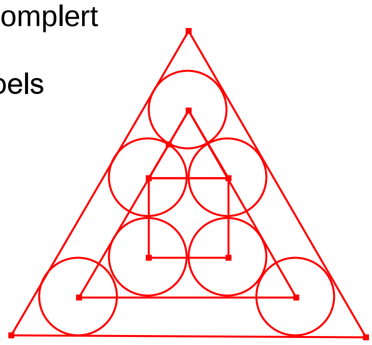
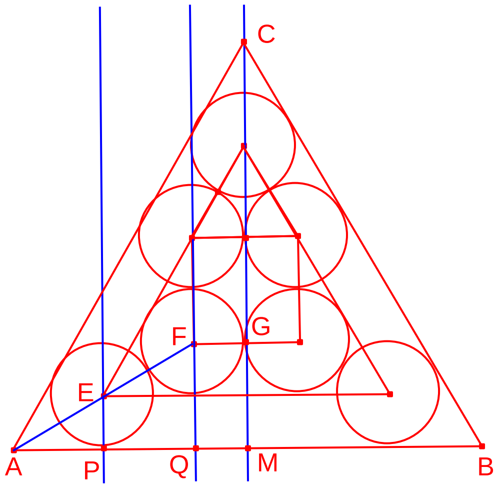
2321.- La figura següent mostra un empaquetament el més complert de set cercles en un triangle equilàter.
Determineu la fracció de l'àrea del triangle que està coberta pels cercles.
Crux Mathematicorum MA41



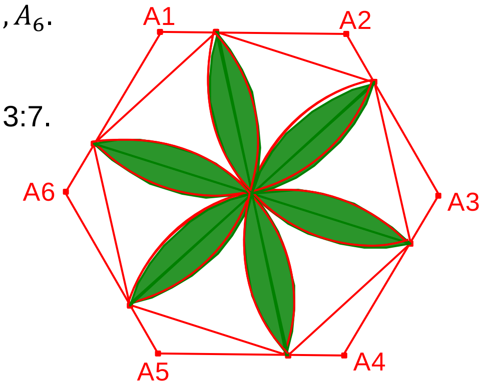
Solució:



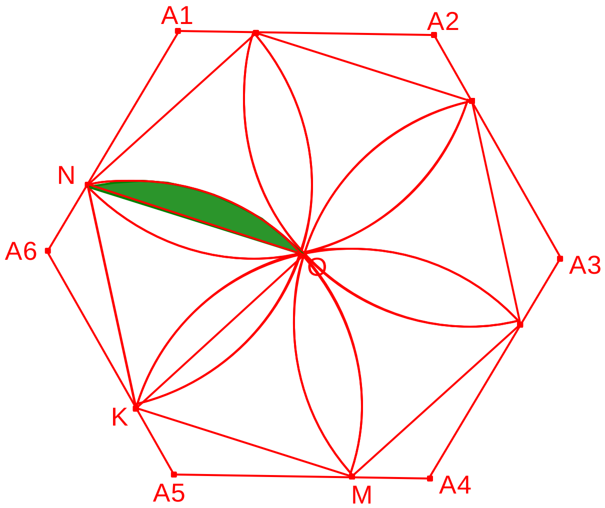
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter exterior.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga $\overline{EP} = 1$ radi de les set circumferències.
$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{EP} = 2, \overline{EF} = 2, \overline{QM} = \overline{FG} = 1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQF}$
$\overline{AQ} = 2\sqrt{3}$
$\overline{AM} = 1 + 2\sqrt{3}$
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM} = 2 + 4\sqrt{3}$
L'àrea dels set cercles és:
$S_{7cercles} = 7\pi$
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2 + 4\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 13\sqrt{3}$$
La proporció entre les dues àrees és:
$$\frac{S_{7cercles}}{S_{ABC}} = \frac{7\pi}{12 + 13\sqrt{3}} \approx 0.6371$$

2322.- Siga l'hexàgon regular de vèrtexs $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.
S'han dibuixat sis arcs de circumferència a l'interior de l'hexàgon, passant tots pel centre de l'hexàgon.
Els punts finals dels arcs divideixen els costats en la raó 3:7.
Les sis regions afitades per dos arcs són ombrejades.
Determineu la raó entre les àrees de la regió ombrejada i la de l'hexàgon regular.
Crux Mathematicorum 4489



