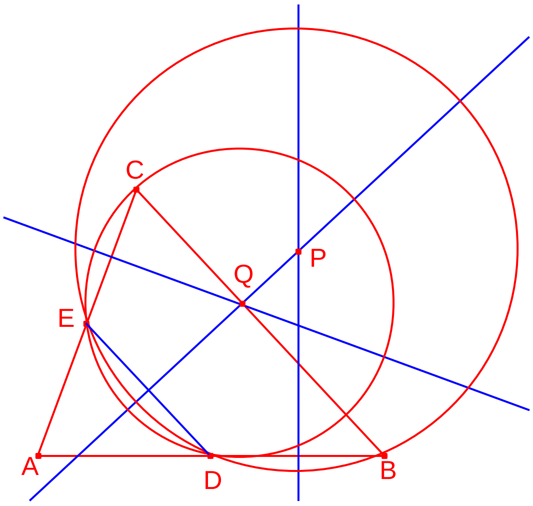
Problemes de Geometria per a l'ESO 234

2331.- Siguen D i E els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{AC}$, respectivament, del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen P i Q els centres de les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{DBE}, \overset{\Delta}{DEC}$, respectivament.
Proveu que la recta PQ és perpendicular al costat $\overline{BC}$
KöMaL, C1568

Solució:

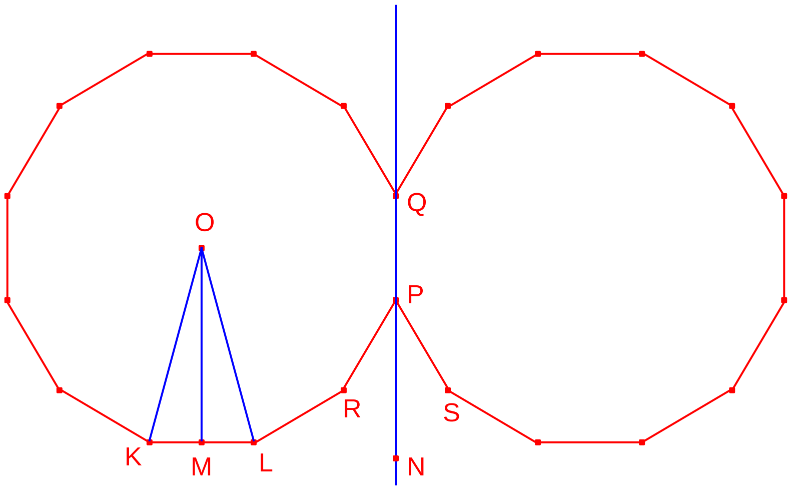


$\overline{DE}$ és una corda de les dues circumferències circumscrites.
La mediatriu de la la corda passa pel centre de les dues circumferències.
Aleshores la recta PQ és perpendicular al segment $\overline{DE}$.

El segment $\overline{DE}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
El segment $\overline{CE}$ és paral·lel al costat $\overline{BC}$
Aleshores, la recta PQ és perpendicular al costat $\overline{BC}$.

2332.- La moneda de 50 cèntims d'Austràlia està formada per un dodecàgon regular de 31.5 mm de diàmetre
Si s'uneixen dos monedes per un costat quin angle formen els costats més propers.
Calculeu la mesura del costat del dodecàgon.

Solució:



Siga O el centre d'una moneda de 50 cèntims i $\overline{KL} = c$ el costat.
L'angle central del polígon regular és:

$$\angle KOL = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

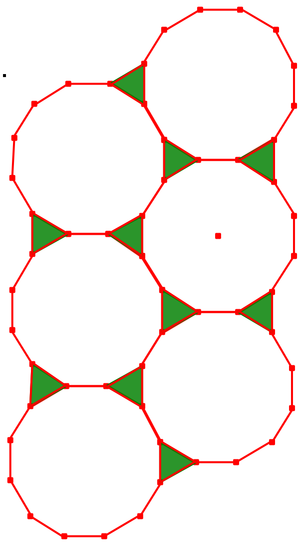
Siga PQ la recta que formen la juxtaposició de les dues monedes.
L'angle que cerquem és $x = \angle RPS$

$$\angle RPN = \frac{1}{2}\angle RPS = \frac{1}{2}x$$

$\angle RPN$ és un angle exterior del polígon regular.
L'angle exterior d'un polígon regular mesura el mateix que l'angle central.

