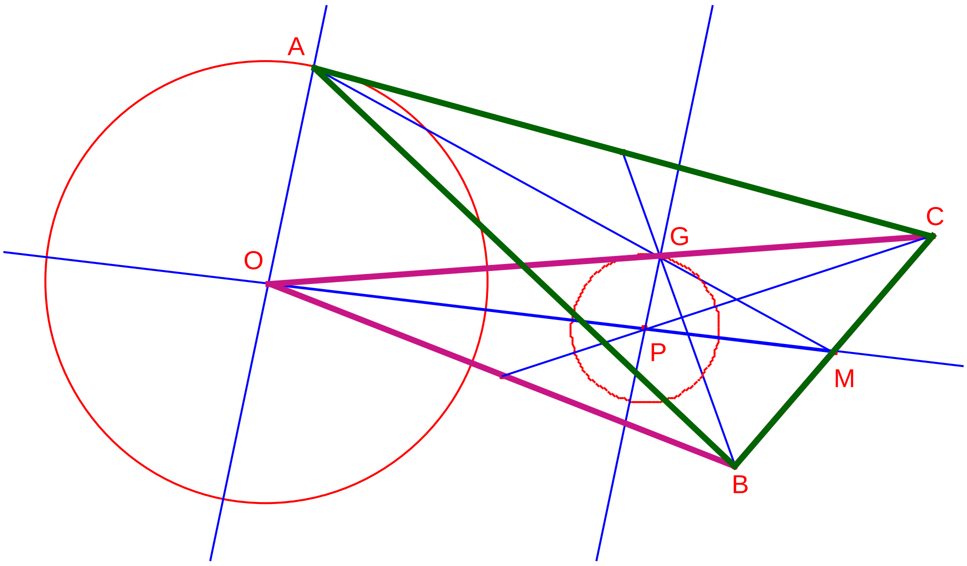
2301.- Un punt A recorre la circumferència de centre O i radi r.
Siga $\overline{BC}$ un segment fix del plànol, exterior a ka circumferència.

Demostreu que el lloc geomètric del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és una circumferència de radi $\frac{r}{3}$ i centre el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$

Solució:



Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{BC}$
Aplicant la propietat del baricentre
$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM}$
Dibuixem la recta OA.
Tracem una recta r paral·lela a la recta OA que passa per G.

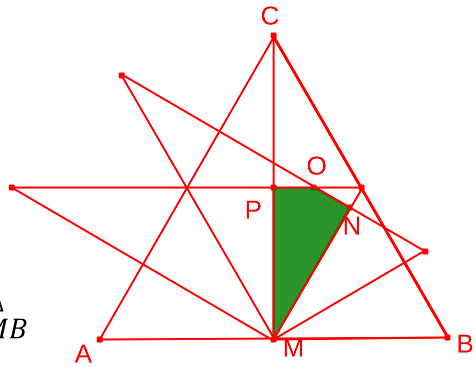
Siga P la intersecció de la recta r i la mitjana OM del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AOM}, \overset{\Delta}{GPM}$ són semblants i de raó 3:1
Aleshores, $\overline{OP} = 2 \cdot \overline{PM}$, $\overline{GP} = \frac{1}{3}\overline{OA} = \frac{1}{3}r$

Per tant P és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$
Per ser O i M fixos, P és fix.

Aleshores, el lloc geomètric del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és una circumferència de radi $\frac{r}{3}$ i centre el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$

2302.- Considerem la meitat d'un triangle equilàter, és a dir, un triangle rectangle 30º, 60º, 90º.
Creem dos triangles rectangles girant el triangle rectangle original 30º i 60º sobre el vèrtex que forma l'angle recte.
Determineu la proporció entre les àrees de la intersecció dels tres triangles i el triangle equilàter inicial.
KöMaL C1563



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$
L'àrea del triangle equilàter és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMB}$ d'angles $C = 30°, M = 90°, B = 60°$
Siga MNOP el quadrilàter format per la intersecció dels tres triangles rectangles.

