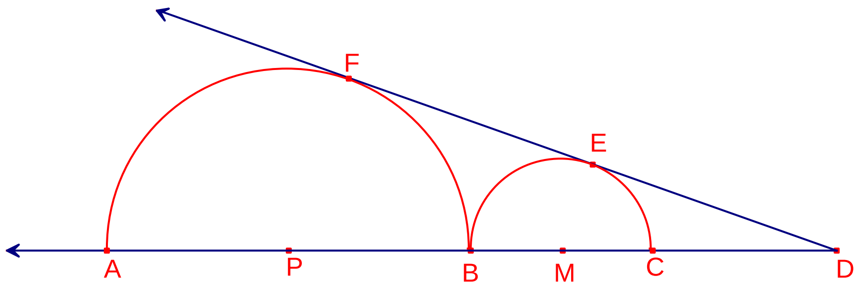
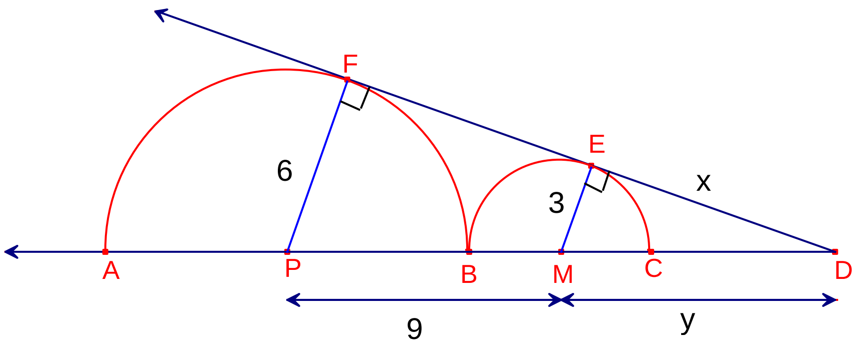
2271.- En la figura, dos semicercles de centre P i M són tangents en el punt B.
Si La recta DF és tangent al dos semicercles en els punts F i E.
Si $\overline{PB} = \overline{BC} = 6$, calculeu la mesura del segment $\overline{DE}$.



Solució:



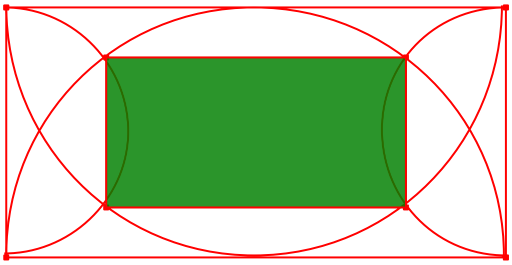
$\overline{PF} = \overline{PB} = 6$
$\overline{MB} = \overline{ME} = 3$

Siga $\overline{DM} = y$

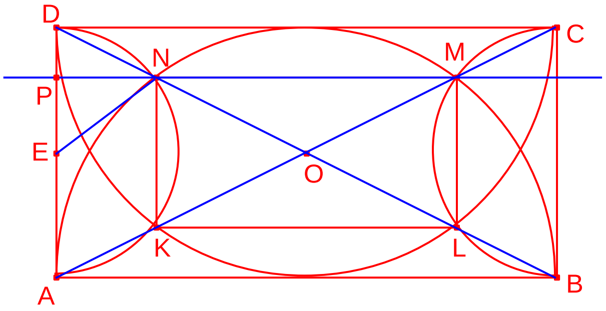
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEM}.\overset{\Delta}{DFP}$ són semblants i de raó 1:2
Aplicant el teorema de Tales:
Aleshores, $y = 9$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEM}$
$\overline{DE} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$

2272.- Dins d'un rectangle s'han dibuixat 4 semicircumferències de diàmetres els costats.
La intersecció de les semicircumferències formen un rectangle.
Determineu la proporció entre les àrees dels dos rectangles.



