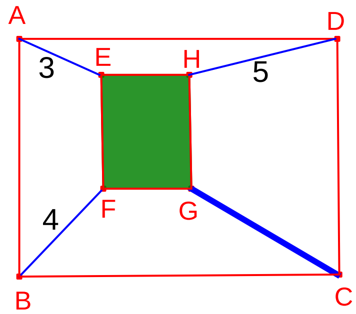
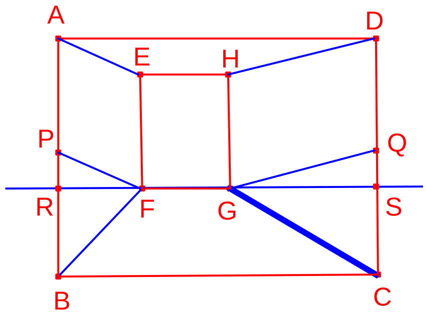
Problemes de Geometria per a l'ESO 232

2311.- En la figura els costats dels rectangles ABCD i EFGH són paral·lels.
Saben que $\overline{AE} = 3, \overline{BF} = 4$ i $\overline{DH} = 5$, calculeu la mesura del segment $\overline{CG}$.



Solució:
Siga $x = \overline{CG}$
Pel punt F tracem una recta paral·lela a AE que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P.
Pel punt G tracem una recta paral·lela a DH que talla el costat $\overline{CD}$ en el punt Q.
Siga R la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$
Siga S la projecció de F sobre el costat $\overline{CD}$



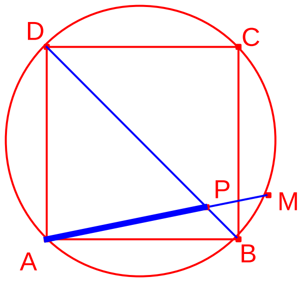
Siga $\overline{BR} = \overline{CS} = a$
Siga $\overline{PR} = \overline{QS} = b$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$4^2 - a^2 = 3^2 - b^2$
$x^2 - a^2 = 5^2 - b^2$
Restant ambdues expressions:
$x^2 - 16 = 16$
$x = \sqrt{32}$

2312.- El quadrat ABCD està inscrit en una circumferència de radi 30.
La corda $\overline{AM}$ talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt P.
Si $\overline{AM} = 50$ determineu la mesura de $\overline{AP}$

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AB} = 30\sqrt{2}$

Siga $\angle ABM = \alpha$
Per ser angle inscrit i abraçar un quadrant, $\angle AMB = 45°$



$\angle ABP = 45°, \angle BAM = 135° - \alpha, \angle APB = \alpha$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABM}, \overset{\Delta}{APB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$$

$$\frac{\overline{AP}}{30\sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{2}}{50}$$

Resolent l'equació:
$\overline{AP} = 36$

2313.- Els costats d'un quadrilàter convex mesuren $\overline{AB} = 25, \overline{BC} = 12, \overline{CD} = 10, \overline{AD} = 9$ i la diagonal $\overline{AC} = 17$, calculeu:

a) L'àrea del quadrilàter ABCD.
b) Els angles del quadrilàter ABCD.
c) Classifiqueu el quadrilàter.
d) Calculeu la diagonal $\overline{BD}$

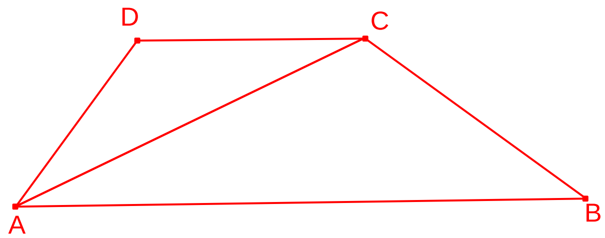
Solució:

a)

Aplicant la fórmula d'Heró:

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{36 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 18}}{4} + \frac{\sqrt{54 \cdot 4 \cdot 20 \cdot 30}}{4} = 36 + 90 = 126$$

b) c)



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$17^2 = 12^2 + 25^2 - 2 \cdot 12 \cdot 25 \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{4}{5}$$

$$B = \arccos \frac{4}{5} \approx 36°52'12"$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$

$$17^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos D$$

$$\cos D = -\frac{3}{5}$$

$$D = \arccos -\frac{3}{5} \approx 126°52'12"$$

Els angles B i D no són suplementaris aleshores, ABCD no és un paral·lelogram.