$\angle NMB = 60°, \angle PMN = 30°, \angle PMO = \angle OMN = 15°, = \angle MNO = \angle OPM = 90°$

$$\overline{MP} = \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{4}c$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNO}$

$$\frac{\overline{ON}}{\overline{MN}} = tg15° = tg(45° - 30°) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\overline{ON} = \overline{MN} \cdot tg15° = \frac{\sqrt{3}}{4}c\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

L'àrea del quadrilàter MNOP és:

$$S_{MNOP} = \overline{MN} \cdot \overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{4}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{3}{16}\left(2 - \sqrt{3}\right)c^2$$

La proporció entre les àrees és:

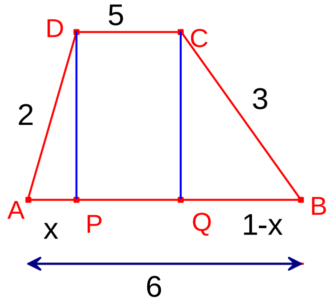
$$\frac{S_{MNOP}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3}{16}\left(2 - \sqrt{3}\right)c^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$$

2303.- Els costats d'un trapezi mesuren 2, 3, 5, 6 en algun ordre.
De tots els possibles, determineu el de major àrea.
KöMaL C1565

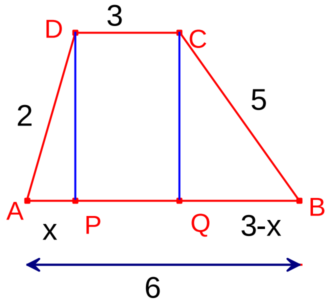
Solució
Els costats paral·lels poden ser de 6 tipus:
6, 5
6, 3
6, 2
5, 3
5, 2
3, 2

Siga ABCD el trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$
Siga P la projecció de D sobre $\overline{AB}$
Siga Q la projecció de C sobre $\overline{AB}$

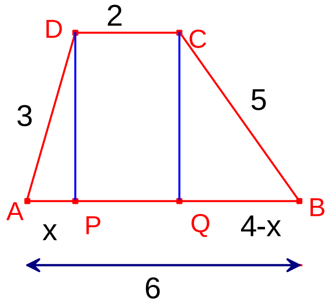
a)
Siga $\overline{AB} = 6, \overline{CD} = 5$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 1 - x$
$-2 < x < 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$2^2 - x^2 = 3^2 - (1 - x)^2$
Simplificant:
$-4 = 2x$
$x = -2$
Aleshores, ABCD no és un trapezi.



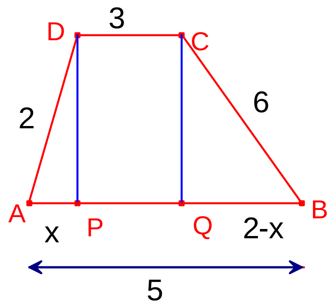
b)
Siga $\overline{AB} = 6, \overline{CD} = 3$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 3 - x$
$-2 < x < 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$2^2 - x^2 = 5^2 - (3 - x)^2$
Simplificant:
$-12 = 6x$
$x = -2$
Aleshores, ABCD no és un trapezi.



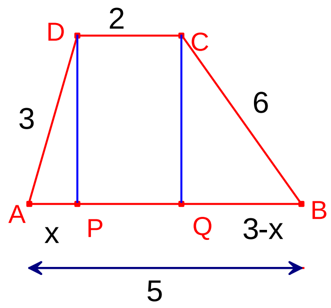
c)
Siga $\overline{AB} = 6, \overline{CD} = 2$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 4 - x$
$-3 < x < 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$3^2 - x^2 = 5^2 - (4 - x)^2$
Simplificant:
$0 = 8x$
$x = 0$
El trapezi ABCD és rectangular.
L'àrea és $S_{ABCD} = \frac{6+2}{2} 3 = 12$



