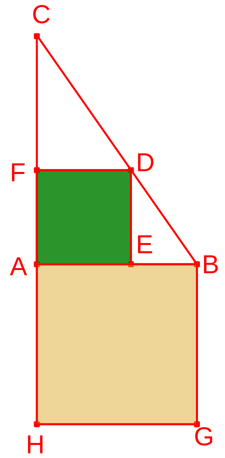
Problemes de Geometria per a l'ESO 229



2281.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$.
Construïm el quadrat AEDF inscrit al triangle tal que E pertany a $\overline{AB}$, D a $\overline{BC}$ i F a $\overline{AC}$.
Construïm el quadrat ABGH exterior al triangle tal que el vèrtex G és oposat a A.
Proveu que Els punts C, E, G estan alineats.

Solució:

Siguen $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$ costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$x
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{BD}}{c} = \frac{\overline{CD}}{b} = \frac{a}{b+c}$$

$$\overline{BD} = \frac{ac}{b+c}$$

Siga $x = \overline{AE}$ costat del quadrat AEDF.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{EBD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{b} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{a}$$

Aleshores, $x = \frac{bc}{b+c}$

Vegem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CAE}, \overset{\Delta}{CHG}$ són semblants.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{b}{x} = \frac{b+c}{c}$$

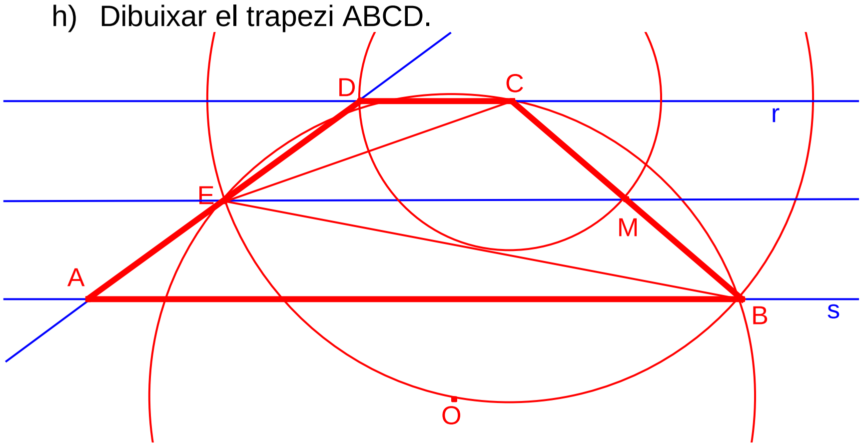
$$\frac{\overline{CH}}{\overline{HG}} = \frac{b+c}{c}$$

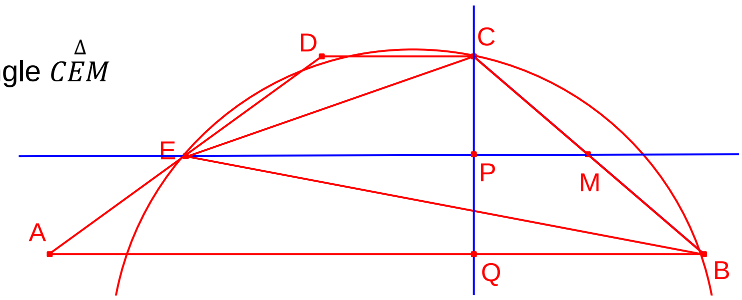
Aleshores, C, E, G estan alineats.

2282.- Dibuixeu el trapezi ABCD de costat paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$ tal que E és el punt mig del costat $\overline{AD}$, $\overline{CE} = \overline{BC} = 4$ i $\angle ECB = 120°$.
Calculeu l'àrea del trapezi ABCD.