Solució:



Siga l'haxàgon regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ de centre O.
Siga $\overline{A_1A_2} = 10x$ el costat.
Siga K el centre de l'arc MON:
Siga $\overline{KA_5} = 3x, \overline{KA_6} = 7x$
Siga $r = \overline{KO} = \overline{KN} = \overline{ON} = r$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $K\overset{\Delta}{A_6}N$:
$r^2 = (3x)^2 + (7x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 7x \cdot \cos(120°)$
$r^2 = 79x^2$
La zona total ombrejada esta formada per 12 segments circulars de 60º i radi r:

$$S_o = 12\left(\frac{1}{6}\pi \cdot r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) = \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)r^2 = \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)79x^2$$

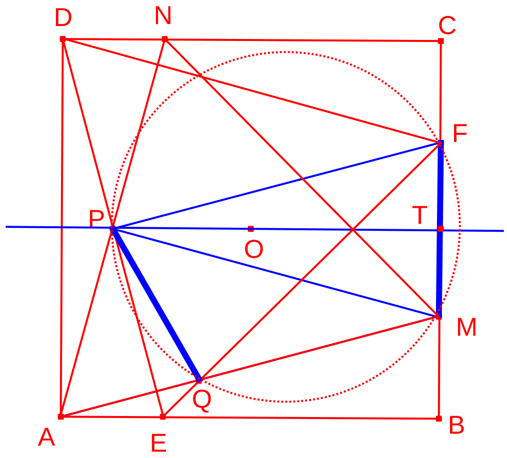
L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_H = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(10x)^2 = 150\sqrt{3} \cdot x^2$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_o}{S_H} = \frac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)79}{150\sqrt{3}} \approx 0.3305$$

2323.- Siga ABCD un quadrat.
Considerem E del costat $\overline{AB}$, N del costat $\overline{CD}$, i F i M del costat $\overline{BC}$ tal que els triangles $\overset{\Delta}{AMN}, \overset{\Delta}{DEF}$ són equilàters.
Siga P la intersecció de $\overline{AN}$ i $\overline{DE}$.
Siga Q la intersecció de $\overline{AM}$ i $\overline{EF}$.
Demostreu que $\overline{PQ} = \overline{FM}$
Crux Mathematicorum OC 451



Solució 1:
$\angle MAE = \angle ADE = \angle CDF = DAN = 15°$
P és el punt mig dels segments $\overline{DE}, \overline{AN}$

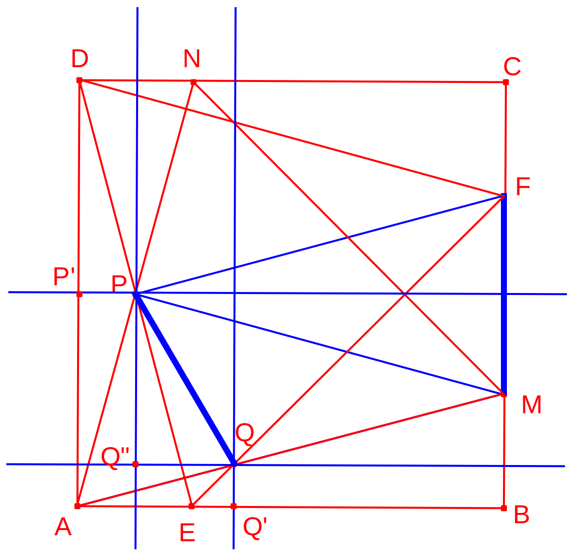
$\angle AMP = \angle PMN = 30°$
$\angle FEB = \angle BEF = \angle NMC = 45°$
Aleshores, $\angle AEQ = 135°$

$\overline{CF} = \overline{BM}$
P pertany a la mediatriu del segment $\overline{FM}$
Siga T el punt mig del segment $\overline{FM}$

$\angle AQE = \angle FQM = 30°$
$\angle PMF = \angle PMN + \angle NMC = 75°$
Aleshores $\angle MPT = 15°$

$\angle FPM = 2 \cdot \angle MPT = 30°$
Aleshores, el quadrilàter QMFP és cíclic ja que $\angle FPM = \angle FQM = 30°$
A més a més $\angle FQM = \angle QMP = 30°$
Aleshores les cordes $\overline{PQ}, \overline{FM}$ són iguals.