$$\angle RPN = 30^\circ = \frac{1}{2}x$$

Aleshores,
$x = 60^\circ$



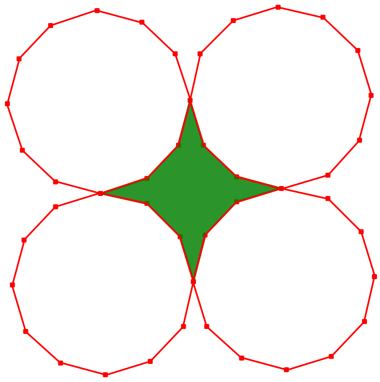
Siga M el punt mig del costat $\overline{KL}$ del dodecàgon regular.
$\overline{OK} = \frac{1}{2}31.5$
$\angle KOM = 15^\circ$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMO}$

$$\frac{c}{2 \cdot \frac{1}{2}31.5} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

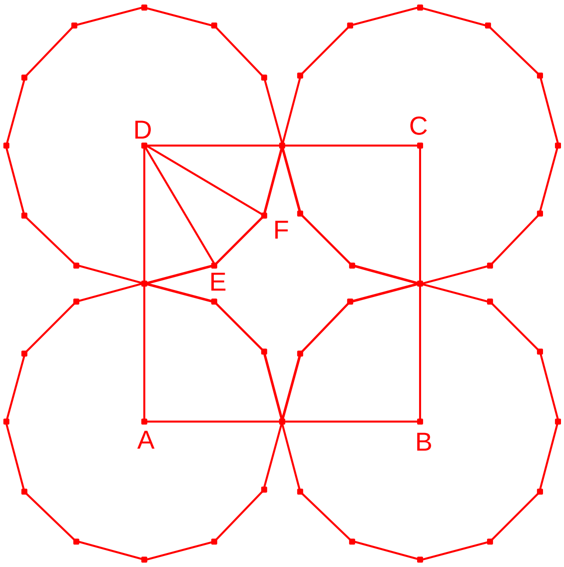
Resolent l'equació:

$$c = 31.5 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \approx 8.2\ mm$$

2333.- La moneda de 50 cèntims d'Austràlia està formada per un dodecàgon regular de 31.5 mm de diàmetre
S'uneixen quatre monedes pels vèrtexs formant les quatre monedes un quadrat.
Calculeu l'àrea de la regió afitada per les 4 monedes.



Solució:



Siga ABCD el quadrat que formen els centres dels quatre dodecàgons regulars.
$\overline{AB} = 31.5$, mesura del diàmetre del dodecàgon.
La mesura de l'angle central $\angle EDF$ és

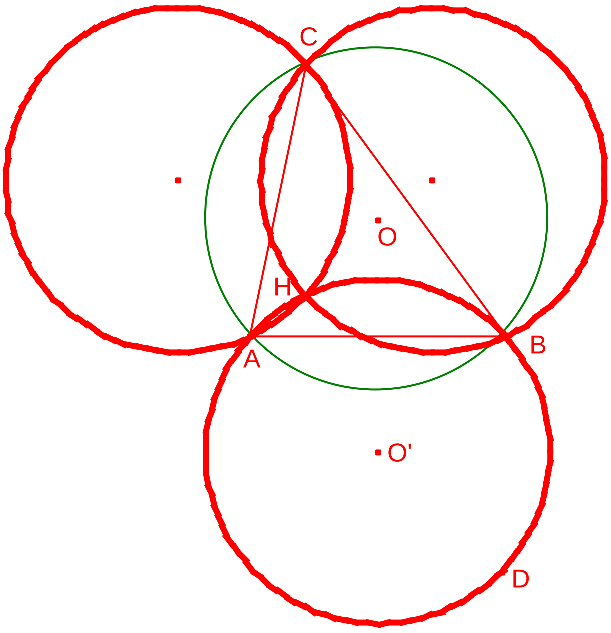
$$\angle EDF = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

L'àrea que cerquem és igual a l'àrea del quedat ABCD menys l'àrea de 12 triangles $\overset{\Delta}{DEF}$

$$S = 31.5^2 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{31.5}{2}\right)^2 \sin 30^\circ = \frac{1}{4} 31.5^2 \approx 248.1 mm^2$$

2334.- Donat una circumferència en el plànol, determineu el lloc geomètric dels ortocentres dels triangles inscrits en la circumferència.
KöMaL B5055

Solució:



Siga O el centre de la circumferència.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ inscrit en la circumferència.
Suposem el costat $\overline{AB}$ fix i el vèrtex C variable al llarg de la circumferència.

