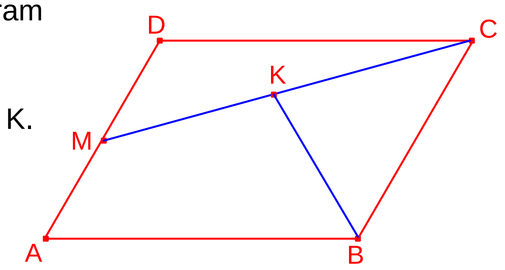
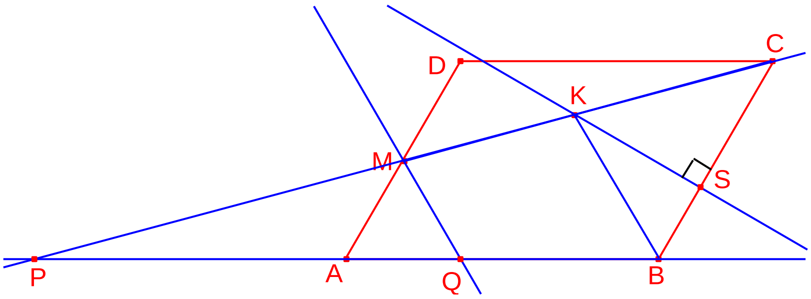
Problemes de Geometria per a l'ESO 227

2261.- Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ del paral·lelogram ABCD.
$\overline{AD} = 2, \overline{AB} = 1 + \sqrt{3}, A = 60°$
La bisectriu de l'angle B talla el segment $\overline{CM}$ en el punt K.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BKC$.



Solució:



Les rectes CM i AB és tallen en el punt P.
Els triangles $\overset{\Delta}{CDM}, \overset{\Delta}{PAM}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PA} = \overline{CD} = 1 + \sqrt{3}$
$\angle ABK = 60°$
Pel punt M tracem una paral·lela al segment $\overline{BK}$ que talla la recta AB en el punt Q.
$\overline{MQ} = \overline{AM} = \overline{AQ} = 1$
Els triangles $\overset{\Delta}{PQM}, \overset{\Delta}{PBK}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PQ}}$$

$$\frac{\overline{BK}}{1} = \frac{2\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2 + \sqrt{3}}$$

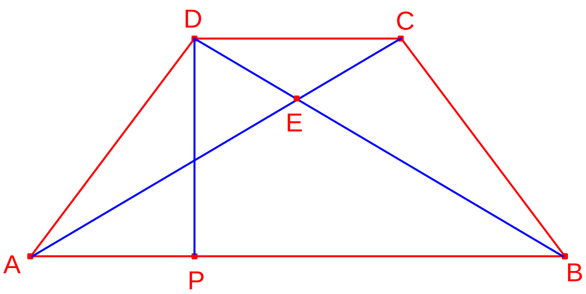
$$\overline{BK} = 2\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Siga S la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.
$\angle SBK = 60°$
Aleshores, $\angle BKS = 30°$, $\overline{BS} = \frac{1}{2}\overline{BK} = \sqrt{3} - 1$, $\overline{KS} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BK} = 3 - \sqrt{3}$

$\overline{CS} = 2 - \overline{BS} = 3 - \sqrt{3}$
Aleshores, $\overline{CS} = \overline{BS} = 3 - \sqrt{3}$.
Per tant, $\angle CKS = 45°$

Aleshores, $\angle BKC = 75°$

2262.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB} = 351, \overline{CD} = 135$.
Siga $\overline{BC} = \overline{AD} = 180$.
Siga E la intersecció de les diagonals.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$.



Solució:
Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$
$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = \frac{351 - 135}{2} = 108$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:
$\overline{DP} = \sqrt{180^2 - 108^2} = 144$.
L'àrea del trapezi ABCD és:
$S_{ABCD} = \frac{351+135}{2} 144 = 34992$.

Siga Q la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$
Siga $h = \overline{EQ}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$
L'altura del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és $144 - h$

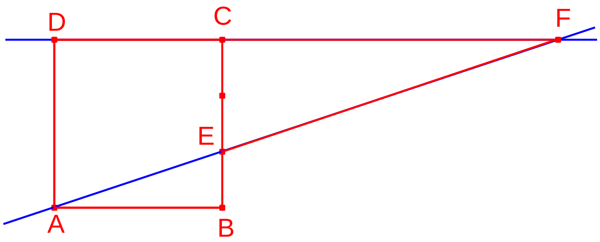
Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{CDE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{h}{144 - h} = \frac{351}{135} = \frac{13}{5}$$
Resolent l'equació:
$h = 104$. L'altura del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$ és $144 - h = 40$