Solució 2.
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$
$\angle MAE = \angle ADE = \angle CDF = DAN = 15°$
Siga $\overline{AE} = \overline{MB} = \overline{CF} = \overline{DN} = x$
$x = tg(15°) = 2 - \sqrt{3}$
$\overline{FM} = 1 - 2 \cdot x = 2\sqrt{3} - 3$



Siga Q' la projecció de Q sobre el costat $\overline{AB}$
Siga $y = \overline{EQ'}$

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{EQ'Q}$ és isòsceles.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQ'Q}$

$$tg\ 15° = \frac{y}{x + y}$$

Resolent l'equació

$$y = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2}$$

Siga Q" la projecció de Q sobre la recta que passa per P i és perpendicular al costat $\overline{AB}$
Siga P' la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$

$\overline{PQ''} = \frac{1}{2} - y = \frac{6-\sqrt{3}}{2}$, $\overline{QQ''} = x + y - \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2}$

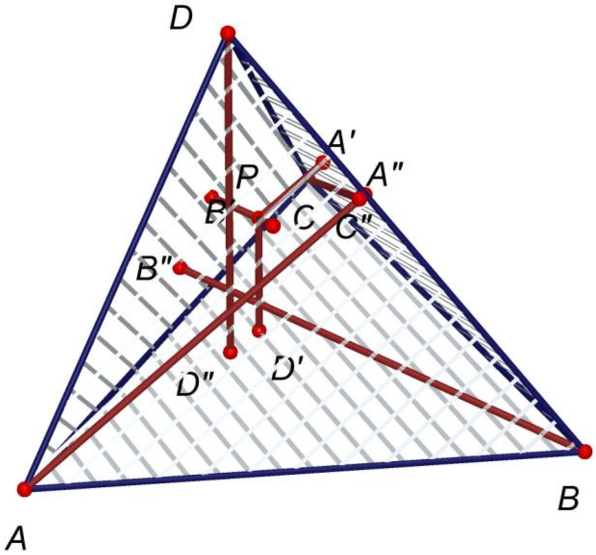
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQ''Q}$

$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{6-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}-2}{2}\right)^2 = 21 - 12\sqrt{3}$

$\overline{FM}^2 = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 = 21 - 12\sqrt{3}$

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{FM}$

2324.- Siga P un punt interior a un tetraedre ABCD.
Siguen A', B', C', D', les projeccions dels vèrtexs A, B, C i D sobre les cares oposades, respectivament.
Siguen h_A, h_B, h_C, h_D les altures del tetraedre referides als vèrtexs A, B, C i D, respectivament.
Proveu que
$$\frac{\overline{PA'}}{h_A}+\frac{\overline{PB'}}{h_B}+\frac{\overline{PC'}}{h_C}+\frac{\overline{PD'}}{h_D}=1$$



Solució:
Els tetraedres ABCD i ABCP tenen la mateixa base ABC, els volums són proporcionals a les altures.
$$\frac{V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PD'}}{h_D}$$
Anàlogament:
$$\frac{V_{BDCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{h_A},\frac{V_{ACDP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PB'}}{h_B},\frac{V_{ABDP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PC'}}{h_C}$$

Sumant les 4 expressions:
$$\frac{V_{BCDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ACDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{h_A}+\frac{\overline{PB'}}{h_B}+\frac{\overline{PC'}}{h_C}+\frac{\overline{PD'}}{h_D}$$

$$\frac{V_{BCDP}+V_{ACDP}+V_{ABDP}+V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{h_A}+\frac{\overline{PB'}}{h_B}+\frac{\overline{PC'}}{h_C}+\frac{\overline{PD'}}{h_D}$$
$$\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{h_A}+\frac{\overline{PB'}}{h_B}+\frac{\overline{PC'}}{h_C}+\frac{\overline{PD'}}{h_D}$$

Aleshores:
$$\frac{\overline{PA'}}{h_A}+\frac{\overline{PB'}}{h_B}+\frac{\overline{PC'}}{h_C}+\frac{\overline{PD'}}{h_D}=1$$