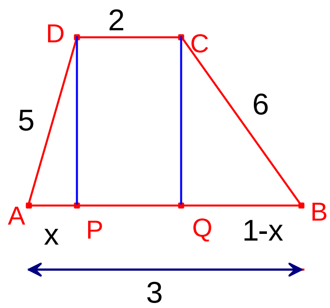
d)
Siga $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = 3$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 2 - x$
$-2 < x < 2$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$2^2 - x^2 = 6^2 - (2 - x)^2$
Simplificant:
$-28 = 4x$
$x = -7$
Aleshores, ABCD no és un trapezi.



e)
Siga $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = 2$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 3 - x$
$-3 < x < 3$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$3^2 - x^2 = 6^2 - (3 - x)^2$
Simplificant:
$-18 = 6x$
$x = -3$
Aleshores, ABCD no és un trapezi.

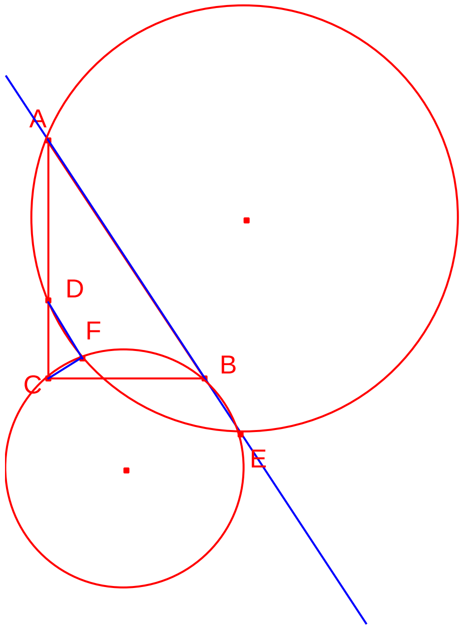


f)
Siga $\overline{AB} = 3, \overline{CD} = 2$, siga $x = \overline{AP}$, $\overline{QB} = 1 - x$
$-5 < x < 5$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles
rectangles $\overset{\Delta}{APD}, \overset{\Delta}{CQB}$
$5^2 - x^2 = 6^2 - (1 - x)^2$
Simplificant:
$-10 = 2x$
$x = -5$
Aleshores, ABCD no és un trapezi.



2304.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga D un punt interior del catet $\overline{AC}$
Siga E un punt en l'extensió de la hipotenusa $\overline{AB}$ més enllà de B.
Siga F el segon punt d'intersecció (distint de E) de les circumferències circumscrites als triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ i $\overset{\Delta}{BCE}$.
Proveu que $\angle CFD = 90°$
KöMaL, B5047

Solució:
Siga $\angle FCB = \alpha$ angle inscrit en la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$.
Per ser inscrit i abraçar el mateix arc:
$\angle FEB = \alpha$



El quadrilàter EFDA està inscrit en la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$
Aleshores els angles oposats són suplementaris.
$\angle ADF = 180° - \angle FEB = 180° - \alpha$

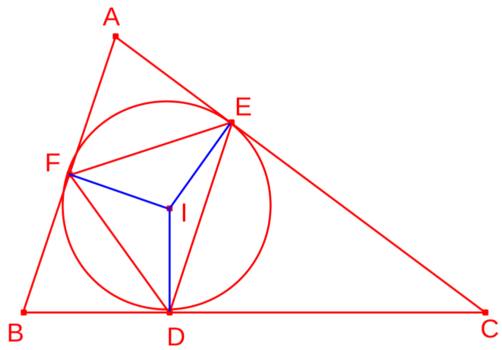
$\angle CDF = 180° - \angle ADF = \alpha$
$\angle DCF = 90° - \alpha$

Aleshores, $\angle CFD = 90°$

2305.- Determineu els angles dels triangles tals que el triangle format pels punts de tangència de la circumferència inscrita són semblants a l'inicial.
KöMaL, C1561

Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i d'incentre I.
Siguen D, E, F els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle i els costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, respectivament.
$\angle FID = 180° - B, \angle EID = 180° - C$
Aleshores, $\angle FDI = \frac{B}{2}, \angle EDI = \frac{C}{2}$



$$\angle FDE = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

Anàlogament,

$$\angle DEF = 90° - \frac{B}{2}, \angle DFE = 90° - \frac{C}{2}$$

Per ser $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ són semblants si els angles corresponents són iguals.
Hi ha 6 casos:

$\begin{cases} A = D \\ B = E, \\ C = F \end{cases}$

$\begin{cases} A = D \\ B = F, \\ C = E \end{cases} \begin{cases} A = F \\ B = E, \\ C = D \end{cases} \begin{cases} A = E \\ B = D \\ C = F \end{cases}$

$\begin{cases} A = E \\ B = F, \\ C = D \end{cases} \begin{cases} A = F \\ B = D \\ C = E \end{cases}$

Si $\begin{cases} A = D \\ B = E, \\ C = F \end{cases}$ $\begin{cases} A = 90° - \frac{A}{2} \\ B = 90° - \frac{B}{2} \\ C = 90° - \frac{C}{2} \end{cases}$, resolent el sistema: $\begin{cases} A = 60° \\ B = 60° \\ C = 60° \end{cases}$

Si $\begin{cases} A = D \\ B = F, \\ C = E \end{cases}$ $\begin{cases} A = 90° - \frac{A}{2} \\ B = 90° - \frac{C}{2} \\ C = 90° - \frac{B}{2} \end{cases}$, resolent el sistema: $\begin{cases} A = 60° \\ B = 60° \\ C = 60° \end{cases}$

Anàlogament, si $\begin{cases} A = F \\ B = E\text{, o bé} \\ C = D \end{cases}$ $\begin{cases} A = E \\ B = D \\ C = F \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} A = 60° \\ B = 60° \\ C = 60° \end{cases}$

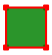
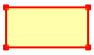
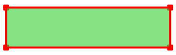
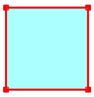
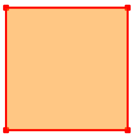
Si $\begin{cases} A = E \\ B = F, \\ C = D \end{cases}$ $\begin{cases} A = 90° - \frac{B}{2} \\ B = 90° - \frac{C}{2} \\ C = 90° - \frac{A}{2} \end{cases}$, resolent el sistema: $\begin{cases} A = 60° \\ B = 60° \\ C = 60° \end{cases}$

Anàlogament $\begin{cases} A = F \\ B = D \\ C = E \end{cases}$, aleshores, $\begin{cases} A = 60° \\ B = 60° \\ C = 60° \end{cases}$

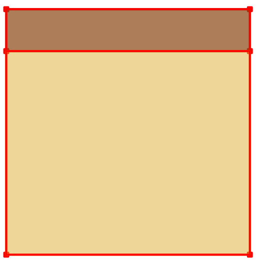
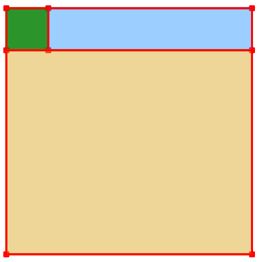
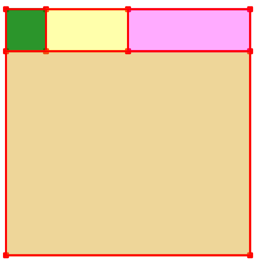
Aleshores, l'únic triangle que compleix la propietat és l'equilàter.