Solució:



Siga ABCD el rectangle exterior.
Siga KLMN el rectangle interior.
La circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ és tangent al costat $\overline{CD}$, aleshores
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD} = 2r$

Siga O el centre del rectangle ABCD.
Notem que els rectangles KLMN, ABCD són homotètics de centre O ja que
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{ON}}$$

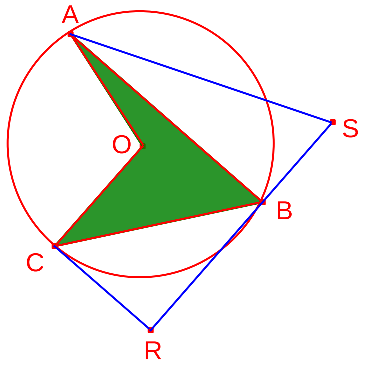
Siga $\overline{KN} = a$, aleshores, $\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KN} = 2a$

La raó entre les àrees dels dos rectangles és
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{KN}}{\overline{AD}}\right)^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

Siga P la projecció de N sobre el costat $\overline{AD}$
Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$
$$\overline{PN} = \frac{2r - 2a}{2} = r - a, \overline{EN} = \frac{1}{2}r, \overline{PE} = \frac{a}{2}$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPN}$
$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 = (r-a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$\frac{r^2}{4} = r^2 - 2ar + a^2 + \frac{a^2}{4}$$
$$5a^2 - 8ar + 3r^2 = 0$$
$$\frac{a}{r} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

2273.- En la figura, A, B i C són punts de la circumferència de centre O.
$\overline{SR}$ és perpendicular a $\overline{AB}$
$\overline{CR}$ és perpendicular a $\overline{OC}$
$\overline{CR}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.
$\overline{AS} = \overline{SR}$
La longitud de la circumferència és $50\pi\ cm$
L'altura del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ corresponent al costat $\overline{AB}$ és $7\ cm$.

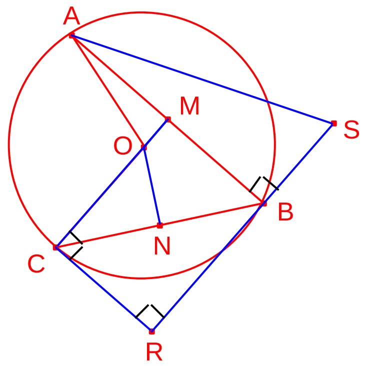
a) Calculeu el perímetre i l'àrea de AOCB.
b) Calculeu el perímetre i l'àrea de OCRB.
c) Calculeu el perímetre i l'àrea de AOBS.



Solució:
El radi de la circumferència és:

$$r = \frac{50\pi}{2\pi} = 25$$

$\angle CRB = 90°$
Aleshores, CRBM és un rectangle.



Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$
L'altura del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ corresponent al costat $\overline{AB}$ és $\overline{OM} = 7$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$

$$\overline{CM} = \overline{RB} = 25 + 7 = 32, \overline{CR} = \overline{BM} = 24$$

Siga $\overline{BS} = x, \overline{AS} = 32 + x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABS}$

$$(32 + x)^2 = x^2 + 48^2$$

Resolent l'equació $x = 20$. $\overline{BS} = 20, \overline{AS} = 52$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CRB}$

$$\overline{BC} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CNO}$

$$\overline{ON} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$$

a)
El perímetre de AOCB és:

$$P_{AOCB} = 2 \cdot 25 + 48 + 40 = 138\ cm$$

L'àrea de AOCB és:

$$S_{AOCB} = S_{AOB} + S_{OBC} = \frac{48 \cdot 7}{2} + \frac{40 \cdot 15}{2} = 468\ cm^2$$

b)
El perímetre de OCRB és:

$$P_{OCRB} = 2 \cdot 25 + 24 + 32 = 106\ cm$$

L'àrea del trapezi rectangle OCRB és:

$$S_{OCRB} = \frac{25 + 32}{2} 24 = 684\ cm^2$$

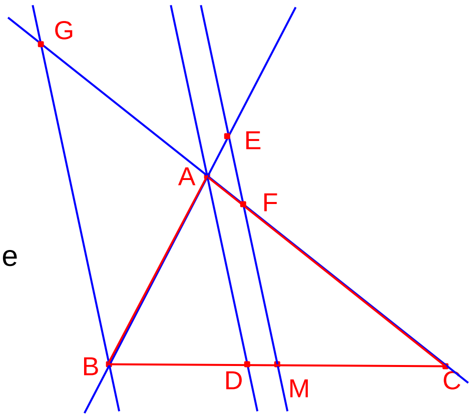
c)
El perímetre de AOBS és:

$$P_{AOBS} = 2 \cdot 25 + 20 + 52 = 122\ cm$$

L'àrea de AOBS és:

$$S_{AOBS} = S_{AOB} + S_{ABS} = \frac{48 \cdot 7}{2} + \frac{48 \cdot 20}{2} = 648\ cm^2$$

2274.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i D en el segment $\overline{BC}$ tal que $\overline{AD}$ és la bisectriu de l'angle $\angle BAC$.
Siga M el punt mig de $\overline{BC}$.
Pel punt M es dibuixa una paral·lela a $\overline{AD}$ que talla a la recta AB en el punt E i al segment $\overline{AC}$ en F.
A més a més la paral·lela a $\overline{AD}$ que passa per B talla la recta AC en el punt G.
Si $\overline{AB} = 7, \overline{AC} = 10$ calculeu les longituds dels segments $\overline{AG}, \overline{BE}$.



Solució:
Aplicant la propietat de la bisectriu:
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{7}{10}$$
Els triangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{FMC}$ són semblants i de raó 2:1
Aleshores, $\overline{FG} = \overline{FC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{ADC}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{AG}}{10} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{7}{10}$$
Aleshores, $\overline{AG} = 7$

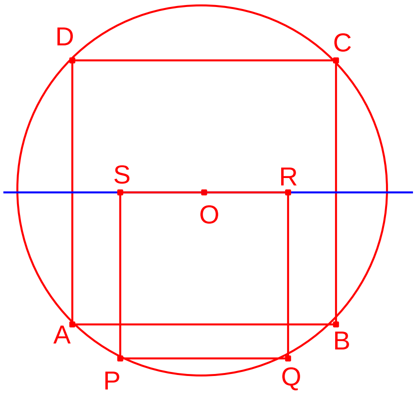
Siga $x = \overline{AF}$
$\overline{FG} = \overline{FC}$, $7 + x = 10 - x$
Resolent l'equació:
$$x = \overline{AF} = \frac{3}{2}, \overline{CF} = \frac{17}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{FMC}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{DM}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{3}{17}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{EBM}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{BE}}{7} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BM} - \overline{DM}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{DM}}{\overline{CM}}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{17}} = \frac{17}{14}$$
Aleshores, $\overline{BE} = \frac{17}{2}$

2275.- Siga una circumferència de radi $r = 4$.
El quadrat ABCD té els vèrtexs en la circumferència.
El quadrat PQRS té els vèrtexs P, Q sobre la circumferència i R i S sobre un diàmetre.
Calculeu $\frac{S_{ABCD}}{S_{PQRS}}$

Solució:



Siga O el centre de la circumferència de radi $r = 4$.
L'àrea del quadrat ABCD és igual a 4 vegades l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 32$$

Siga $x = \overline{PQ}$ costat del quadrat PQRS.

$$\overline{OS} = \frac{1}{2}x, \overline{OP} = 4$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PSO}$