Siga $\angle CAB = \alpha,\ \angle DAC = \beta$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$12^2 = 17^2 + 25^2 - 2 \cdot 17 \cdot 25 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{77}{85}, \sin \alpha = \frac{36}{85}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$

$$10^2 = 9^2 + 70^2 - 2 \cdot 9 \cdot 17 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{15}{17}, \sin \beta = \frac{8}{17}$$

$$\cos A = \cos(\alpha + \beta) = \frac{77}{85} \cdot \frac{15}{17} - \frac{36}{85} \cdot \frac{8}{17} = \frac{3}{5}$$

Aleshores, A i D són suplementaris., per tant, ABCD és un trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}, \overline{CD}$

$$A = \arccos \frac{3}{5} \approx 53°7'48", C = \arccos -\frac{4}{5} \approx 143°7'37"$$

d)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$$\overline{BD}^2 = 9^2 + 25^2 - 2 \cdot 9 \cdot 25 \cdot \frac{3}{5}$$

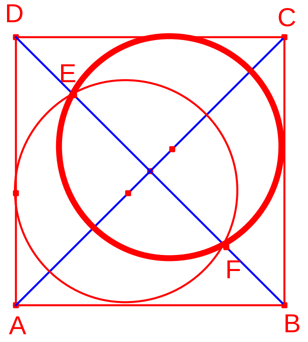
$$\overline{BD} = 2\sqrt{109} \approx 20.88$$

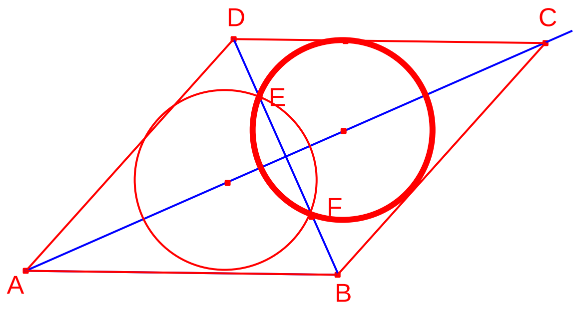
2314.- Siga ABCD un paral·lelogram.
Una circumferència interior al triangle paral·lelogram ABCD és tangent a les rectes AB i AD i talla la diagonal $\overline{BD}$ en els punts E i F.
Demostreu que existeix una circumferència que passa per E i F i és tangent a les rectes CB i CD.

Solució:

a)

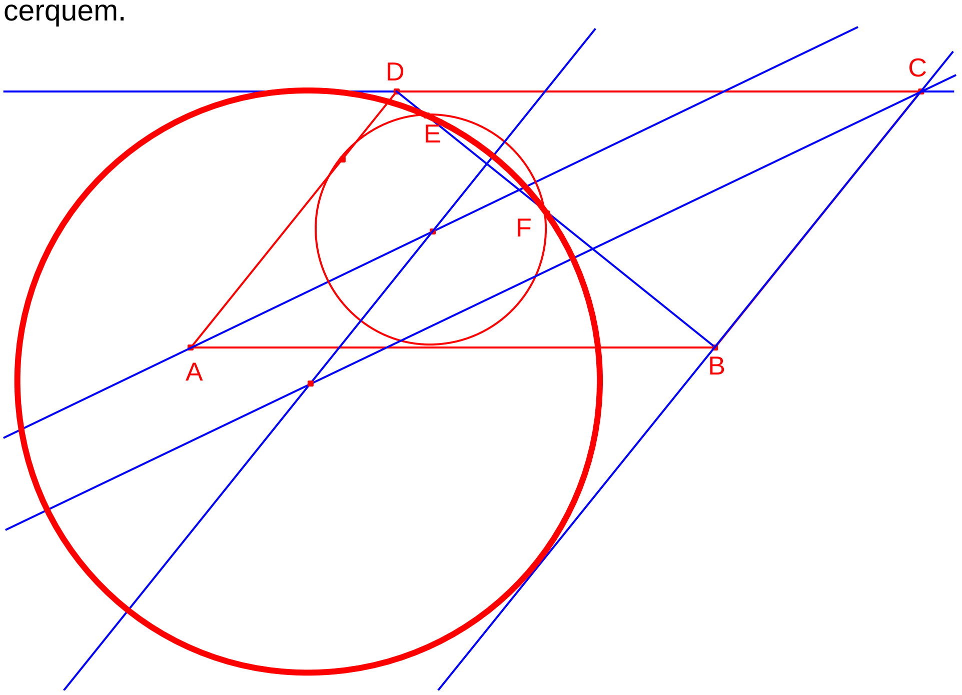
Suposem que el paral·lelogram ABCD té tots els costats iguals (quadrat o rombe).
Les figures són simètriques respecte de les diagonals.
Les diagonals del paral·lelogram són perpendiculars.
Donada la circumferència inicial la circumferència simètrica respecte de la diagonal $\overline{BD}$ és tangent als costats oposat i passa per E, F.