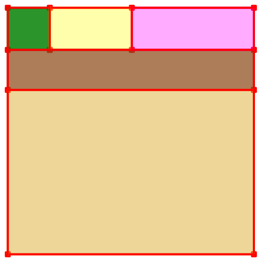
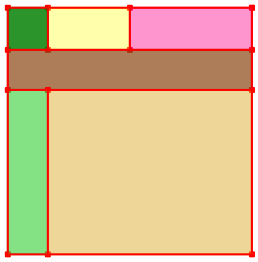
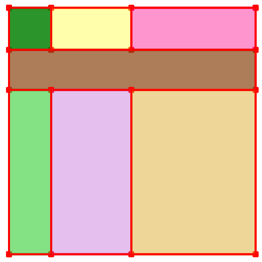
2306.- Una quadrícula quadrada 6×6 es divideix en n rectangles de diferents àrees tallant les línies de la quadrícula.
Poseu un exemple de tal dissecció per a tots els possibles $n > 1$
KöMaL, C1564

Solució:

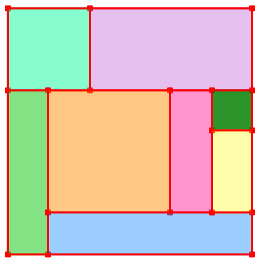
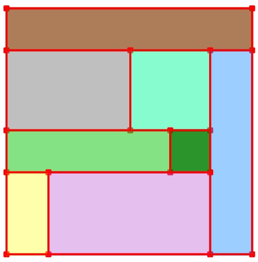
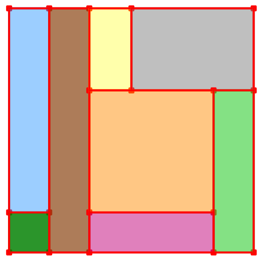
Tipus rectangle		Mesura	Àrea
1		1×1	1
2		2×1	2
3		3×1	3
4		4×1	4
5		5×1	5
6		6×1	6
4’		2×2	4
6’		3×2	6
8		4×2	8
9		3×3	9

L’àrea del quadrat inicial és 36.
Més de 7 rectangles distints no es poden formar.
Ja que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 > 36$

Si $n = 2$	Si $n = 3$	Si $n = 4$
		

Si $n = 5$	Si $n = 6$	Si $n = 7$
		

Si els rectangles són diferents hi ha possibilitat per a $n = 8$

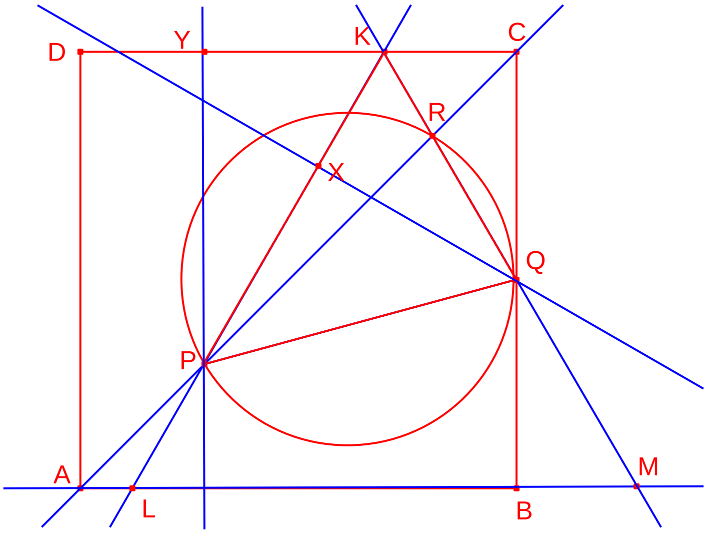
Més de 8 rectangles de distinta forma no és poden formar ja que:
$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 8 > 36$

2307.- Siga ABCD un quadrat, K un punt sobre el costat $\overline{CD}$

Siguen M i L dos punts sobre la recta AB tal que $\overset{\Delta}{KLM}$ siga un triangle equilàter.
Siga P la intersecció de les rectes LK i AC.
Siga Q la intersecció de les rectes MK i BC.
Siga R la intersecció de les rectes PC i QK.