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4^2$$

Simplificant:

$$x^2 = \frac{4}{5} \cdot 4^2 = \frac{64}{5}$$

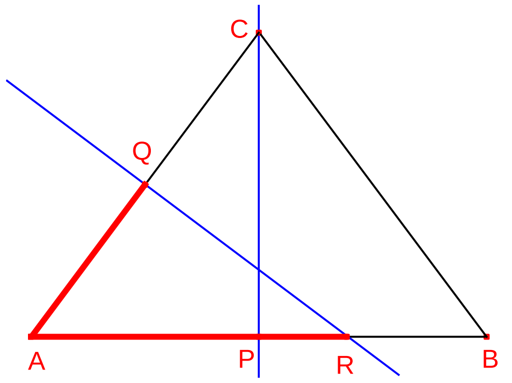
$$S_{PQRS} = x^2 = \frac{64}{5}$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PQRS}} = \frac{32}{\frac{64}{5}} = \frac{5}{2}$$

2276.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats $\overline{AC} = \overline{BC} = 10, \overline{AB} = 12$.

Es pinten de roig tots els punts X dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tals que la distància de X al vèrtex A és menor que la distància de X al vèrtexs C.
Determineu la longitud dels segments pintats de roig.

Solució:



Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$
$\overline{PC} = 8$
Els punts que estan a la mateixa distància de A i C pertanyen a la mediatriu del segment $\overline{AC}$
La recta mediatriu passa pel punt mig del costat $\overline{AC}$ i és perpendicular a aquest costat.
La recta mediatriu talla el costat $\overline{AB}$ en el punt R.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{AQR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{5}{\overline{AR}} = \frac{6}{10}$$

Resolent l'equació:

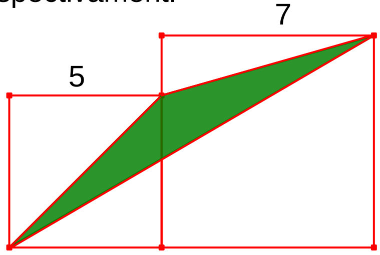
$$\overline{AR} = \frac{25}{3}$$

Els punts X dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tals que la distància de X al vèrtex A és menor que la distància de X al vèrtexs C, pertanyen als segments $\overline{AQ}, \overline{AR}$

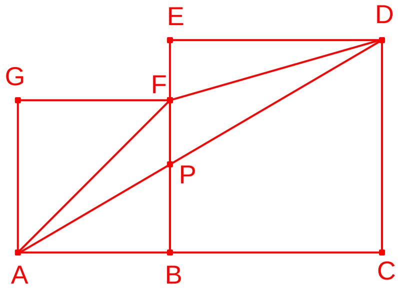
La longitud dels segments és:

$$\overline{AQ} + \overline{AR} = 5 + \frac{25}{3} = \frac{40}{3}$$

2277.- En la figura, els quadrats tenen costats 5 i 7, respectivament. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució



El segment $\overline{AD}$ talla el segment $\overline{BE}$ en el punt P.

Els triangle rectangles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{ACD}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{7}{12} = \frac{\overline{BP}}{5}$$

Resolent l'equació:

$$\overline{BP} = \frac{35}{12}$$

$$\overline{FP} = 5 - \frac{35}{12} = \frac{25}{12}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és:

$$S_{ADF} = \frac{1}{2}\overline{FP} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}\frac{25}{12} \cdot 12 = \frac{25}{2}$$

2278.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 12$, $\angle BAC = 30°$

Siga D un punt interior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que , $\overline{BD} = \overline{CD}$, $\angle BDC = 150°$
La recta BD talla el costat $\overline{AC}$ en E.

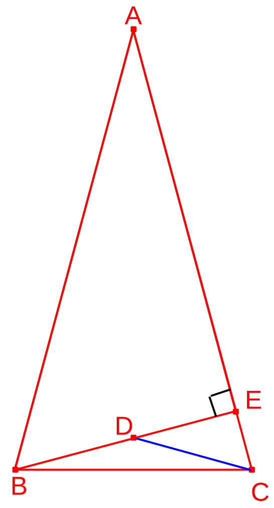
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$

Solució:
$\angle ABC = \angle ACB = 75°$

$\angle DBC = \angle DCB = 15°$

Aleshores,$\angle BDA = 90°$, $\angle ABE = 60°$

Aleshores, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 6, \overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = 6\sqrt{3}$



