paral·lelogram amb $\angle BAD$ menor de 90º i tal que $\overline{AB}$ és major que $\overline{BC}$.
La bisectriu de l'angle $\angle BAD$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt E i a la recta BC en F.
Siga O el centre de la circumferència que passa per C, E i F.
Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{BDO}$ és isòsceles.

Solució:



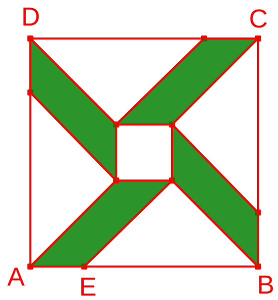
Siga $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b$, $\angle BAE = \angle EAD = \alpha$
Aleshores, $\angle BAE = \angle AED = \alpha$.
$\angle ABC = 180° - 2\alpha$
Aleshores, $\angle AFB = \alpha$
Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{ABF}$ són isòsceles.
$\overline{DE} = \overline{AD} = b, \overline{BF} = \overline{AB} = a$
Aleshores, $\overline{CE} = \overline{CF} = a - b$
Siga M el punt mig del segment $\overline{CE}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{CF}$
Les mediatrius dels segment $\overline{CE}, \overline{CF}$ passen pel centre de la circumferència i per els punts migs M, N, respectivament.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EMO}, \overset{\Delta}{CNO}$ són iguals, aleshores:
$\overline{OM} = \overline{ON}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DMO}, \overset{\Delta}{BNO}$.
Aleshores, $\overline{OD} = \overline{OB}$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BDO}$ és isòsceles.

2252.- En l'interior del quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$ s'ha dibuixat un quadrat concèntric.

Determineu la mesura del segment $\overline{AE}$ a fi que l'àrea ombrejada siga:

a) La meitat de l'àrea del quadrat ABCD.

b) La quarta part de l'àrea del quadrat ABCD.

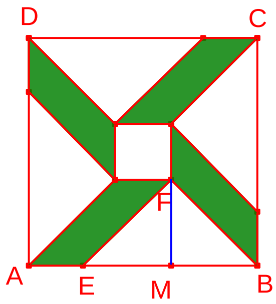


Solució:

Siga $\overline{AE} = a$

Siga M el punt mig del segment $\overline{EB}$

$$\overline{EM} = \overline{FM} = \frac{a-x}{2}$$



a)

L'àrea de la zona ombrejada és la meitat de l'àrea del quadrat ABCD

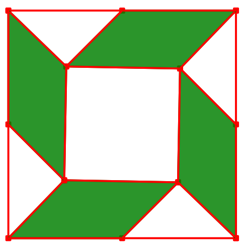
$$4x\frac{a-x}{2} = \frac{1}{2}a^2$$

Simplificant:

$$4x^2 - 4ax + a^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1}{2}a$$



b)

L'àrea de la zona ombrejada és la quarta part de l'àrea del quadrat ABCD

$$4x\frac{a-x}{2} = \frac{1}{4}a^2$$

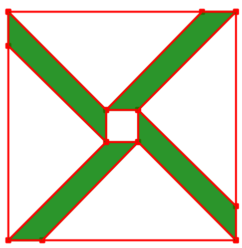
Simplificant:

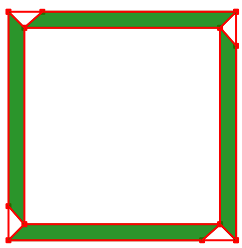
$$8x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

Resolent l'equació:

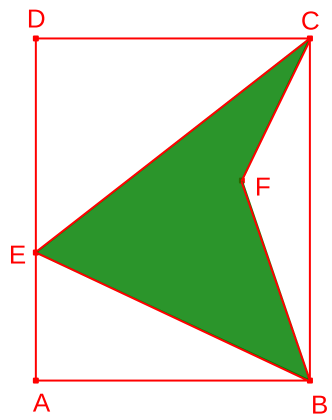
$$x = \frac{2+\sqrt{2}}{4}a, \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$$

El problema té dues solucions:





2253.- En la figura, ABCD és un rectangle de 54 cm de perímetre tal que $4 \cdot \overline{BC} = 5 \cdot \overline{AB}$.
El punt E pertany al costat $\overline{AD}$.
El punt F és interior al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ i està a 3 cm del costat $\overline{BC}$.
Calculeu l'àrea de la figura ombrejada.