Siga *I* la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{PQR}$
Demostreu que la circumferència *I* és tangent a la recta BC en Q.

Solució 1:



Notem que $\angle KQC = 30°, \angle PKC = 120°, \angle KCP = 45°$
$\angle KPC = 15°$
$\angle KRC = 75°$

Siga $x = \overline{CK}$
$\overline{QK} = 2x$
Siga Y la projecció de P sobre la recta CD.
Siga X la projecció de Q sobre la recta PK

$\overline{KX} = x$
$\overline{QX} = x\sqrt{3}$

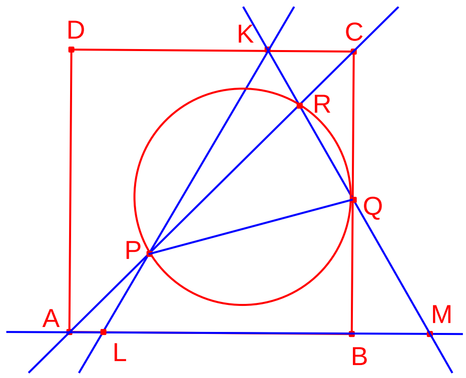
Siga $y = \overline{KY}$

$\overline{PY} = x + y = y\sqrt{3}, \overline{PK} = 2y$
$$y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}x$$

$\overline{PX} = \overline{PK} - \overline{KX} = 2y - x = x\sqrt{3}$

Aleshores, $\overline{PX} = \overline{QX}$
Per tant, , $\angle XPQ = 45°$
$\angle RPQ = \angle XPQ - \angle KPR = 45° - 15° = 30°$
$\angle ROC = \angle RPQ = 30°$
Aleshores, $\angle RQC$ és semiinscrit de la circumferència.
Aleshores, la circumferència *I* és tangent a la recta BC en Q.

Solució 2



Notem que $\angle KQC = 30°, \angle PKC = 120°, \angle KCP = 45°$
$\angle KPC = 15°$
$\angle KRC = 75°$

Siga $x = \overline{CK}$
$\overline{QK} = 2x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KRC}$

$$\frac{\overline{KR}}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 75°}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PQR}$

$$\frac{\overline{PR}}{\sin 60°} = \frac{\overline{KR}}{\sin 15°}$$

$$\overline{PR} = \frac{\sin 60°}{\sin 15°}\frac{\sin 45°}{\sin 75°}x = x\sqrt{6}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PQC}$

$$\frac{\overline{PK}}{\sin 45°} = \frac{x}{\sin 15°}$$

$$\overline{PK} = \frac{\sin 45°}{\sin 15°}x = \left(1+\sqrt{3}\right)x$$

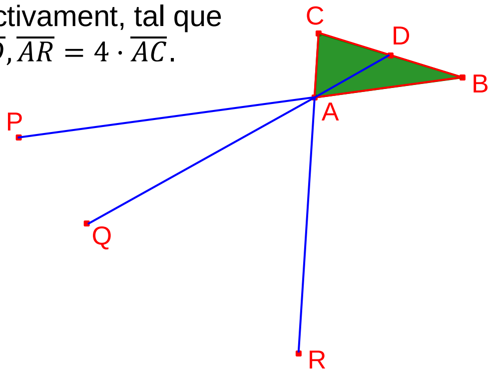
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{PKQ}$

$\overline{PQ}^2 = (2x)^2 + \left(\left(1+\sqrt{3}\right)x\right)^2 - 2\cdot 2x\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\cos 60° = 6x^2$

