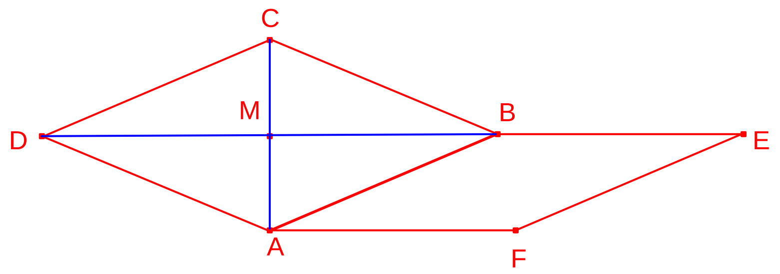
Problemes de Geometria per a l'ESO 230

2291.- Siga ABCD un rombe de costat 13.
Exterior al rombe és dibuixa el rombe ABEF tal que el costat $\overline{AF}$ és paral·lel al segment $\overline{BD}$
Si l'àrea del rombe ABEF és 65, calculeu l'àrea del rombe ABCD.

Solució.



Siga M la intersecció de les diagonals del rombe ABCD.
Les diagonals del rombe són perpendiculars.
Aleshores, $\overline{AM}$ és altura del rombe ABEF referida a la base $\overline{BE} = 13$
L'àrea del rombe ABEF és:
$S_{ABEF} = \overline{BE} \cdot \overline{AM} = 65$
$13 \cdot \overline{AM} = 65$
Aleshores, $\overline{AM} = 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{MB} = 12$
$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AM} = 10$
$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{MB} = 24$

L'àrea del rombe ABEF és:
$$S_{ABEF} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$$

2292.- En la figura, $\overline{AB}=16, \overline{BC}=\overline{AB}, \overline{AG}=\overline{BG}, \overline{BF}=\overline{CF}, \angle CDF=45°$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABG}$ és 36 cm.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és 50 cm

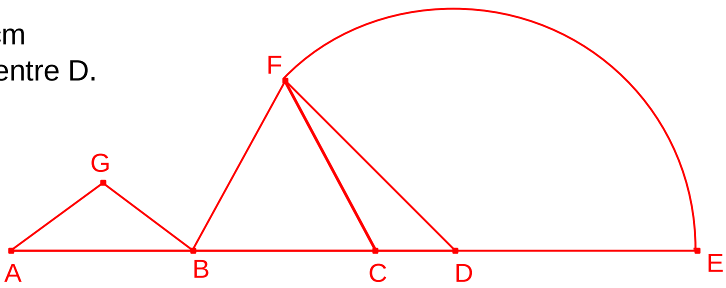
$\widehat{AF}$ és un arc de circumferència de centre D.

Calculeu:

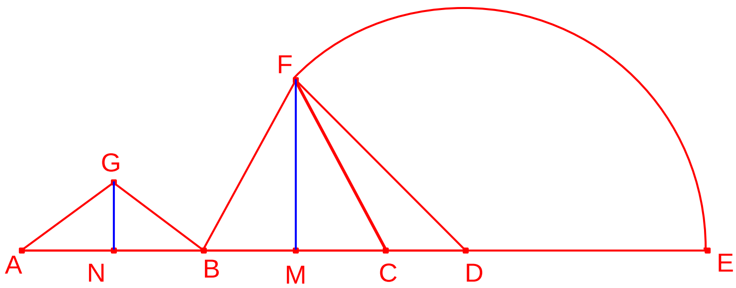
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BDF}$

El perímetre de la figura.

L'àrea de la figura.



Solució:



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABG}$ és 36 cm, aleshores: $\overline{AG}=\overline{BG}=\frac{36-16}{2}=10$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és 50 cm, aleshores: $\overline{BF}=\overline{CF}=\frac{50-16}{2}=17$

Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMF}$:

$\overline{FM}=15$

Siga N el punt mig del segment $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANG}$:

$\overline{GN}=6$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{FMD}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{MD}=\overline{FM}=15$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FMD}$:

$\overline{FD}=15\sqrt{2}$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és:

$P_{BDF}=17+16+15\sqrt{2}=33+15\sqrt{2}$

El perímetre de la figura és:

$$P_{figura}=2\cdot\overline{AB}+\overline{CD}+\overline{FD}+\widehat{FE}+\overline{BF}+2\cdot\overline{AG}=$$

$$=2\cdot 16+7+15\sqrt{2}+\frac{3}{8}2\pi\left(15\sqrt{2}\right)+17+2\cdot 10=76+15\sqrt{2}+\frac{45}{4}\pi\sqrt{2}$$

L'àrea de la figura és:

$$S_{figura}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{GN}+\frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{FM}+\frac{3}{8}\pi\left(15\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2}16\cdot 6+\frac{1}{2}23\cdot 15+\frac{3}{8}\pi\left(15\sqrt{2}\right)^2$$

$$=\frac{441}{2}+\frac{675}{4}\pi$$

2293.- En la figura, ABCD és un quadrat de $2304\ cm^2$ d'àrea.