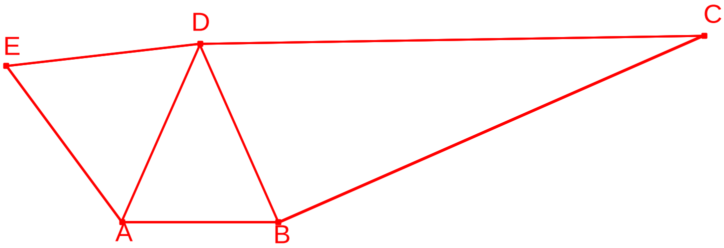
Solució:
Siga $\overline{AB} = x,\ \overline{BC} = \frac{5}{4}x$
El perímetre del rectangle ABCD és 54 cm:
$$2x + 2 \cdot \frac{5}{4}x = 54$$
Resolent l'equació:
$x = \overline{AB} = 12.$
Aleshores, $\overline{BC} = 15.$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és la meitat de l'àrea del rectangle ABCD:
$S_{BCE} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 15 = 90\ cm^2.$
L'àrea del quadrilàter ombrejat BDCE és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$:
$$S_{BDCE} = S_{BCE} - S_{BCF} = 90 - \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 = \frac{135}{2} = 67.5\ cm^2$$

2254.- En la figura $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{AB}$, el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és equilàter, $\angle DAB = \angle DBA$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és 42 cm

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 90 cm

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és 45 cm



Calculeu:
a) El perímetre de ABDE.
b) El perímetre de ABCD
c) El perímetre de ABCCDE

Solució:
Siga $x = \overline{AB}$
Aleshores, $\overline{BC} = 3x$

Com el perímetre del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$ és 42 cm.

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{42 - x}{2}$$

El triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és equilàter, aleshores:

$$\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{AE} = \frac{42 - x}{2}$$

Com el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BDE}$ és 45 cm

$$3 \cdot \frac{42 - x}{2} = 45$$

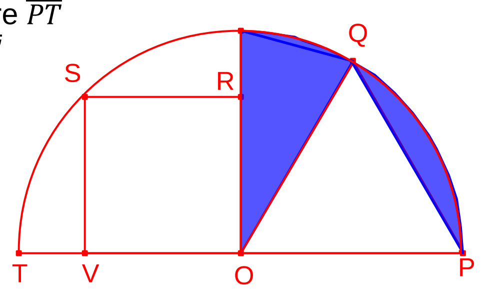
Resolent l'equació:
$x = \overline{AB} = 12$

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{AE} = \frac{42 - x}{2} = 15$$

$\overline{BC} = 3x = 36$

Com el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 90 cm
$\overline{CD} = 90 - (36 + 15) = 39$
Per tant,
El perímetre de ABDE és:
$P_{ABDE} = 3 \cdot \overline{AD} + \overline{AB} = 57\ cm$
El perímetre de ABCD és:
$P_{ABCD} = \overline{AD} + 4 \cdot \overline{AB} + \overline{CD} = 102\ cm$
El perímetre de ABCDE és:
$P_{ABDE} = 2 \cdot \overline{AD} + 4 \cdot \overline{AB} + \overline{CD} = 117\ cm$

2255.- En la figura, hi ha un semicercle de centre O i diàmetre $\overline{PT}$
Q i S són punts del semicercle, V és un punt del diàmetre $\overline{PT}$



El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter.
ORSV és un quadrat.
L'àrea de la regió ombrejada és $881\ cm^2$
Calculeu l'àrea del quadra ORSV.

Solució:
Siga $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OS} = r$ radi de la semicircumferència.
L'àrea del quadrat ORSV és:

$$S_{ORSV} = \frac{1}{2}r^2$$

L'àrea de la zona ombrejada és igual a un quadrant de radi r menys l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$

$$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = 881$$

Aleshores,

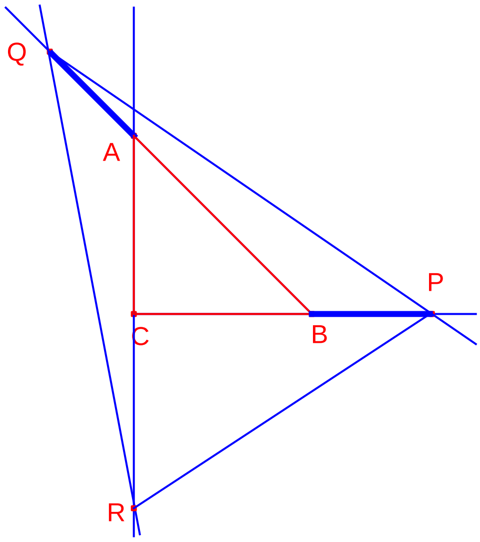
$$r^2 = \frac{4}{\pi - \sqrt{3}}881$$

Per tant, l'àrea del quadrat és:

$$S_{ORSV} = \frac{1}{2}r^2 = \frac{2}{\pi - \sqrt{3}}881 \approx 1250.05\ cm^2$$

2256.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle i isòsceles amb $C = 90°$
Considerem un punt P de la recta BC, amb B entre C i P, considerem també, un punt Q de la recta AB, amb A entre B i Q tal que $\overline{BP} = \overline{AQ}$
Siga R en la recta AC, Amb C entre A i R, tal que $\angle PQR = 45°$
Determineu la mesura de l'angle $\angle PRQ$.