Solució:
Passos de la construcció:

a) Dibuixar el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ECB}$, $\overline{CE} = \overline{BC} = 4$ i $\angle ECB = 120°$. Dibuixar la circumferència de centre O i radi $\overline{OC} = 4$. Dibuixar la circumferència de centre C i radi 4 que talla l'anterior en els punts B, E.
b) Dibuixar el punt mig M del segment $\overline{BC}$.
c) Dibuixar la recta EM, paral·lela mitjana del trapezi ABCD.
d) Dibuixar a recta r paral·lela a la recta EM que passa per C.
e) Dibuixar la recta s paral·lela a la recta EM que passa per B.
f) Dibuixar la circumferència de centre C que passa per M que talla la recta r en el punt D.
g) Dibuixar la recta DE que talla la recta s en el punt A.
h) Dibuixar el trapezi ABCD.

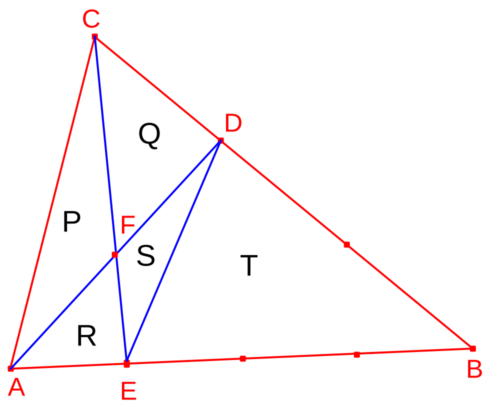




Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CEM}$
$\overline{EM}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 120°$
$\overline{EM} = 2\sqrt{7}$
$\overline{EM}$ és mitjana aritmètica dels costats paral·lels del trapezi $\overline{AB}, \overline{CD}$.
$$\frac{\overline{AB} + 2}{2} = 2\sqrt{7}$$
Aleshores, $\overline{AB} = 4\sqrt{7} - 2$
Siga P la projecció de C sobre $\overline{EM}$. Siga Q laa projecció de C sobre $\overline{AB}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEM}$ és:
$$S_{CEM} = \frac{1}{2}\overline{CE} \cdot \overline{CM} \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\overline{EM} \cdot \overline{CP}$$
$$\frac{1}{2}4 \cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}2\sqrt{7} \cdot \overline{CP}$$
$$\overline{CP} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$
$$\overline{CQ} = 2 \cdot \overline{CP} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$
L'àrea del trapezi és:
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{CQ} = \frac{4\sqrt{7} - 2 + 2}{2}\frac{4\sqrt{21}}{7} = 8\sqrt{3}$$

2283.- Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AE}:\overline{EB} = 1:3$.
Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD}:\overline{DB} = 1:2$.
Siga F el punt intersecció de $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$.
Determineu $\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}}$
Crux Mathematicorum MA 39



Solució:

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFC}$.

Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CFD}$.

Siga R l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EDF}$.

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EBD}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les base són proporcionals a les bases.
Siga $\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = k$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = k = \frac{R}{P} = \frac{S}{Q} = \frac{R+S}{P+Q}$$
$$R + S = k(P+Q)$$

$$R + S = \frac{1}{3}T$$
$$P + Q = \frac{1}{2}(R + S + T)$$

Aleshores:
$$P + Q = \frac{1}{2}(R + S + 3(R+S))$$
$$P + Q = 2(R+S)$$
$$P + Q = 2k(P+Q)$$
Simplificant.
$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = k = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = m$$
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = m = \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} = \frac{P+R}{Q+S}$$

$$Q + S = \frac{1}{2}T$$
$$P + R = \frac{1}{3}(Q + S + T)$$
$$P + R = \frac{1}{3}(Q + S + 2(Q+S))$$
$$P + R = Q + S$$
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = m = 1$$
$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

2284.- Siga ABCD un quadrilàter convex tal que

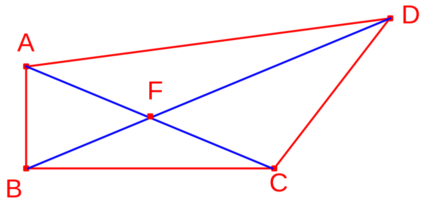
$\angle ABC = \frac{\pi}{2}, \angle ADC = \frac{\pi}{12}, \angle BDC = \frac{\pi}{6}, \angle DBC = \frac{\pi}{8}$

Demostreu que $\overline{BD}$ passa pel punt mig de $\overline{AC}$

Crux Mathematicorum 4474

Solució:

$\angle BDC = \frac{17\pi}{24}, \angle ABC = \frac{13\pi}{24}$



Siga $\angle ACB = \alpha$, siga $\overline{BC} = a, \overline{AB} = c$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCF}$

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)} = \frac{\overline{FC}}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)} = \frac{\overline{FC}}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

Dividint les dues expressions:

$\frac{a}{c} = \frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} \cdot ctg\left(\frac{\pi}{8}\right).$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$

$$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\overline{BD}}{\sin\left(\frac{17\pi}{24}\right)}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$$\frac{c}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\overline{BD}}{\sin\left(\frac{13\pi}{24}\right)}$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{12}} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{5\pi}{24}}$$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{5\pi}{24}} \cdot tg\frac{\pi}{8}$$

Sabem que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\;tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\cos\frac{5\pi}{24}} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24}\right)} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{\cos\frac{\pi}{24}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)} \cdot \frac{2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{24}\right)} \cdot \left(2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

Sabem que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

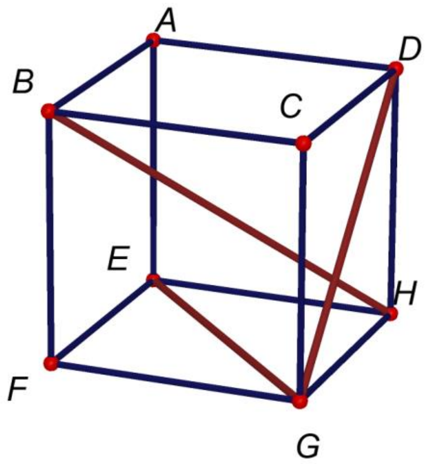
$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{1 - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}} \cdot \left(2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$$

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-8-4\sqrt{3}}{4}} \cdot \left(2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}\right) = 1$$

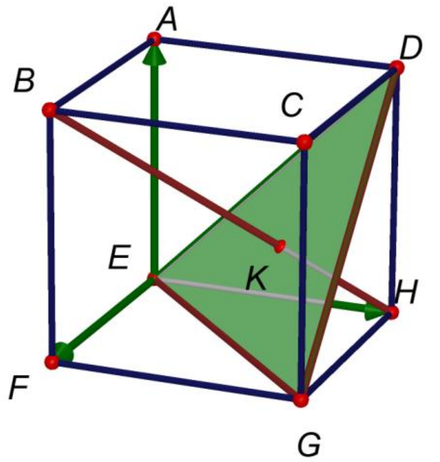
Aleshores, F és el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$

2285.- Siga el cub ABCDEFGH, d'aresta 1.

a) Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.
b) Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.
c) Proveu que $\overline{BH}$ és perpendicular al plànol EDG.
d) Calculeu la intersecció de $\overline{BH}$ i el plànol EDG.
e) Calculeu la distància de $\overline{BH}$ al plànol EDG.



Solució 1:
Considerem el cub amb les següents coordenades:
$E(0,0,0), F(1,0,0), H(0,1,0), G(1,1,0)$
$A(0,0,1), B(1,0,1), D(0,1,1), C(1,1,1)$.
$\overrightarrow{BH} = (-1,1,-1)$
$\overrightarrow{EG} = (1,1,0)$
$\overrightarrow{GD} = (-1,0,1)$
a)
Vegem que els vectors $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{EG}$ són ortogonals.
$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$.
Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.
b)
Vegem que els vectors $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{GD}$ són ortogonals.
$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{GD} = 0$.
Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.
c)
L'equació del plànol que conté EDG és:



$$\Pi_{EDG} \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
Simplificant:
$\Pi_{EDG} \equiv x - y + z = 0$
El vector característic del plànol és $a = (1,-1,1)$ és el linealment dependent del vector $\overrightarrow{BH} = (-1,1,-1)$
Aleshores, $\overline{BH}$ és perpendicular al plànol EDG.
d)
L'equació de la recta que passa per B, H té equació:
$r_{BH} \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \alpha(-1,1,-1)$
$(x,y,z) = (1-\alpha, \alpha, 1-\alpha)$
Substituint les coordenades d'un punt qualsevol de la recta en el plànol:
$(1-\alpha) - \alpha + (1-\alpha) = 0$
Resolent l'equació:
$$\alpha = \frac{2}{3}$$
El punt intersecció de $\overline{BH}$ i el plànol EDG és:
$$K\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

e)
La distància de B al plànol EDG és igual a la distància de B a K.