$\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BQ}, \overline{DR} = 3 \cdot \overline{RC}$.

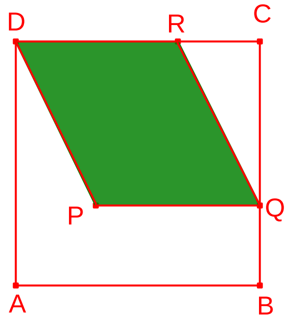
PQRD és un paral·lelogram. Calculeu:

a) L'àrea del paral·lelogram PQRD.

b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QCR}$.

c) L'àrea de PBCD.

d) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBR}$



Solució:

El costat del quadrat ABCD és:

$\overline{AB} = \sqrt{2304} = 48$

$\overline{BQ}, = \overline{RC} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 12$

a)

$S_{PQRD} = \overline{PQ} \cdot \overline{CQ} = 32 \cdot 32 = 1024\ cm^2$

b)

$S_{QCR} = \frac{1}{2}\overline{CR} \cdot \overline{CQ} = \frac{1}{2}16 \cdot 32 = 256\ cm^2$

c)

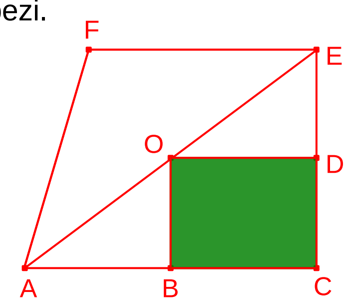
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQB}, \overset{\Delta}{QCR}$ són iguals.

$S_{PBCD} = S_{PQRD} + 2 \cdot S_{QCR} = 32 \cdot 32 = 1024 + 512 = 1536\ cm^2$

d)

$S_{PBR} = S_{PQCR} - S_{BQR} = \frac{\overline{CR} + \overline{PQ}}{2}\overline{CR} - \frac{1}{2}\overline{BQ} \cdot \overline{CR} = \frac{16 + 32}{2}32 + \frac{1}{2}16 \cdot 16 = 640\ cm^2$

2294.- En la figura, BCDO és un rectangle i ACEF és un trapezi.



$\overline{AF} = \overline{FE}$

D és el punt mig de $\overline{CE}$, O és el punt mig de $\overline{AE}$

$\overline{BC} = \frac{4}{3}\overline{CD}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ODE}$ és $864\ cm^2$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és $270\ cm$. Calculeu:

a) El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ODE}$
b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$
c) El perímetre de BCEF

Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}, \overset{\Delta}{ODE}$ són iguals.

Siga $\overline{CD} = \overline{DE} = x, \overline{AB} = \overline{BC} = \frac{4}{3}x$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ODE}$ és $864\ cm^2$, aleshores:

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}x \cdot x = 864$$

Resolent l'equació:

$$x = \overline{CD} = 36\ cm, \qquad \overline{BC} = \frac{4}{3}x = 48\ cm$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODE}$:

$\overline{OE} = 60, \overline{AE} = 2 \cdot \overline{OE} = 120\ cm$

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és $270\ cm$, aleshores:

$$\overline{FE} = \overline{AF} = \frac{270 - 120}{2} = 75\ cm$$

a)

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ODE}$ és:

$P_{ODE} = \overline{OE} + \overline{CD} + \overline{OD} = 60 + 36 + 48 = 144\ cm$

b)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOF}$

$\overline{OF} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45\ cm$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{OF} = \frac{1}{2}120 \cdot 45 = 2700\ cm^2$$

c)

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ODE}, \overset{\Delta}{EOF}$ són semblants.