b)

Suposem que el paral·lelogram ABCD té els costats no paral·lels distints (rectangle o romboide).
Les diagonals del paral·lelogram no són perpendiculars
Les bisectrius dels angles oposats són paral·leles.
La mediatriu del segment $\overline{EF}$ i la bisectriu del vèrtex C són secants.
El punt intersecció equidista dels costat CB i CD, és el centre de la circumferència que cerquem.

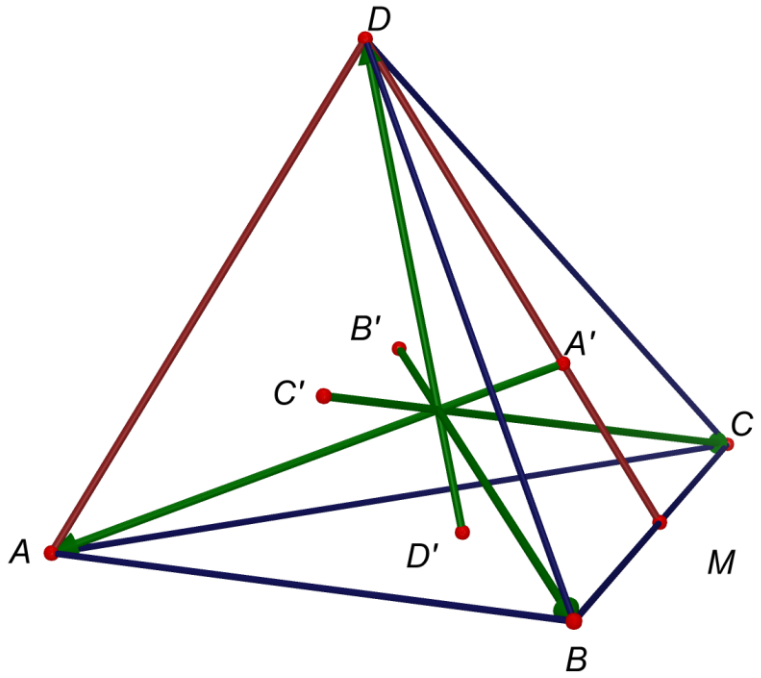


2315.- Siga el tetràedre ABCD i siguen A', B', C', D' els baricentres de les cares oposades als vèrtexs A, B, C i D, respectivament.

a) Demostreu que $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

b) Demostreu que els vectors $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{D'D}$ s'intersecten en un punt.

Solució:



a)

Considerem la base de l'espai formada pels vectors $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$

$$\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{D'D} = -\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AD} =$$
$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$$

b)

Considerem el sistema de referència cartesià de l'espai format per $\left\{A,\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right\}\right\}$

Un punt A" de $\overline{AA'}$ referit al sistema de referència anterior té coordenades:

$A"\left(k\cdot\frac{1}{3},k\cdot\frac{1}{3},k\frac{1}{3}\right),0\leq k\leq 1$

Un punt B" de $\overline{BB'}$ referit al sistema de referència anterior té coordenades:

$B"\left(1-m,m\cdot\frac{1}{3},m\frac{1}{3}\right),0\leq m\leq 1$

Igualant les coordenades dels dos punts:

$$\begin{cases} k\cdot\frac{1}{3}=1-m \\ k\cdot\frac{1}{3}=m\cdot\frac{1}{3} \\ k\cdot\frac{1}{3}=m\cdot\frac{1}{3} \end{cases}$$

Resolent el sistema format per les tres equacions:

$$\begin{cases} k=\frac{3}{4} \\ m=\frac{3}{4} \end{cases}$$

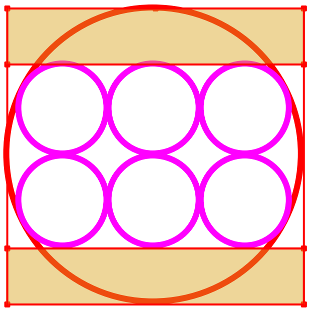
El punt intersecció té coordenades $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

Anàlogament, la intersecció de $\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{C'C}$ és $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

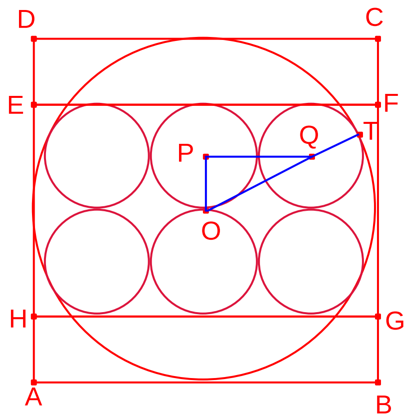
La intersecció de $\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{D'D}$ és $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

Aleshores, els tres segments s'intersecten en un punt.

2316.- Els sis circumferències menudes tenen radi 1.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga ABCD el quadrat exterior.
Siga O el centre de la circumferència tangent exterior.
Siga $\overline{OT} = r$ el radi.
Siguen P i Q centre de dues circumferències menudes.
$\overline{OP} = 1, \overline{PQ} = 2, \overline{OP} = r - 1$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$
$(r-1)^2 = 1^2 + 2^2$

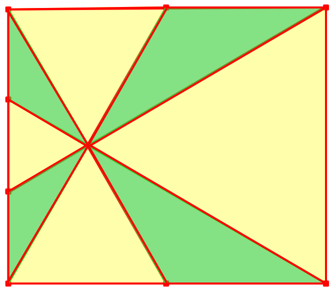
$r = 1 + \sqrt{5}$

Considerem el rectangle CDEF:
$\overline{EF} = 2r = 2 + 2\sqrt{5}, \overline{CF} = r - 2 = -1 + \sqrt{5}$

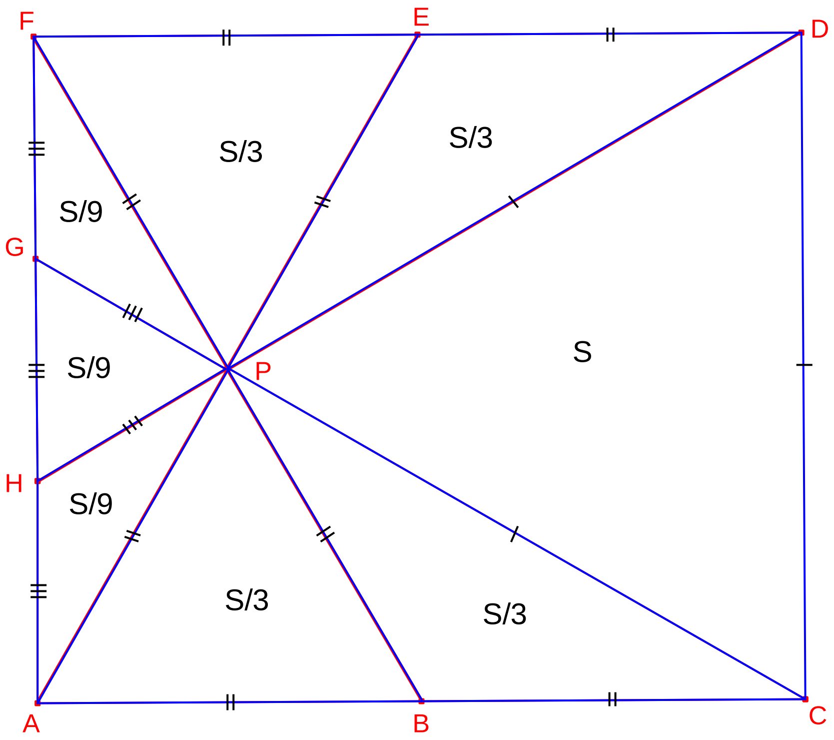
L'àrea ombrejada és igual al doble de l'àrea del rectangle CDEF:
$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{CDEF} = 2 \cdot \overline{EF} \cdot \overline{CF} = 2(2 + 2\sqrt{5})(-1 + \sqrt{5}) = 16$