Considerem el punt simètric O' del centre O respecte del costat $\overline{AB}$
La circumferència de centre O' que passa pels punts A i B té el mateix radi que la circumferència inicial.

$\angle AOB = \angle AO'B = 2C$ per ser angles centrals.

$\angle HAB = 90° - B, \angle HBA = 90° - A$

$\angle AHB = 180° - C$

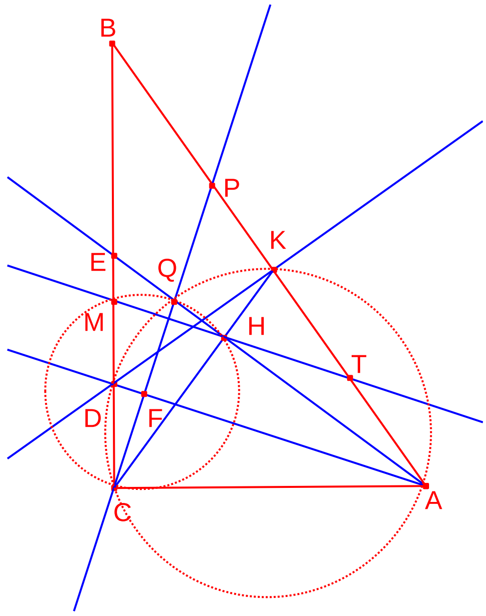
L'arc de la circumferència de centre O' $\widehat{ADB} = 360° - 2C$
$\angle AHB = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = 180° - C$

Aleshores, H recorre la circumferència de centre O' que passa pels punts A i B.

Aleshores, el lloc geomètric està format per tres circumferència d'igual radi a la circumferència inicial i centre els punts simètrics de O respecte dels tres costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

2335.- Siguen D i E dos punts del catet del triangle rectangle $\overline{BC}$ amb hipotenusa $\overline{AB}$ tal que $\angle DAC = \angle EAD = \angle BAE$
Siga F el peu de la perpendicular traçada des de C al AD.
Siga K el peu de la perpendicular traçada des de C a AB
La recta CK talla la recta AE en el punt H.
La recta paral·lela a AD que passa per H talla el catet $\overline{BC}$ en el punt M.
Proveu que F és el circumcentre del triangle $\overset{\Delta}{CHM}$
KöMaL B5057

Solució:
La recta CF talla la hipotenusa $\overline{AB}$ en el punt P.
La recta AE talla la recta CF en el punt Q.
La recta HM talla la hipotenusa $\overline{AB}$ en el punt T.



Siga $\alpha = \angle DAC = \angle EAD = \angle BAE$
$\angle DCF = \alpha, \angle ABC = 90° - 3\alpha$
Aleshores, $\angle CPA = 90° - 2\alpha$
$\angle BDK = 3\alpha$

Aleshores, el quadrilàter CAKD és cíclic ja que té els angles oposats suplementaris.

$\angle DKC = \angle DAC = \alpha$
Aleshores, $\angle FCK = 180° - (\angle CDK + \angle DCF + DKC) = \alpha$
Aleshores la recta CF és mediatriu del segment $\overline{MH}$

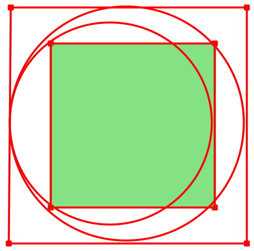
$\angle CKA = 90° - \alpha$
Aleshores, $\angle AHK = 90°$

$\angle MTK = \angle DAK = 2\alpha$
Aleshores, $\angle THA = \alpha$
Aleshores,$\angle CHQ = \angle CMQ = 90°$
Aleshores, El quadrilàter CMQM és cíclic, de diàmetre $\overline{CQ}$

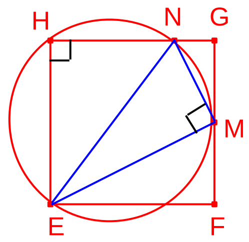
A més a més els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CFA}, \overset{\Delta}{QFA}$ són iguals.
$\overline{CF} = \overline{QF}$