Aleshores, $\angle FEC = 90°$

Siga P la projecció de F sobre $\overline{AC}$

$\overline{FP} = \overline{CE} = 72$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APF}$

$\overline{AP} = \sqrt{75^2 - 72^2} = 24\ cm$

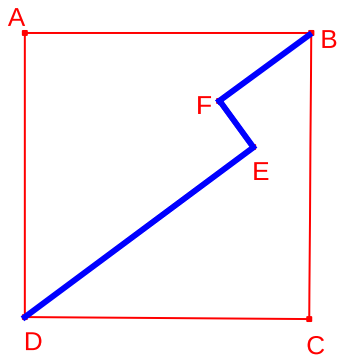
Aleshores, $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Aleshores, $\overline{BF} = \overline{AF} = 75\ cm$

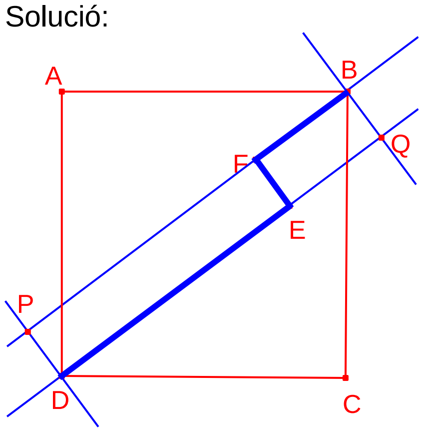
El perímetre de BCEF és:

$P_{BCEF} = \overline{BC} + \overline{CE} + 2 \cdot \overline{EF} = 48 + 72 + 2 \cdot 75 = 270\ cm$

2295.- En la figura es mostra la línia trencada DEFB en l’interior del quadrat ABCD.
$\overline{DE}$ és perpendicular a $\overline{EF}$
$\overline{EF}$ és perpendicular a $\overline{FB}$
$\overline{DE} = 5, \overline{EF} = 1, \overline{FB} = 2$
Calculeu la mesura del costat del quadrat ABCD



Solució:



Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$
$\overline{BD} = c\sqrt{2}$

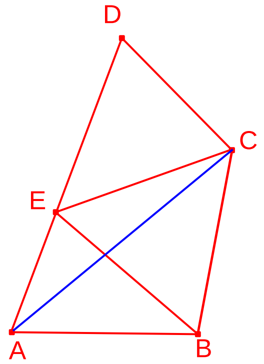
$\overline{DE}$ és paral·lel a $\overline{BF}$
Construïm el rectangle BPDQ.
$\overline{BQ} = \overline{EF} = 1, \overline{DQ} = \overline{DE} + \overline{BF} = 5 + 2 = 7$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQB}$
$\overline{BD} = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$

$\overline{BD} = c\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
Aleshores, $c = 5$

2296.- Siga ABCD un quadrilàter convex tal que $\angle CAB = 40°$.

Siga E un punt del segment $\overline{AD}$ tal que el triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és equilàter.
$\overline{ED} = \overline{EC}, \angle ABE = 40°$
Calculeu els angles del quadrilàter ABCD.



Solució:
$B = \angle ABE + \angle EBC = 40° + 60° = 100°$

$\angle ACB = 180° - (\angle CAB + B) = 40°$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BE}$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és isòsceles.

$$A = \frac{180° - \angle ABE}{2} = \frac{180° - 40°}{2} = 70°$$

$\angle AEB = A = 70°$

$\angle DEC = 180° - (\angle AEB + \angle CEB) = 180° - (70° + 60°) = 50°$

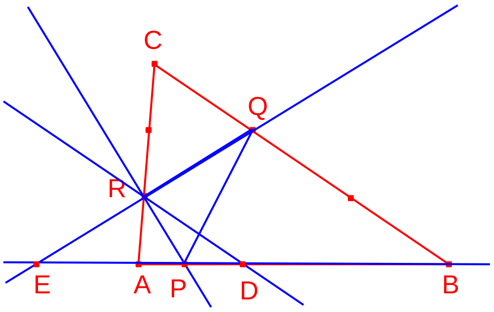
$$A = \frac{180° - \angle DEC}{2} = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$$

$\angle ECD = D = 65°$

$C = \angle ECD + \angle EDB = 65° + 60° = 125°$

2297.- En els costats $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es troben els punts P, Q, R, respectivament, tals que $\overline{BQ} = 2 \cdot \overline{QC}, \overline{CR} = 2 \cdot \overline{RA}, \angle PRQ = 90°$.
Demostreu que $\angle APR = \angle RPQ$.