Solució:
Siga $\alpha = \angle CPQ = \alpha$



$\angle PBQ = RAQ = 135°$

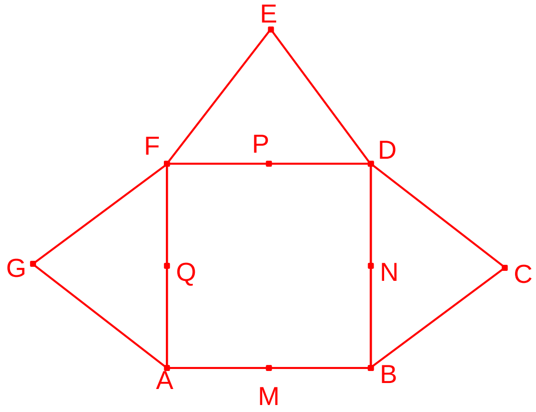
$\angle PQB = 45° - \alpha, \angle RQA = 45° - (45° - \alpha) = \alpha$
Aleshores, $\angle BPQ = \angle RQA = \alpha$
$\overline{BP} = \overline{AQ}$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{BPQ}, \overset{\Delta}{AQR}$ són iguals (ACA)
Aleshores, $\overline{QR} = \overline{QP}$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és isòsceles.
$\angle PRQ = \angle RPQ = \dfrac{180° - \angle PQR}{2} = \dfrac{180° - 45°}{2} = 67°30'$

2257.- En la figura, M, N, P, Q són els punts mig dels costat del quadrat ABDF.
$\overline{EP}$ és perpendicular a $\overline{FD}$.
$\overline{GQ}$ és perpendicular a $\overline{AF}$.
$\overline{NC}$ és perpendicular a $\overline{BD}$.
$\overline{GQ} = \overline{NC} = \overline{PE}$
$\overline{ME} = 20\ cm, \overline{GC} = 28\ cm.$
Calculeu:

a) El perímetre de AMPF.
b) L'àrea de ABCDF.
c) L'àrea de AMNDEF.



Solució:
Siga $\overline{AB} = x$, costat del quadrat.
Els tres triangles exteriors són iguals i isòsceles.
$\overline{ME} = 20$ aleshores, $\overline{PE} = 20 - x$
$\overline{PE} = 28$ aleshores, $\overline{GQ} = \overline{NC} = \frac{28-x}{2}$.
Com que $\overline{GQ} = \overline{NC} = \overline{PE}$

$$20 - x = \frac{28 - x}{2}$$

Resolent l'equació:
$x = 12$
$\overline{GQ} = \overline{NC} = \overline{PE} = 20 - x = 8\ cm$
a)
El perímetre de AMPF és:
$P_{AMPF} = 3x = 36\ cm$

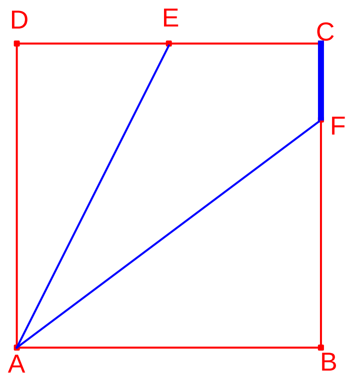
b)
L'àrea de ABCDF és:

$$S_{ABCDF} = S_{ABDF} + S_{BCD} = 12^2 + \frac{1}{2}12 \cdot 8 = 192\ cm^2$$

c)
L'àrea de AMNDEF és:

$$S_{AMNDEF} = S_{ANDF} + S_{BCD} = \frac{12+6}{2} \cdot 12 + \frac{1}{2}12 \cdot 8 = 156\ cm^2$$

2258.- Siga ABCD un quadrat de costat 2.
Siga E el punt mig del costat $\overline{CD}$
Considerem el punt F del costat $\overline{BC}$ tal que $\angle DAE = \angle EAF$.
Determineu la mesura del segment $\overline{CF}$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 2$, aleshores, $\overline{DE} = 1, \overline{AE} = \sqrt{5}$.
Siga $\overline{CF} = x$
Siga $\angle DAE = \angle EAF = \alpha$

$$tg\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\angle DAE = \angle EAF = 2\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$