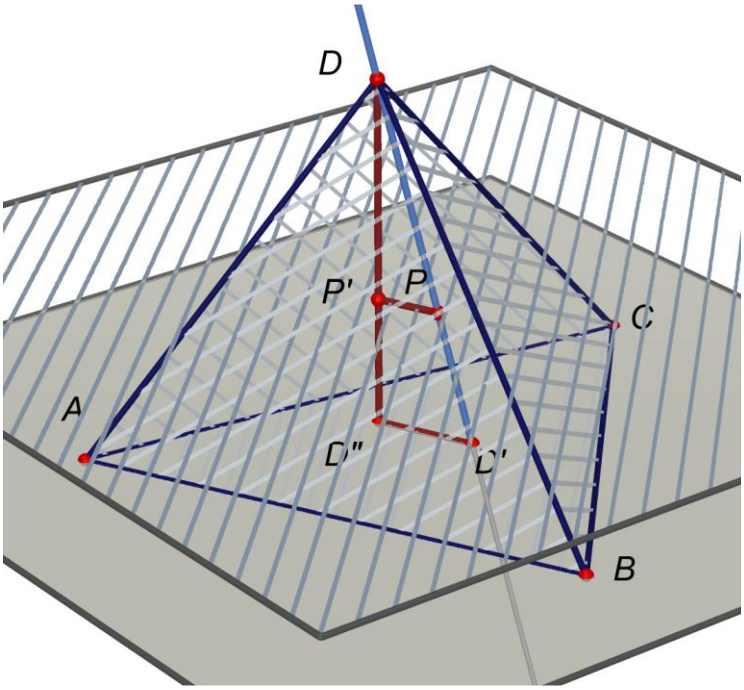
2325.- Siga P un punt interior a un tetraedre ABCD.
Siguen A', B', C', D', les interseccions de les rectes AP, BP, CP i DP sobre les cares oposades, respectivament.
Proveu que

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}=1$$

Curso de Geometria Métrica. Tomo 1. P. Puig Adam.

Solució.
Siga DD" l'altura del tetraedre ABCD referida al vèrtex D.
Siga P' la projecció de P sobre la recta DD".

Els tetraedres ABCP, ABCP' tenen el mateix volum, ja que tenen la mateixa base ABC i la mateixa altura.



Els tetraedres ABCD i ABCP tenen la mateixa base ABC, els volums són proporcionals a les altures.

$$\frac{V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{P'D"}}{\overline{DD"}}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DD"D'}, \overset{\Delta}{DP'P}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{P'D"}}{\overline{DD"}}=\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}$$

Aleshores,

$$\frac{V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{P'D'}}{\overline{DD'}}$$

Anàlogament:

$$\frac{V_{BDCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}},\frac{V_{ACDP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}},\frac{V_{ABDP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}$$

Sumant les 4 expressions:

$$\frac{V_{BCDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ACDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABDP}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}$$

$$\frac{V_{BCDP}+V_{ACDP}+V_{ABDP}+V_{ABCP}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}$$

$$\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}=\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}$$

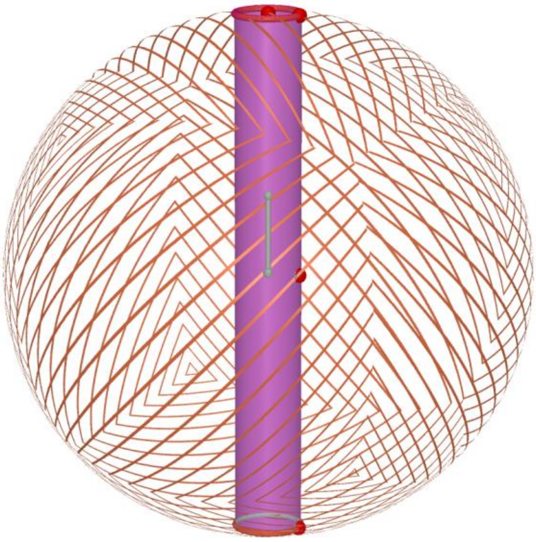
Aleshores,

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{PB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{PC'}}{\overline{CC'}}+\frac{\overline{PD'}}{\overline{DD'}}=1$$

2326.- En una esfera de radi R, un cilindre inscrit té àrea lateral la meitat de la d'un cercle màxim de l'esfera.
Calculeu el volum del cilindre.

Solució:
Siga r el radi del cilindre.
Aplicant el teorema de Pitàgores, l'altura del cilindre és:
$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$

L'àrea lateral del cilindre és:
$S_L = 2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}$



L'àrea del cercle màxim de l'esfera és:
$S = \pi R^2$

El cilindre inscrit té àrea lateral la meitat de la d'un cercle màxim de l'esfera.