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

O bé la distància del punt al plànol DEG:

$$d = \left|\frac{1 - 0 + 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Solució 2:
a)
$\overline{BF}$ és perpendicular al plànol AGHE.
Aleshores, $\overline{BF}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.

$\overline{FH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$, diagonals del quadrat EGGH.

Aleshores, el plànol BFH és ortogonal a $\overline{EG}$.
Per tant, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$.
b)
$\overline{BC}$ és perpendicular al plànol CGHD.
Aleshores, $\overline{BC}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.

$\overline{CH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$, diagonals del quadrat CGHD.

Aleshores, el plànol BCH és perpendicular a $\overline{GD}$.
Per tant, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{GD}$.
c)
$\overline{BH}$ és perpendicular al plànol DEG ja que $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{EG}$ i $\overline{GD}$.
d)
Notem que BDEG és un tetràedre regular ja que totes les arestes són iguals a les diagonals de les cares del cub.

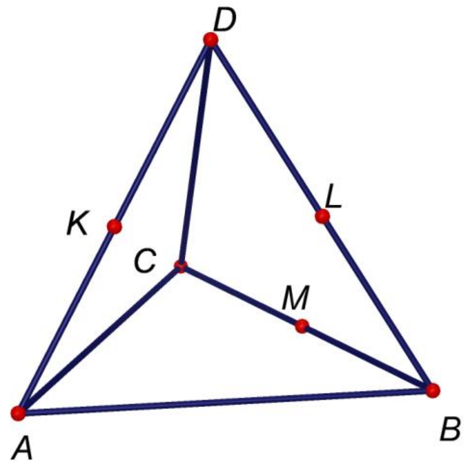
$\overline{BH}$ és l'altura del tetraedre i el seu peu és K el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEG}$.
e)

$$\overline{DK} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \overline{BD} = \sqrt{2}$$

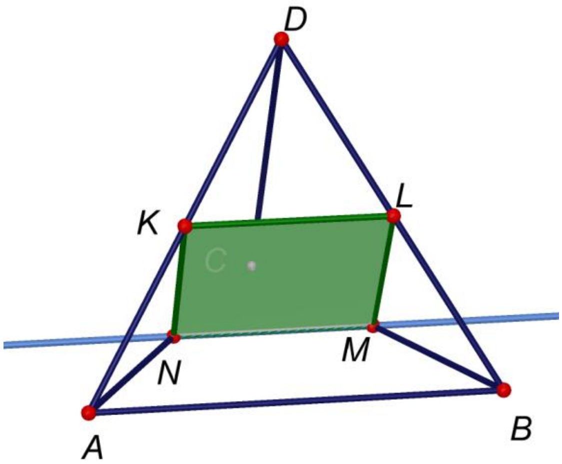
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDK}$

$$d = \overline{BK} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

2286.- Siga el tetràedre ABCD d'aresta 1.
Siga K el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga L el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Calculeu l'àrea de la secció del tetràedre determinada pel plànol que passa pels punts K, L, M.

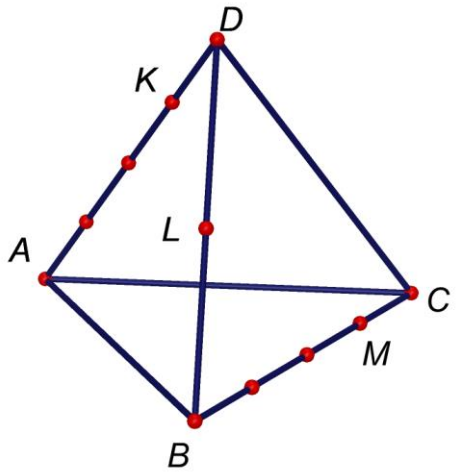


Solució:
Siga la recta paral·lela a l'aresta $\overline{AB}$ que passa per M.
La secció és el quadrilàter KLMN.
Aquesta recta és la paral·lela mitjana del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores, $\overline{MN} = \overline{KL} = \frac{1}{2}, \overline{LM} = \overline{KN} = \frac{1}{2}$.
$\overline{KM} = \overline{NL}$, distància entre els punts migs d'arestes oposades.
Aleshores KLMN és un quadrat.
L'àrea del quadrat és:
$S_{KLMN} = \overline{KL}^2 = \frac{1}{4}$