Aleshores les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{CDE}$ és:
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} 351 \cdot 104 = 18252, S_{CDE} = \frac{1}{2} 135 \cdot 40 = 2700$$
Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{BCE}$ són iguals
Aleshores l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és igual a la meitat de l'àrea del trapezi ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{CDE}$:

Aleshores, $S_{ADE} = \frac{1}{2}\left(S_{ABCD} - \left(S_{ABE} + S_{CDE}\right)\right) = \frac{34992-(18252+2700)}{2} = 7020$

2263.- En el quadrat ABCD siga E del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{EC} = 2 \cdot \overline{BE}$.
La recta que passa pels punts A, E talla la recta que conté el costat $\overline{CD}$ en F.
Si l'àrea del polígon ABEFD és 60 calculeu l'àrea del quadrat ABCD.

Solució:



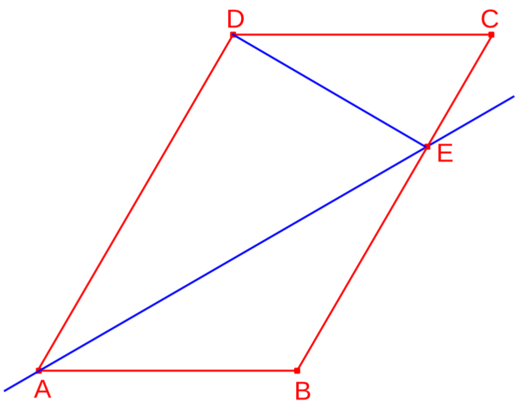
Siga S l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$.
L'àrea del quadrat ABCD és $S_{ABCD} = 6S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{FCE}$ són semblants i de raó 1:2.
Aleshores, $S_{FCD} = 4S$

L'àrea del polígon ABEFD és igual a l'àrea del quadrat ABCD i del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.
$S_{ABEFD} = 6S + 4S = 60$
$10S = 60$
$S = 6$
$S_{ABCD} = 6S = 36$

2264.- Siga el paral·lelogram ABCD amb $\overline{AB} = \overline{CD} = 34, \overline{BC} = \overline{AD} = 51, A = 60°$.
La bisectriu a l'angle A talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E.

a) Demostreu que $\overline{DE}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.
b) Calculeu l'àrea del paral·lelogram ABCD.



Solució 1:
a)
$\angle EAB = 30°, \angle ABC = 120°$
Aleshores, $\angle AEB = 30°$
Per tant, $\overline{BE} = \overline{AB} = 34$
$\overline{CE} = 51 - 34 = 17$

$\overline{CE} = 17, \overline{CD} = 34, \angle DCB = 60°$, aleshores, $\angle CED = 90°$.
Aleshores, $\overline{DE}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.
b)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CED}$

$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD} = 17\sqrt{3}$$

L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$$S_{ABCD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} = 51 \cdot 17\sqrt{3} = 867\sqrt{3}$$

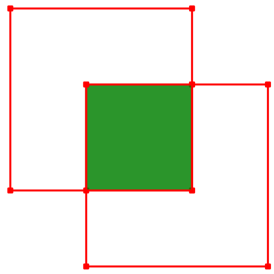
Solució 2:
b)
L'àrea del paral·lelogram ABCD és:

$$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin 60° = 34 \cdot 51\frac{\sqrt{3}}{2} = 867\sqrt{3}$$

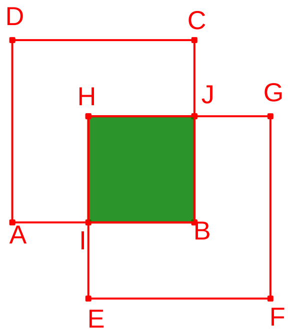
La mesura del segment $\overline{DE}$ és igual a l'altura del paral·lelogram ABCD sobre el costat $\overline{BC}$.

$S_{ABCD} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} = 867\sqrt{3}$
$S_{ABCD} = 51 \cdot \overline{DE} = 867\sqrt{3}$
$\overline{DE} = 17\sqrt{3}$
a)
Notem que $\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{17\sqrt{3}}{34} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i a més a més $\angle DCB = 60°$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CED}$ és rectangle.
Aleshores, $\overline{DE}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.

2265.- La figura està formada per dos quadrats iguals sobreposats.
La part comuna és un quadrat pintat.
L'àrea d'un quadrat gran és de $144\ cm^2$ i el perímetre de la figura és de 68 cm.
Calculeu l'àrea del quadrat pintat.