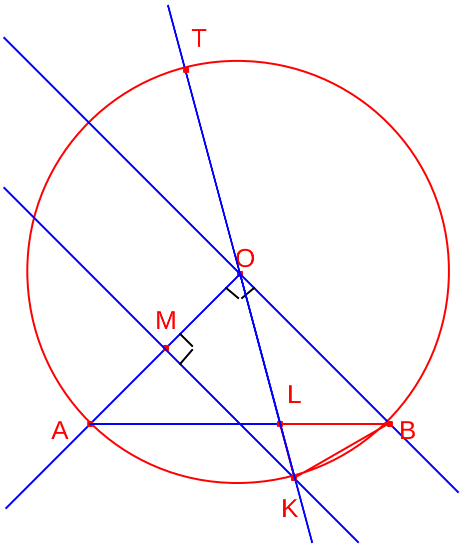
$$\frac{2}{2 - x} = tg2\alpha = \frac{4}{3}$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1}{2}$$

2259.- Siguen punts d'una circumferència de centre O tal que $\angle AOB = 90°$.
La perpendicular al segment $\overline{OA}$ traçada pel seu punt mig punt mig talla el menor arc $\widehat{AB}$ en K, i els segments $\overline{AB}$ i $\overline{KO}$ es tallen en el punt L.

Calculeu la mesura dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BKL}$.

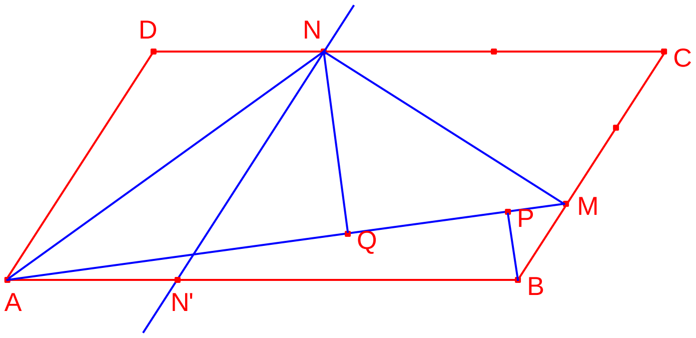


Solució:
Siga M el punt mig del segment $\overline{OA}$
Siga $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ radi de la circumferència.
$\overline{OM} = \frac{1}{2}r$
Aleshores, $\angle AOK = 60°$
$\angle ABK$ és angle inscrit en la circumferència i abraça 60º
Aleshores, $\angle LBK = \frac{1}{2}60° = 30°$.

Considerem el diàmetre $\overline{KT}$.
$\widehat{AT} = 180° - 60° = 120°$
$\widehat{KB} = 90° - 60° = 30°$
$\angle BLK$ és angle interior en la circumferència.
Aleshores, $\angle BLK = \frac{\widehat{AT}+\widehat{KB}}{2} = \frac{120°+30°}{2} = 75°$
$\angle LKB = 180° - (\angle LBK + \angle BLK) = 75°$

2260.- En un paral·lelogram ABCD, siga M el punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{MC} = 2 \cdot \overline{BM}$ i siga N el punt del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{NC} = 2 \cdot \overline{DN}$.
Si la distància del punt B a la recta AM és 3, calculeu la distància del punt N a la recta AM.

Solució:



Siga $\overline{BP} = 3$ distància de B a la recta AM.
Siga $\overline{NQ}$ distància de N a la recta AM.
La paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per N talla el costat $\overline{AB}$ en el punt N'.

Siga S l'àrea del paral·lelogram ABCD.

$$S_{ABM} = \frac{1}{6}S$$

$$S_{ADN} = \frac{1}{6}S$$

$$S_{BCNN'} = \frac{2}{3}S$$

$$S_{CMN} = \frac{2}{3}S_{BCN} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}S_{BCNN'} = \frac{2}{9}S$$

$$S_{AMN} = S - (S_{ABM} + S_{ADN} + S_{CMN}) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9}\right)\right)S = \frac{4}{9}S$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{AMN}$ tenen la mateixa base $\overline{AM}$ les altures són proporcionals a les àrees:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABM}} = \frac{\overline{NQ}}{3}$$

$$\frac{\frac{4}{9}S}{\frac{1}{6}S} = \frac{\overline{NQ}}{3}$$

Simplificant, $\overline{NQ} = 8$