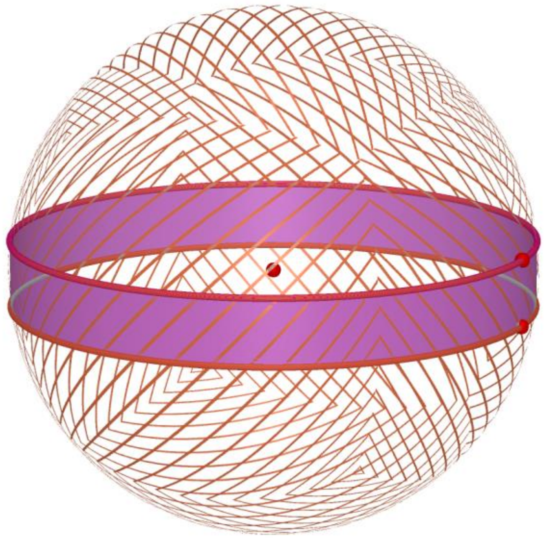
$$2\pi r \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{2}\pi R^2$$

Elevant al quadrat i simplificant:
$64r^4 - 64R^2r^2 + R^4 = 0$

Resolent l'equació:
$$r^2 = \frac{4 \pm \sqrt{15}}{8}R^2$$

Si $r^2 = \frac{4-\sqrt{15}}{8}R^2$
El volum del cilindre és:
$$V_1 = \frac{\pi}{16}\left(4 - \sqrt{15}\right)\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} \cdot R^3 \approx 0.0990 \cdot R^3$$

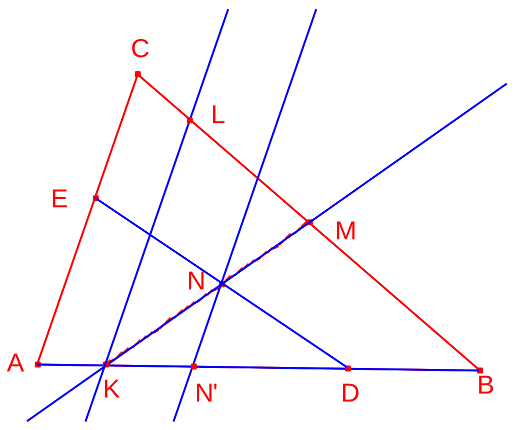
Si $r^2 = \frac{4+\sqrt{15}}{8}R^2$
El volum del cilindre és:
$$V_2 = \frac{\pi}{16}\left(4 + \sqrt{15}\right)\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} \cdot R^3 \approx 0.7791 \cdot R^3$$



2327.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siguen D i E en els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, respectivament, tal que $\overline{BD} = \overline{CE}$.
Siguem M i N els punys migs dels segments $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ respectivament.
Demostreu que la bisectriu de l'angle $\angle BAC$ és paral·lela a la recta MN.
OMA 2019, Nivell Primer.

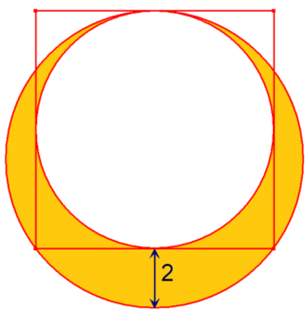
Solució
Siga $\overline{BD} = \overline{CE} = x$. Siga K del costat $\overline{AB}$ tal que
$$\overline{AK} = \frac{c-b}{2}$$
Pel punt K tracem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt L.
$\angle LKB = A$

Vegem que la recta KM és bisectriu de l'angle $\angle LKB$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{KBL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{CL}}{\overline{AK}} = \frac{a}{c}, \text{aleshores}, \overline{CL} = \frac{a(c-b)}{2c}$$
$$\overline{LM} = \frac{a}{2} - \overline{CL} = \frac{ab}{2c}$$
$$\overline{BK} = c - \overline{AK} = \frac{b+c}{2}$$
$$\frac{\overline{KL}}{b} = \frac{\overline{BK}}{c}$$
Aleshores,
$$\overline{KL} = \frac{b(b+c)}{2c}$$
$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BK}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b+c}{2}} = \frac{a}{b+c}$$
$$\frac{\overline{LM}}{\overline{KL}} = \frac{\frac{ab}{2c}}{\frac{b(b+c)}{2c}} = \frac{a}{b+c}$$
Aleshores,
$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{KL}}$$
Aleshores, KM és bisectriu de l'angle $\angle LKB = A$
Aleshores, KM és paral·lela a la bisectriu de l'angle A.