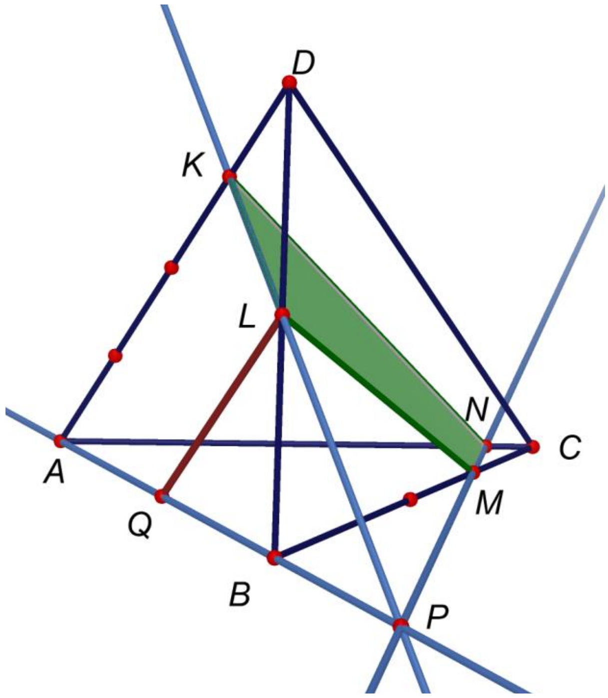


2287.- Siga el tetràedre ABCD d'aresta 1.
Siga K el punt de l'aresta $\overline{AD}$, tal que $\overline{AK} = 3 \cdot \overline{DK}$
Siga L el punt mig de l'aresta $\overline{BD}$.
Siga M el punt de l'aresta $\overline{BC}$ tal que $\overline{BM} = 3 \cdot \overline{CM}$

Calculeu l'àrea de la secció del tetràedre determinada pel plànol que passa pels punts K, L, M.



Solució:
$\overline{AK} = \overline{BM} = \frac{3}{4}, \overline{DK} = \overline{CM} = \frac{1}{4}, \overline{BL} = \overline{DL} = \frac{1}{2}$
Les rectes AB, KL s'intersecten en el punt P.
La recta PM talla l'aresta $\overline{AC}$ en el punt N.
La secció és el quadrilàter KLMN.



$\overline{DK} = \frac{1}{4}, \overline{DL} = \frac{1}{2}, \angle KDL = 60°$
Per tant, $\angle DKL = 90°$
Aleshores, $\overline{KL} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $L\overset{\Delta}{B}M$
$\overline{LM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 2\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$
$\overline{LM} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Els triangles $K\overset{\Delta}{A}P, L\overset{\Delta}{Q}P$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \overline{BP}}{\frac{1}{2} + \overline{BP}}$
Resolent l'equació:
$\overline{BP} = \frac{1}{2}$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $B\overset{\Delta}{P}M$
$\overline{PM}^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 2\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$
$\overline{PM} = \frac{\sqrt{19}}{4}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $L\overset{\Delta}{B}P$
$\overline{PL}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$
$\overline{LM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Notem que $\overline{PM}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{PL}^2$

Aleshores, $\angle MLP = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MLP}$

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Siga $\angle BMP = \alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{BMP}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{19}}{4}}{\sin 120°}$$

Aleshores, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{57}}{19}, \cos\alpha = \frac{4\sqrt{19}}{19}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MCN}$

$$\frac{\overline{MN}}{\sin 60°} = \frac{\frac{1}{4}}{\sin(60° + \alpha)} = \frac{\overline{CN}}{\sin\alpha}$$