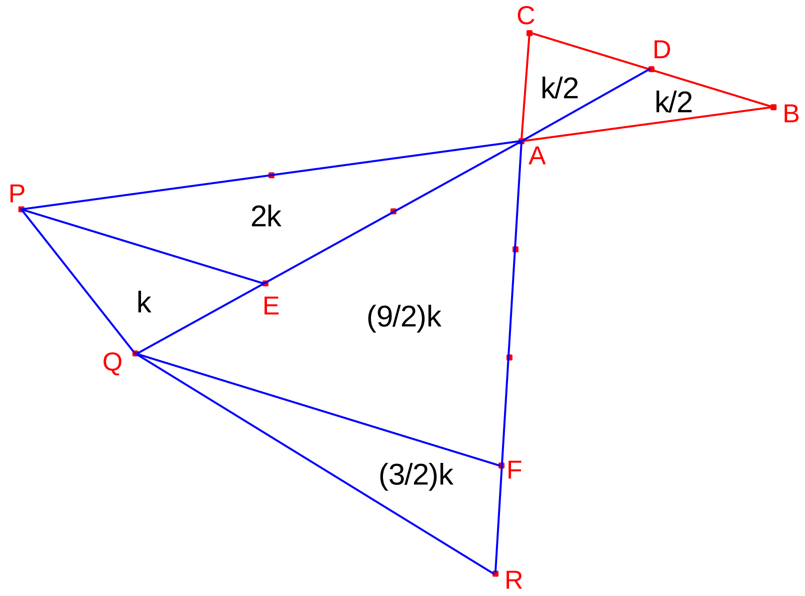
Aleshores, $\overline{PR} = \overline{PQ} = x\sqrt{6}$

Per tant el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és isòsceles:
$\angle PQR = \angle PRQ = 75°$
Aleshores, $\angle RPQ = 30°$
$\angle RPQ = \angle PQC = 30°$
Aleshores, $\angle RQC$ és semiinscrit de la circumferència.
Aleshores, la circumferència *I* és tangent a la recta BC en Q.

2308.- El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té àrea k i D és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Els punts P, Q, i R són de les rectes AB, AD i AC, respectivament, tal que mostra la figura, de manera que $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{AB}, \overline{AQ} = 3 \cdot \overline{AD}, \overline{AR} = 4 \cdot \overline{AC}$.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
Cangur 2019, nivell 5



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.



D és el punt mig del costat $\overline{BD}$, aleshores:

$$S_{ADC} = S_{ABD} = \frac{1}{2}k$$

En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{APE}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores:

$$S_{APE} = 2^2 \cdot S_{ABD} = 2k$$

$$S_{QEP} = \frac{1}{2}S_{APE} = k$$

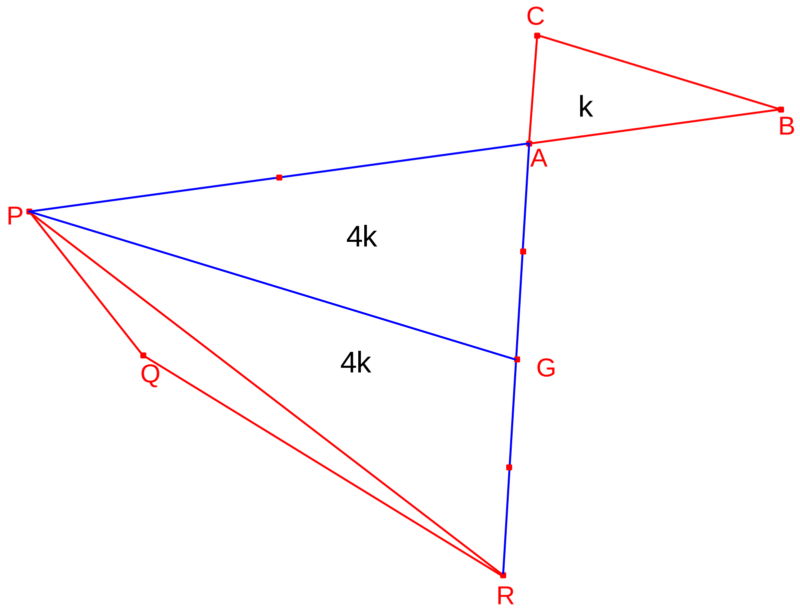
En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{AQF}$ són semblants i de raó 1:3
Aleshores:

$$S_{AQF} = 3^2 \cdot S_{ADC} = \frac{9}{2}k$$

$$S_{QRF} = \frac{1}{3}S_{AQF} = \frac{3}{2}k$$

$$S_{APQR} = S_{APE} + S_{QEP} + S_{AQF} + S_{QEF} = 2k + k + \frac{9}{2}k + \frac{3}{2}k = 9k$$