Solució:



La recta RQ talla la recta AB en el punt E.
La recta paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per R talla el costat $\overline{AB}$ en el punt D.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADR}$ són semblants i la raó és 3:1

$$\overline{RD} = \frac{1}{3}a$$

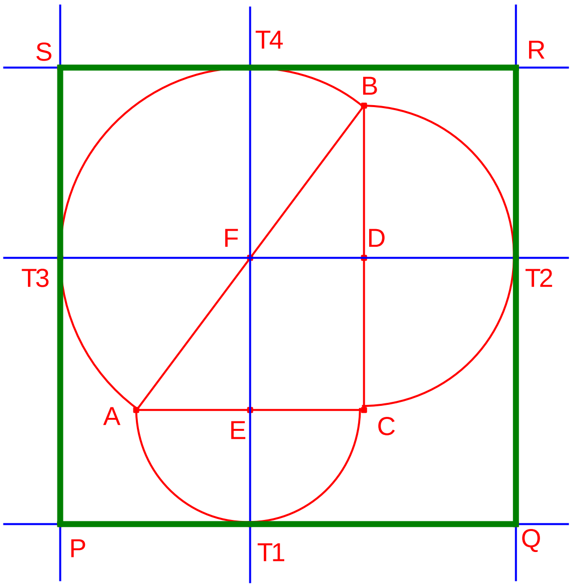
Els triangles $\overset{\Delta}{EBQ}, \overset{\Delta}{EDR}$ són semblants i la raó és

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{RD}} = \frac{\frac{2}{3}a}{\frac{1}{3}a} = 2$$

Aleshores, $\overline{ER} = \frac{1}{2}\overline{EQ}$
Aleshores, $\overline{ER} = \overline{RQ}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ERP}, \overset{\Delta}{QRP}$ són iguals.
Aleshores, $\angle APR = \angle RPQ$

2298.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{AC} = 6, \overline{BC} = 8$
Es dibuixen tres semicircumferències exteriors al triangle, de diàmetres $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.
Es dibuixa la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AC}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.
Es dibuixa la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.
Es dibuixa la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.
Es dibuixa la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.
Les quatre tangents determinen un rectangle. Determineu el perímetre del rectangle.

Solució:
Siguen D, E, F els punts migs dels costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, respectivament.



La recta FE talla la semicircumferència en el punt T_1 punt de tangència de la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AC}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.

La recta FD talla la semicircumferència en el punt T_2 punt de tangència de la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.

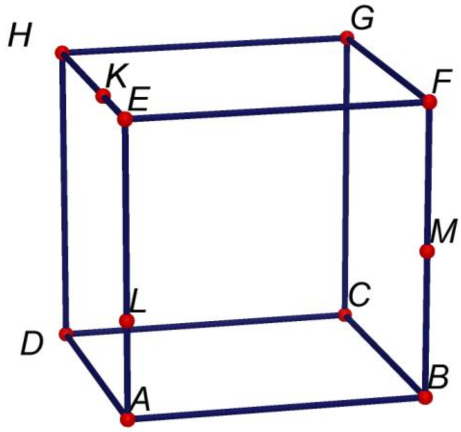
La recta FD talla la semicircumferència en el punt T_3 punt de tangència de la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.

La recta FE talla la semicircumferència en el punt T_4 punt de tangència de la recta tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.

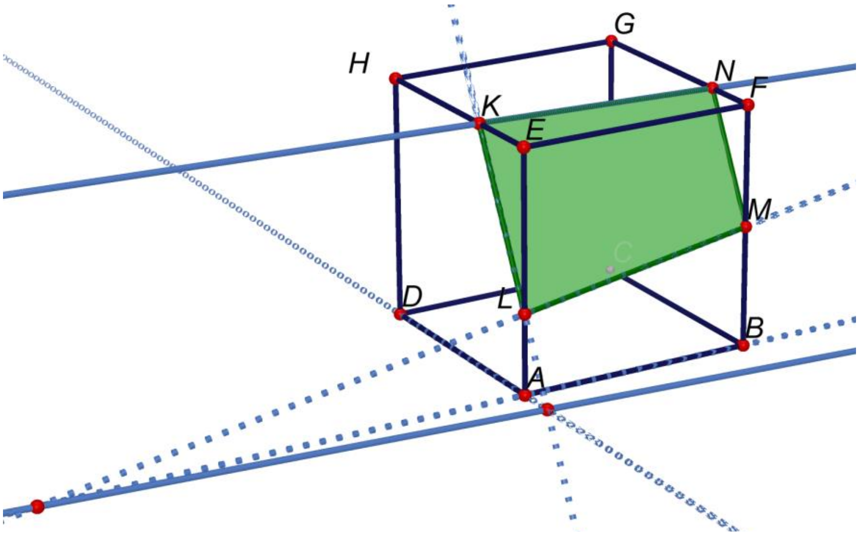
Siga PQRS el rectangle que formen les quatre rectes tangents.