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{19}}{20}, \overline{CN} = \frac{1}{10}$$

$$\overline{AN} = \frac{9}{10}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AKN}$

$$\overline{KN}^2 = \frac{81}{100} + \frac{9}{16} - 2\frac{9}{10}\frac{3}{4}\frac{1}{2}$$

$$\overline{KN} = \frac{3\sqrt{31}}{20}$$

Siga $\angle KNM = \beta$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{KNM}$

$$\frac{10}{16} = \frac{19}{400} + \frac{279}{400} - 2\frac{\sqrt{19}}{20}\frac{3\sqrt{31}}{20}\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{8\sqrt{31}}{589}, \sin\beta = \frac{5\sqrt{651}}{589}$$

L'àrea del quadrilàter KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{KL} \cdot \overline{ML} + \frac{1}{2}\overline{KN} \cdot \overline{MN} \cdot \sin\beta$$

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{31}}{20} \cdot \frac{\sqrt{19}}{20} \cdot \frac{5\sqrt{651}}{589} = \frac{\sqrt{21}}{32} + \frac{3\sqrt{399}}{3040}$$

2288.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$.
Siguen I, J, J' els punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivament.
Siga P un punt qualsevol de la hipotenusa $\overline{BC}$
Siguen H, K les projeccions ortogonals de O sobre els catets $\overline{AB}, \overline{AC}$, respectivament.

a) Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{IHK}$ és rectangle i isòsceles.
b) Demostreu que el punt mig del segment $\overline{HK}$ pertany al segment $\overline{JJ'}$

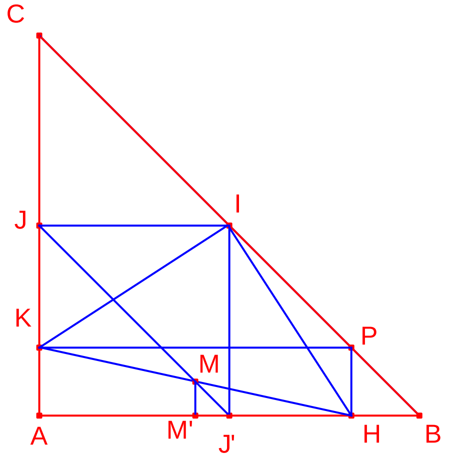
Solució:
a)
$\overline{BH} = \overline{PH} = \overline{AK}$

$\overline{AJ} = \widetilde{AJ'} = \overline{JI} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Aleshores, $\overline{JK} = \overline{J'H}$

Per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IJK}, \overset{\Delta}{IJ'H}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{IK} = \overline{IH}, \angle KIH = \angle JIJ' = 90°$

Aleshores, $\overset{\Delta}{IHK}$ és rectangle i isòsceles, $I = 90°$.
b)
Siga M el punt mig del segment $\overline{HK}$
Siga M' la projecció de M sobre el catet $\overline{AB}$



$\overline{MM'} = \frac{1}{2}\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{BH}$

$\overline{AM'} = \frac{1}{2}\overline{AH}$

$\overline{M'J'} = \overline{AJ'} - \overline{AM'} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{BH}$

Aleshores, $\angle MM'J' = 45°$, $\angle JAJ' = 45°$
Aleshores, M pertany al segment $\overline{JJ'}$.

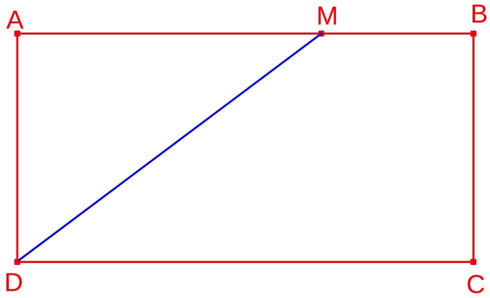
2289.- En el rectangle ABCD, $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB}$, l'àrea del quadrilàter AMCD és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és $576\ cm^2$

Calculeu mesura el segment $\overline{BM}$

Siga P el punt mig de $\overline{AD}$.