Nota: el rectangle central és auri.

2317.- En la figura hi ha 4 triangles equilàter pintats de groc i 4 triangles pintats de verd.
Calculeu la proporció entre l'àrea pintada de verd i l'àrea pintada de groc.



Solució:



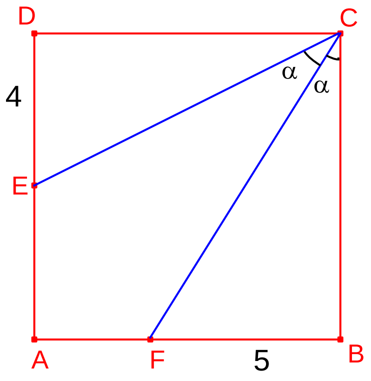
Siguen els triangles equilàters $\overset{\triangle}{ABP}, \overset{\triangle}{CDP}, \overset{\triangle}{EFP}, \overset{\triangle}{GHP}$
Siga $S = S_{CDP}$

Notem que $\angle GFP = \angle GPF = 30°$. Aleshores, $\overline{FG} = \overline{GP}$
Aleshores, $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{CD}$
Aleshores, $S_{GHP} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{1}{9}S$
Els triangles $\overset{\triangle}{FGP}, \overset{\triangle}{GHP}, \overset{\triangle}{AHP}$ tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base i altura.

Notem que $\angle EDP = \angle EPD = 30°$. Aleshores, $\overline{DE} = \overline{EF}$
L'altura del triangle equilàter $\overset{\triangle}{EFP}$ és igual a la meitat del costat del triangle equilàter $\overset{\triangle}{CDP}$. Aleshores, la proporció entre les altures dels triangles equilàters és $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Aleshores, $S_{GHP} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S = \frac{1}{3}S$
Els triangles $\overset{\triangle}{DEP}, \overset{\triangle}{EFP}$ tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base i altura.
La proporció entre les àrees pintades de verd i de groc són:

$$\frac{S_{verd}}{S_{groc}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}S + 2 \cdot \frac{1}{9}S}{S + \frac{1}{9}S + 2 \cdot \frac{1}{3}S} = \frac{1}{2}$$

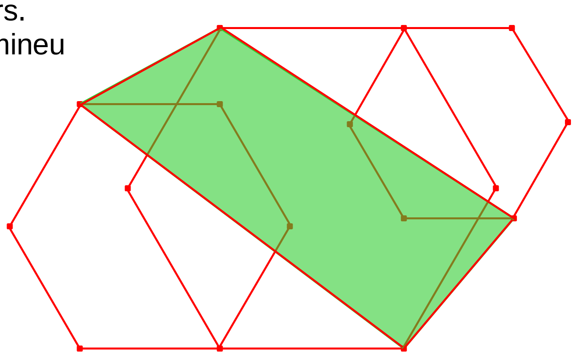
2318.- Siga el quadrat ABCD.
Siguen E i F dels costats $\overline{AD}, \overline{AB}$, respectivament, tal que $\overline{DE} = 4, \overline{BF} = 5$ i que $\angle ECF = \angle FCB$
Calculeu l'àrea del quadrat ABCD.