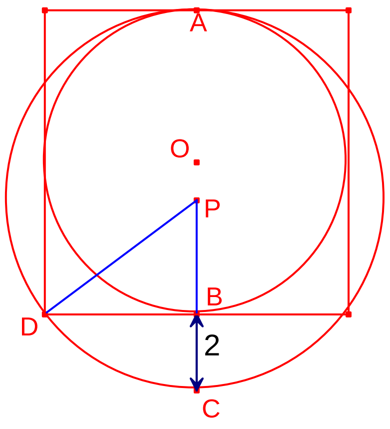


Vegem que el punt N pertany a la recta KM.
Pel punt N tracem una paral·lela al costat $\overline{AC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt N'.
$\angle NN'B = A$
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{NN'B}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\overline{NN'} = \frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2}(b-x)$$
$$\overline{AN'} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}(c-x)$$
$$\overline{KN'} = \overline{AN'} - \overline{AK} = \frac{c-x}{2} - \frac{c-b}{2} = \frac{b-x}{2}$$
Aleshores, $\overline{KN'} = \overline{NN'}$
Aleshores, $\angle NKN' = \frac{A}{2}$
Per tant, N pertany a la recta KM.

2328.- En la figura, calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:



Siga $r = \overline{OA} = \overline{OB}$ radi de la circumferència menuda de centre O.
Siga P el centre de la circumferència gran.
Siga $\overline{PD} = \overline{PC} = R$ el radi de la circumferència gran.

$2R = 2r + 2$
Aleshores, $R = 1 + r$

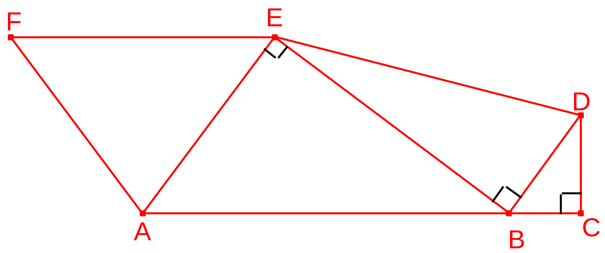
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DBP}$
$\overline{BD} = r, \overline{PB} = R - 2 = r - 1, \overline{PD} = R = 1 + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DBP}$
$(1 + r)^2 = r^2 + (r - 1)^2$
Simplificant:
$r^2 - 4r = 0$
Resolent l'equació:
$r = 4$
L'àrea ombrejada és igual a la diferència entre les àrees de les dues circumferències de radis $r = 4, R = 5$

$S_{ombrejada} = \pi 5^2 - \pi 4^2 = 9\pi$

2329.- En la figura:
A, B i C estan alineats.
$\overline{EF}$ és paral·lela a $\overline{AB}$.
Els angles $\angle BCD, \angle EBD, \angle AEB$ són rectes.
$\overline{AB} = 3 \cdot \overline{BD}, \overline{BE} = 3 \cdot \overline{CD}, \overline{AE} = \overline{AF}$
$\overline{BC} = 12\ cm$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és $96\ cm^2$
Calculeu:

a) El perímetre del polígon ACDE.
b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$.
c) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.
d) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.



Solució:
Siga M el punt mig del segment $\overline{EF}$
Siga N la projecció de E sobre el segment $\overline{AB}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ANE}, \overset{\Delta}{AME}$ són iguals.