$\overline{PS} = \overline{FE} + \overline{FT_4} + \overline{ET_1} = 4 + 5 + 3$=12
$\overline{PS} = \overline{FD} + \overline{FT_3} + \overline{ET_2} = 3 + 5 + 4 = 12$
PQRS és un quadrat de costat 12.
El perímetre és 48.

2299.- Siga ABCDEFGH d'aresta $\overline{AB} = 1$
Siga K de l'aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$
Siga L de l'aresta $\overline{AE}$ tal que $\overline{EL} = 2 \cdot \overline{AL}$
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BF}$.
Determineu el perímetre i l'àrea de la secció del cub que determina el plànol que passa pels punts K, L, M.



Solució:



La secció és el trapezi KLMN on N pertany a l'aresta $\overline{FG}$.

$$\overline{EK} = \overline{AL} = \frac{1}{3}, \overline{MF} = \frac{1}{2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{LEK}, \overset{\Delta}{MFN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FN}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}, \overline{FN} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{KL} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

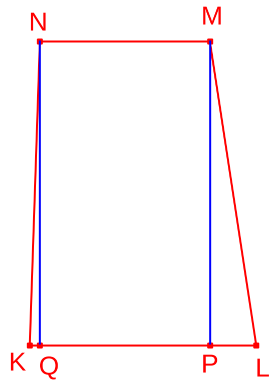
$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{145}}{12}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

El perímetre del trapezi KLMN és:

$$P_{KLMN} = \frac{7\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{37}}{6} + \frac{\sqrt{145}}{12}$$



Siga P la projecció de M sobre $\overline{KL}$
Siga Q la projecció de N sobre $\overline{KL}$
Siga $x = \overline{PL}$, aleshores, $\overline{KQ} = \frac{\sqrt{5}}{12} - x$
Siga $h = \overline{PM}$ altura del trapezi KLMN.
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $M\overset{\Delta}{P}L, N\overset{\Delta}{Q}K$

$$h^2 = \frac{37}{36} - x^2$$

$$h^2 = \frac{145}{144} - \left(\frac{\sqrt{5}}{12} - x\right)^2$$

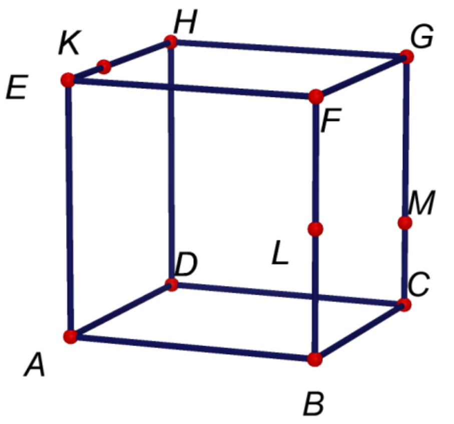
Resolent el sistema format per les dues equacions:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{15} \\ h = \dfrac{\sqrt{905}}{30} \end{cases}$$

L'àrea del trapezi KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} \frac{\sqrt{905}}{30} = \frac{7\sqrt{181}}{144}$$

2300.- Siga ABCDEFGH d’aresta $\overline{AB} = 1$
Siga K de l’aresta $\overline{EH}$ tal que $\overline{HK} = 2 \cdot \overline{EK}$
Siga L el punt mig de l’aresta $\overline{BF}$.
Siga M de l’aresta $\overline{CG}$ tal que $\overline{GM} = 2 \cdot \overline{CM}$
Determineu els costats de la secció del cub que determina el plànol que passa pels punts K, L, M.



Solució:
Siga Q el punt mig de l’aresta $\overline{CG}$

$$\overline{QM} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\overline{LM} = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{37}}{6}$$

Els triangles $L\overset{\Delta}{Q}M, K\overset{\Delta}{H}N$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{HN}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{3}}, \overline{HN} = \frac{1}{9}$$

$$\overline{KN} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{9}$$

Siga T la projecció de N sobre l’aresta $\overline{CG}$

$$\overline{MT} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{106}}{9}$$

Els triangles $N\overset{\Delta}{T}M, P\overset{\Delta}{E}L$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PF}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}}, \overline{PF} = \frac{9}{10}, \overline{PE} = \frac{1}{10}$$

$$\overline{PL} = \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{106}}{10}$$

$$\overline{KP} = \sqrt{\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{30}$$