Solució.
Siguen ABCD i EFGH els quadrats d'àrea $144\ cm^2$.
El costat del quadrat és $\overline{AB} = 12$.
Siga $\overline{AI} = x$
El perímetre de la figura és de 68 cm:
$4 \cdot 12 + 4x = 68$
Resolent l'equació:
$x = 5$
Els costat del quadrat HIBJ és:
$\overline{IB} = 12 - x = 7$

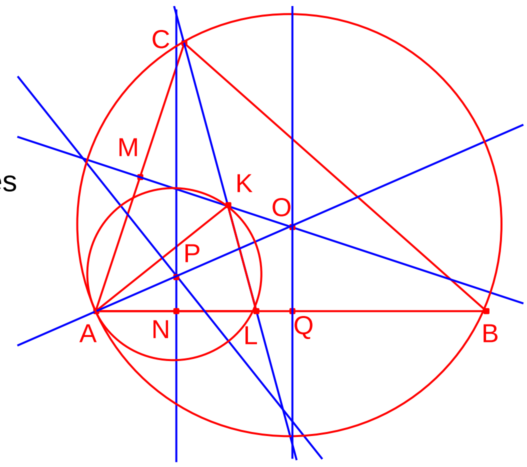


L'àrea del quadrat HIBJ és:
$S_{HIBJ} = 7^2 = 49\ cm^2$

2266.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga $\overline{CL}$ la bisectriu de l'angle C amb L en el costat $\overline{AB}$.
La perpendicular a $\overline{AC}$ pe seu punt mig, talla el segment $\overline{CL}$ en el punt K.

Demostreu que les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{AKL}$ són tangents.

Solució:



Siga O el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi R

Siga P el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{AKL}$ de radi r
Totes dues circumferències passe3n per A.
A fi que les dues circumferències siguen tangents és suficient provar que A, P i O estan alineats.

La recta MK és mediatriu dels costat $\overline{AC}$
Aleshores, $\overline{AK} = \overline{CK}$.
Aleshores, $\angle KCA = \angle KAC = \frac{C}{2}$
Aleshores, $\angle AKL = C$:

Aplicant la propietat de la bisectriu $\overline{CL}$

$$\frac{\overline{AL}}{b} = \frac{\overline{BL}}{a} = \frac{c}{a+b}$$

$$\overline{AL} = \frac{bc}{a+b}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKL}$:

$$\frac{\frac{bc}{a+b}}{\sin C} = 2r$$

Dividint ambdues expressions i simplificant:

$$\frac{r}{R} = \frac{b}{a+b}$$

Siga N el punt mig del segment $\overline{AL}$
Siga Q el punt mig del segment $\overline{AB}$

$$\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AL} = \frac{bc}{2(a+b)}, \overline{AQ} = \frac{c}{2}$$

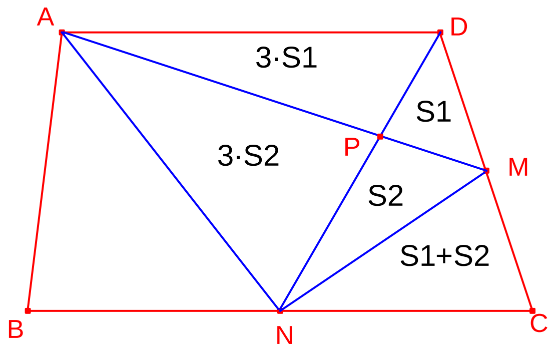
Vegem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANP}$ i $\overset{\Delta}{AQO}$ són semblants.

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AQ}} = \frac{\frac{bc}{2(a+b)}}{\frac{c}{2}} = \frac{b}{a+b} = \frac{r}{R} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}}$$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANP}$ i $\overset{\Delta}{AQO}$, per tant els punts A, P, O estan alineats.

2267.- Siga ABCD un trapezi amb costats paral·lels $\overline{BC}, \overline{DA}$.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{CD}, \overline{BC}$, respectivament.
Siga P la intersecció dels segments $\overline{AM}, \overline{DN}$.
Si $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PM}$, calculeu $\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$

Solució.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PMD}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és $3 \cdot S_1$
Siga Siga S_2 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PMN}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APN}$ és $3 \cdot S_2$

Siga S_1 l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMN}$ és igual a l'àrea $\overset{\Delta}{DMN}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMN}$ és $S_1 + S_2$

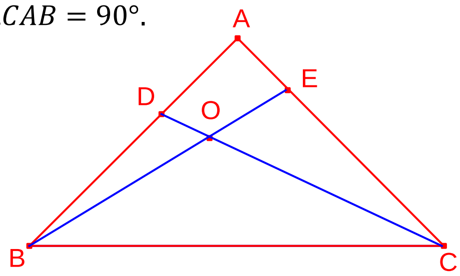
Els triangles $\overset{\Delta}{NCD}, \overset{\Delta}{ADN}$ tenen la mateixa altura aleshores:

$$\frac{S_{NCD}}{S_{ADN}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{AD}} = \frac{2(S_1 + S_2)}{3(S_1 + S_2)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{2 \cdot \overline{CN}}{\overline{AD}} = \frac{4}{3}$$

2268.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$ i $\angle CAB = 90°$.
$\angle DCA = 20°, \angle COB = 4 \cdot \angle OBC$
Calculeu la mesura dels angles $\angle COB, \angle ABE$.