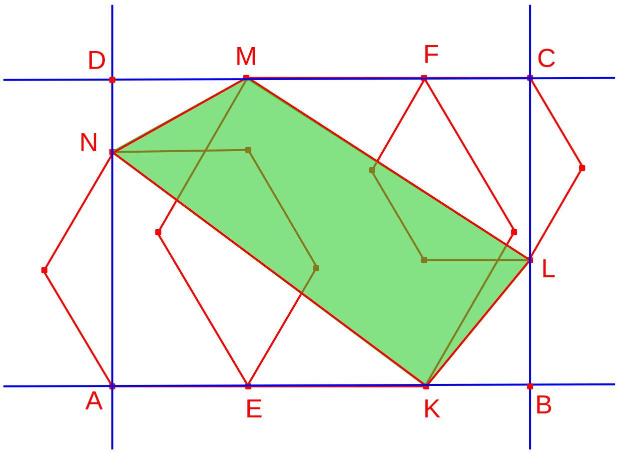
Solució:
Siga $x = \overline{AB}$ costat del quadrat.
Siga $\angle ECF = \angle FCB = \alpha$
$\angle DEC = 2\alpha$

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{CBF}$
$tg\ 2\alpha = \frac{x}{4}, tg\ \alpha = \frac{5}{x}$
Aplicant la fórmula de l'angle doble:
$$\frac{x}{4} = tg\ 2\alpha = \frac{2 \cdot tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{5}{x}}{1 - \frac{25}{x^2}}$$
Simnplificant:
$$\frac{x}{4} = \frac{10x}{x^2 - 25}$$
Simplificant l'equació:
$x^2 = 65$
Aleshores, l'àrea del quadrat ABCD és:
$S_{ABCD} = x^2 = 65$

2319.- En la figura, hi ha tres hexàgons regulars.
Si l'àrea de l'hexàgon regular gran és 9, determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



Siga KLMN el quadrilàter ombrejat.
Siga $\overline{EK} = c$ costat de l'hexàgon gran.
Siga $\overline{AE} = x$ costat de l'hexàgon de l'esquerra.
Siga $\overline{FC} = y$ costat de l'hexàgon menut.
L'àrea de l'hexàgon gran és:

$$S_{Hgran} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

Considerem el rectangle ABCD format per les rectes EK, CL, CF, AN

$\overline{AB} = c + x + y$

$\overline{AD} = \overline{EM} = c\sqrt{3}$

L'àrea del rectangle ABCD és:

$$S_{ABCD} = (c + x + y)\sqrt{3}$$

$\overline{CL} = y\sqrt{3}, \overline{AN} = x\sqrt{3}$

$\overline{LB} = \overline{EM} - \overline{CL} = (c - y)\sqrt{3}, \overline{KB} = \overline{CF} = y$

$\overline{DN} = \overline{EM} - \overline{AN} = (c - x)\sqrt{3}, \overline{DM} = \overline{AE} = x$

L'àrea del quadrilàter KLMN és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{,\Delta}{ABN}, \overset{,\Delta}{MCL}, \overset{,\Delta}{KBL}, \overset{,\Delta}{MDN}$.

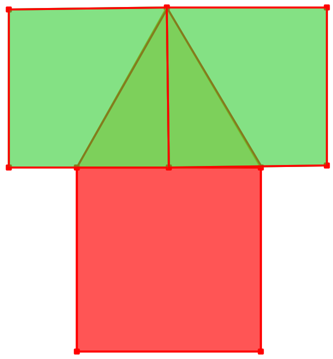
$$S_{KLMN} = (x + y + c)c\sqrt{3} - \frac{(c + x)x\sqrt{3}}{2} - \frac{(c + y)y\sqrt{3}}{2} - \frac{(c - y)y\sqrt{3}}{2} - \frac{(c - x)x\sqrt{3}}{2} = c^2\sqrt{3}$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter KLMN i l'hexàgon gran és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{Hgran}} = \frac{c^2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2} = \frac{2}{3}$$

Si l'àrea de l'hexàgon regular és 9 l'àrea de la zona ombrejada és 6.

2320.- Dos quadrats verds s'assenten damunt d'un quadrat roig, i el triangle de color verd fosc és equilàter. L'àrea del rectangle verd és 12.
Calculeu l'àrea del quadrat roig



Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD roig

Siga $\overline{MN}$ altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DCN}$ i costat comú dels quadrats verds.

$\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

L'àrea del quadrat roig és 12:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 = 12$

$c^2 = 16$

L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = c^2 = 16$