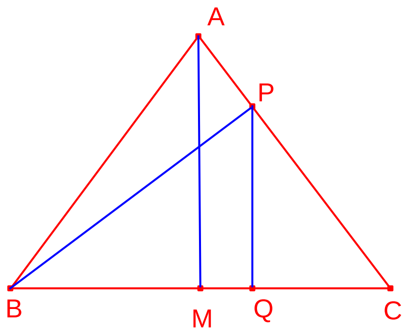
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}6\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$$

2279.- En el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga P un punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{BP}$ és perpendicular a $\overline{AC}$, i siga Q un punt de $\overline{BC}$ tal que $\overline{PQ}$ és perpendicular a $\overline{BC}$.

Si $\overline{BP} = 5$ i $\overline{PQ} = 3$, calculeu la mesura dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

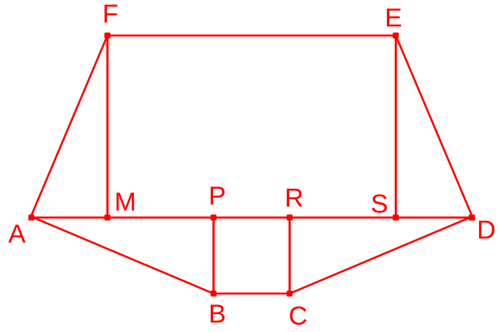


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BQP}$:
$\overline{BQ} = 4$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BQP}, \overset{\Delta}{PQC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{QC}}{3} = \frac{3}{4}$$
Aleshores, $\overline{QC} = \frac{9}{4}$
$$\overline{BC} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$
$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{25}{8}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BQP}, \overset{\Delta}{AMB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\frac{25}{8}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$$
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{5}{3} \cdot \frac{25}{8} = \frac{125}{24}$

2280.- La figura està formada per un rectangle, un quadrat i quatre triangles rectangles iguals.



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és 90 cm.
El perímetre de MSEF és 186 cm.
El perímetre de la figura és 228 cm.
Calculeu:

a) L'àrea de CDER
b) L'àrea de AREF
c) L'àrea de ABCEF
d) L'àrea de la figura.

Solució:
Siga $\overline{BP} = x, \overline{AP} = y, \overline{AB} = z.$
$\overline{MS} = 2y - x, \overline{MF} = y$
Aplicant el teorema de Pitàgores $z^2 = x^2 + y^2$ (1)
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és 90 cm.
$x + y + z = 90$ (2)
El perímetre de MSEF és 186 cm.
$6y - 2x = 186$ (3)
El perímetre de la figura és 228 cm.
$2y + 4z = 228$ (4)
Considerem el sistema format per les expressions (2) (3) (4)

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ -x + 3y = 93 \\ y + 2z = 114 \end{cases}$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = 15 \\ y = 36 \\ z = 39 \end{cases}$$

Notem que la solució del sistema satisfà l'equació (1)
$39^2 = 15^2 + 36^2$

a)
$$S_{CDER} = \frac{1}{2}\overline{DR}(\overline{RC} + \overline{ES}) = \frac{1}{2}y(x + y) = \frac{1}{2}36 \cdot 51 = 918\ cm^2$$
b)
$$S_{AREF} = S_{AMF} + S_{MREF} = \frac{1}{2}xy + \frac{y + 2y - x}{2}y = \frac{1}{2}15 \cdot 36 + \frac{3 \cdot 36 - 15}{2} \cdot 36 = 1944\ cm^2$$
c)
$$S_{ABCDEF} = 4 \cdot S_{APB} + S_{BCRP} + S_{MSEF} = 4 \cdot \frac{1}{2}xy + x^2 + y(2y - x) =$$
$$= 2 \cdot 15 \cdot 36 + 15^2 + 36 \cdot 57 = 3357\ cm^2$$