Calculeu l'àrea del quadrilàter ABMP

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$



Solució:

Siga $\overline{AB} = a, \overline{AD} = 2a$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és $576\ cm^2$ aleshores,

$\frac{1}{2} 2a \cdot a = 576$

$a = 24$

$\overline{AB} = 24, \overline{AD} = 48.$

Siga $X = S_{ABM}; Y = S_{AMC}$

$X + Y = 576$

L'àrea del quadrilàter AMCD és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$, aleshores:

$X + 576 = 2Y$

Considerem el sistema:

$\begin{cases} X + Y = 576 \\ Y + 576 = 2X \end{cases}$

Resolent el sistema:

$\begin{cases} X = 384 \\ Y = 192 \end{cases}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{AMD}$ tenen la mateixa altura. Les àrees són proporcionals a les bases:

$\frac{384}{576} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BM}}{48}$

Resolent l'equació:

$\overline{BM} = 32.$

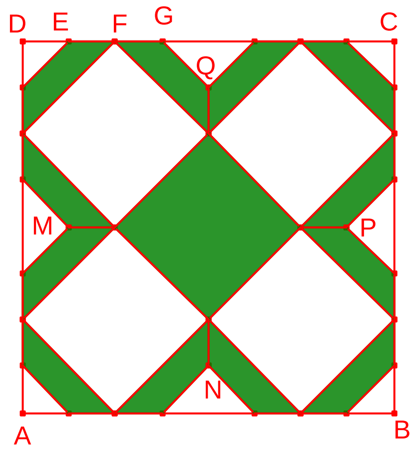
L'àrea del trapezi rectangular ABMP és:

$S_{ABMP} = \frac{32 + 24}{2} \cdot 24 = 672$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$ és:

$S_{PMC} = \frac{1}{2}(48 - 32)24 = 192$

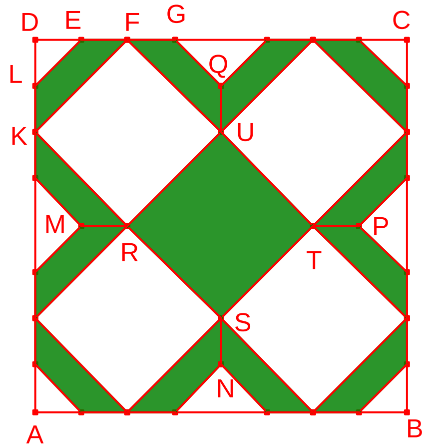
2290.- El quadrat ABCD està dividit en 12 trapezis isòsceles, 5 quadrats i diversos triangles isòsceles.
$\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}, \overline{DC} = 4 \cdot \overline{DF}$



L'àrea de la part ombrejada és $416\ cm^2$
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.
Calculeu l'àrea de la part no ombrejada.
Calculeu l'àrea de MNPQ.
Calculeu el perímetre de ABCD.

Solució:
Siga $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = x$

L'àrea del trapezi EFKL és gual a l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DFK}$ menys l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEL}$



$$S_{EFKL} = \frac{1}{2}(2x)^2 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2$$

Considerem el quadrat ombrejat RSTU.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DFK}$
$\overline{RS} = \overline{KF} = 2\sqrt{2}x$
L'àrea del quadrat ombrejat RSTU és:
$$S_{RSTU} = \left(2\sqrt{2}x\right)^2 = 8x^2$$

L'àrea del regió ombrejada és igual a l'àrea de 12 trapezis EFKL més l'àrea del quadrat RSTU:
$$S_{ombrejada} = 12\frac{3}{2}x^2 + 8x^2 = 416$$
$26x^2 = 416$
Resolent l'equació:
$x = 4$
L'àrea del quadrat RSTU és:
$S_{RSTU} = 8x^2 = 138$

$\overline{AB} = 4 \cdot 2x = 8x$
L'àrea no ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea ombrejada:
$S_{ABCD} - S_{ombrejada} = 32^2 - 416 = 608$

$\overline{MP} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{DE} = 8x - 2x = 6x$
L'àrea del quadrat MNPQ és:
$$S_{MNPQ} = \frac{\overline{MP}^2}{2} = \frac{36x^2}{2} = 288$$
El perímetre del quadrat ABCD és:
$P_{ABCD} = 4 \cdot \overline{AB} = 32x = 128$