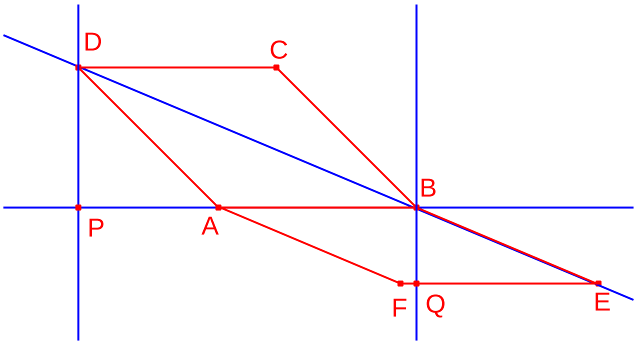
Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i isòsceles, $B = C = 45°$.
Siga $\alpha = \angle OBC$, $\angle COB = 4\alpha$
$\angle OCB = 45° - 20° = 25°$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ és 180º:
$\alpha + 4\alpha + 25° = 180°$
Resolent l'equació:
$\alpha = 31°$
$\angle COB = 4\alpha = 124°, \angle ABE = 45° - \alpha = 14°$

2269.- Siga ABCD un rombe de costats $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 13$.
Sobre el costat $\overline{AB}$ construïm un rombe BAFE exterior al rombe ABCD i tal que el costat $\overline{AF}$ és paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$.
Si l'àrea del rombe BAFE és igual a 65, calculeu l'àrea del rombe ABCD.

Solució:



Els dos rombres tenen per costat 13.
Siga P la projecció de D sobre la recta AB.
Siga Q la projecció de B sobre la recta FE.
L'àrea del rombe BAFE és igual a 65.
$S_{BAFE} = 65 = \overline{FE} \cdot \overline{BQ}$
$\overline{BQ} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQE}$:
$\overline{EQ} = 12$

Siga $x = \overline{DP}, y = \overline{AP}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPA}$:
$x^2 + y^2 = 13^2$ (1)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DPB}, \overset{\Delta}{BQE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{x}{y+13} = \frac{5}{12}$ (2)
Considerem el sistema format per les equacions (1) (2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13^2 \\ \dfrac{x}{y+13} = \dfrac{5}{12} \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{120}{13} \\ y = \dfrac{119}{13} \end{cases}$$

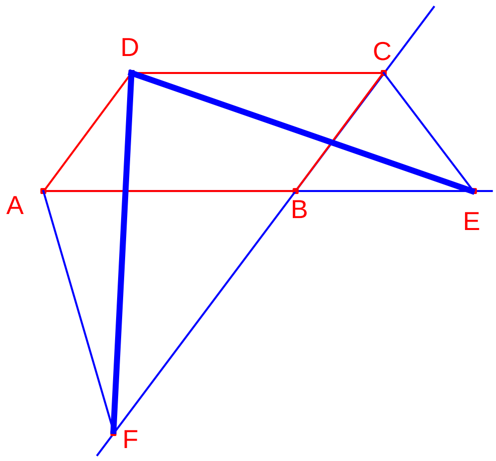
L'àrea del rombe ABCD és:

$$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{DP} = 13 \cdot \frac{120}{13} = 120$$

2270.- Siga ABCD un paral·lelogram amb A menor de 90º.
Siga E un punt de la recta AB, amb B entre A i E tal que $\overline{CE} = \overline{CB}$
Siga F un punt de la recta BC, amb B entre C i F, tal que $\overline{AF} = \overline{AB}$
Calculeu el quocient $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}$

Solució:
Siga $\angle BAD = \alpha < 90°$
$\angle EBC = \alpha$
$\angle BCE = 180° - 2\alpha$
Aleshores, $\angle DCE = 180° - \alpha$

$\angle ABF = \alpha$
$\angle BAF = 180° - 2\alpha$
Aleshores, $\angle DAF = 180° - \alpha$



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{AFD}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{DE} = \overline{DF}$
Per tant, $\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = 1$