$\overline{BC} = 12\ cm$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és $96\ cm^2$ aleshores:
$$\frac{12 \cdot \overline{CD}}{2} = 96$$
Aleshores, $\overline{CD} = 16$
$\overline{BE} = 3 \cdot \overline{CD} = 48$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$
$\overline{BD} = 20$
$\overline{AB} = 3 \cdot \overline{BD} = 60$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EBD}$
$\overline{DE} = 52$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$
$\overline{AE} = 36$

Els triangles $\overset{\Delta}{ANE}, \overset{\Delta}{AEB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{EN}}{48} = \frac{36}{60}, \frac{\overline{AN}}{36} = \frac{36}{60}$$
$$\overline{AM} = \overline{EN} = \frac{144}{5}, \overline{EM} = \overline{AN} = \frac{108}{5}$$
$$\overline{EF} = 2 \cdot \overline{EM} = \frac{216}{5}$$
a)
El perímetre de ACDE és:
$P_{ACDE} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{AE} = 72 + 16 + 52 + 36 = 176\ cm$
b)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és igual a l'àrea del quadrilàter ACDE menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$
$$S_{CDE} = S_{ACDE} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(36 \cdot 48 + 20 \cdot 48 + 12 \cdot 16) - \frac{1}{2} 72 \cdot 16 = 984\ cm^2$$

c)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és igual a l'àrea del quadrilàter ACDE menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACE}$

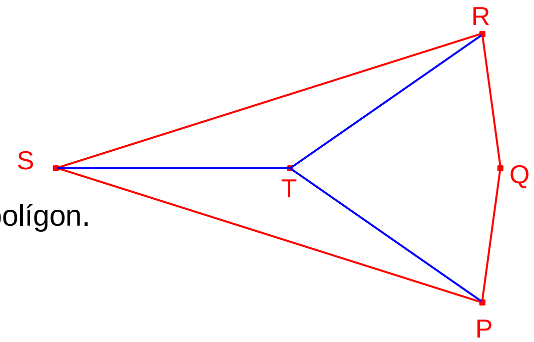
$$S_{CDE} = S_{ACDE} + S_{ACE} = \frac{1}{2}(36 \cdot 48 + 20 \cdot 48 + 12 \cdot 16) - \frac{1}{2}72 \cdot \frac{144}{5} = \frac{2616}{5}\ cm^2$$

d)

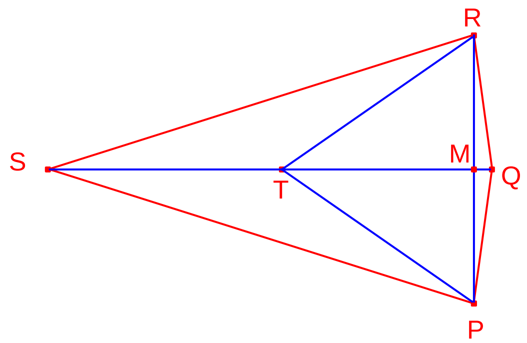
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$$S_{CDE} = \frac{1}{2}\frac{216}{5} \cdot \frac{144}{5} = \frac{15552}{25}\ cm^2$$

2330.- En la figura:
$\overline{PQ} = \overline{QR}$
$\overline{PT} = \overline{ST} = \overline{RT}$
$\angle RTP = 70°$
$\angle SRQ = \angle SPQ = 80°$
Calculeu la mesura de l'angle $\angle RQP$
Si $\overline{PQ}, \overline{QR}$ són els costats d'un polígon regular, calculeu els nombre de costats del polígon.



Solució:



Notem que les diagonals del polígon PQRT són perpendiculars ja que
$\overline{PQ} = \overline{QR}$, $\overline{PT} = \overline{RT}$
Siga M la intersecció de les diagonals del polígon PQRT.

$\angle RTQ = \angle PTQ = 35°$
$\angle TQR = \angle TQP$, $\angle SRQ = \angle SPQ = 80°$
Aleshores, $\angle RSQ = \angle PSQ$
Aleshores, S, T, Q estan alineats.

Siga $\angle RSQ = \angle PSQ = \alpha$

$\angle RST = \angle SRT = \alpha$
$\angle TRM = 55°$
Els angles del triangle $\overset{\Delta}{SMR}$ sumen 180º
$2\alpha + 55° = 90°$
$\alpha = \frac{1}{2}35°$
$\angle PRQ = \angle SRQ - \angle SRM = 80° - \left(\frac{1}{2}35° + 55°\right) = \frac{1}{2}15°$
$\angle PQR = 180° - 2 \cdot \angle PRQ = 165°$

Si $\overline{PQ}, \overline{QR}$ són els costats d'un polígon regular, calculeu els nombre de costats del polígon regular, $\angle PQR = 165°$ és l'angle interior:
Si n és el nombre de costats:
$\angle PQR = 165° = \frac{180°(n-2)}{n}$
Resolent l'equació $n = 24$
El polígon regular té 24 costats.