En la mateixa figura:



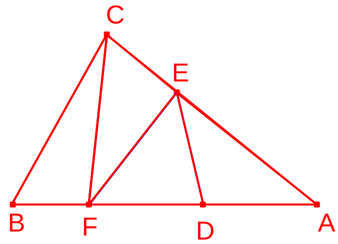
En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{APG}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores:
$S_{APG} = 2^2 \cdot S_{ABD} = 4k$
$S_{RGP} = S_{APB} = 4k$

$S_{APR} = S_{APG} + S_{RGP} = 4k + 4k = 8k$

$S_{PQR} = S_{APQR} - S_{APR} = 9k - 8k = k$

2309.- A l'interior del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ hem traçat els segments $\overline{CF}, \overline{FE}, \overline{ED}$ que el divideixen en quatre triangles d'igual àrea.
Determineu el valor $\frac{\overline{AF}}{\overline{DB}}$

Cangur 2019, nivell 5



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{DFE}$ tenen la mateixa altura i àrea, aleshores:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{FD}} = 1$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AFC}, \overset{\Delta}{FBC}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = 3$$

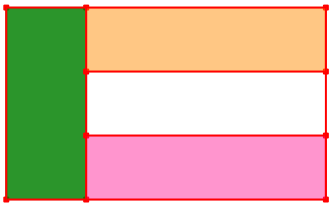
Siga $x = \overline{AD} = \overline{FD}$

$$\overline{AF} = 2x$$

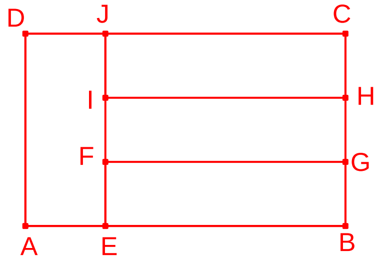
$$\overline{BF} = \frac{2}{3}x, \overline{DB} = \frac{2}{3}x + x = \frac{5}{3}x$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DB}} = \frac{2x}{\frac{5}{3}x} = \frac{6}{5}$$

2310.- La bandera de Cangúria és un rectangle que la raó entre l'altura i l'amplada és 3:5.
La bandera està dividida en quatre rectangles d'àrees iguals disposats com es veu a la figura.
Calculeu la raó entre les longituds dels costats del rectangle blanc.
Cangur 2019, nivell 5



Solució:



Siga $\overline{BF} = x$
La ráo entre l'altura i l'amplada de la bandera és 3:5, aleshores:
$\overline{AB} = 5x, \overline{AD} = 3x$
L'area del rectangle blanc FGHI és la quarta part de l'àrea del rectangle ABCD:
$$S_{FGHI} = \frac{1}{4}3x \cdot 5x = \frac{15}{4}x^2$$

Siga $y = \overline{AE}$
L'area del rectangle AEJD és la quarta part de l'àrea del rectangle ABCD:
$$S_{AEJD} = \frac{15}{4}x^2 = y \cdot 3x$$
Resolent l'equació:
$$\overline{AE} = y = \frac{5}{4}x$$
$$\overline{EB} = 5x - \frac{5}{4}x = \frac{15}{4}x$$
Aleshores, entre els costats del rectangle blanc FGHI és:
$$\frac{\overline{GH}}{\overline{FG}} = \frac{x}{\frac{15}{4}x} = \frac{4}{15}$$