Aleshores, F és el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{CHM}$

2336.- La figura està formada per dos quadrats i dues circumferències.
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:
Siga r el radi de la circumferència menuda.
Siga R el radi de la circumferència gran.
Siga ABCD el quadrat gran de costat $\overline{AB} = 2R$
Siga EFGH el quadrat interior de costat $\overline{EF} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{FG}$
La circumferència menuda talla el costat $\overline{HG}$ en el punt N.
$\overline{EN} = 2r$ és un diàmetre de la circumferència, aleshores, $\angle EMN = 90°$
Siga $x = \overline{NG}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NGM}$

$$\overline{MN} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFM}$

$$\overline{EM} = \sqrt{c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EMN}$

$$(2r)^2 = \frac{5}{4}c^2 + x^2 + \frac{1}{4}c^2$$

$$4r^2 = \frac{3}{2}c^2 + x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EHN}$

$$(2r)^2 = c^2 + (c - x)^2$$

$$4r^2 = 2c^2 + x^2 - 2cx \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$\frac{3}{2}c^2 + x^2 = 2c^2 + x^2 - 2cx$$

Aleshores:

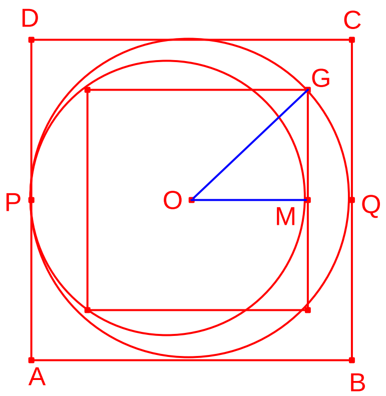
$$x = \frac{1}{4}c \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$4r^2 = \frac{3}{2}c^2 + \frac{1}{16}c^2$$

$$c = \frac{8}{5}r \qquad (4)$$

Siga O el centre del quadrat ABCD, centre de la circumferència gran.
Siga P el punt mig del costat $\overline{AD}$
Siga Q el punt mig del costat $\overline{BC}$



$\overline{PM} = 2r, \overline{OP} = R$

$$\overline{OM} = 2r - R = \frac{5}{4}c - R$$

$$\overline{OG} = R, \overline{MG} = \frac{1}{2}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMG}$

$$R^2 = \frac{1}{2}c^2 + \left(\frac{5}{4}c - R\right)^2$$

Simplificant:

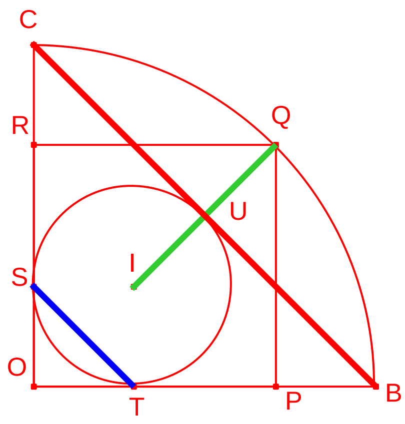
$$R = \frac{29}{40}c$$

La proporció entre les àrees dels dos quadrats és:

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{c^2}{(2R)^2} = \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{400}{841} \approx 0.4756$$

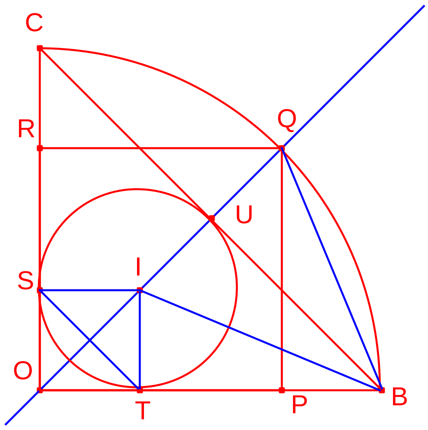
2337.- S'ha dibuixat un quadrant de centre O i radi $\overline{OB}$

El punt I és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$
S, T, U són els punts de tangència de la circumferència inscrita
OPQR és un quadrat inscrit en els radis i l'arc del quadrant.
Proveu que
$$\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{IQ}}=\frac{1}{\overline{TS}}$$



Solució:
Q és el punt mig del quadrant.
Aleshores, O, I, U i Q estan alineats.

Siga $r=\overline{IT}=\overline{OT}=\overline{IU}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{OBC}$
Per ser angle inscrit i abraçar un arc de $45°$
$$\angle CBQ=\frac{1}{2}45°$$
$$\angle IBU=\frac{1}{2}45°$$
Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IUB},\overset{\Delta}{QUB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{QU}=\overline{IU}=r$



OTIS és un quadrat de costat r.
$\overline{TS}=\overline{OI}=r\sqrt{2}$

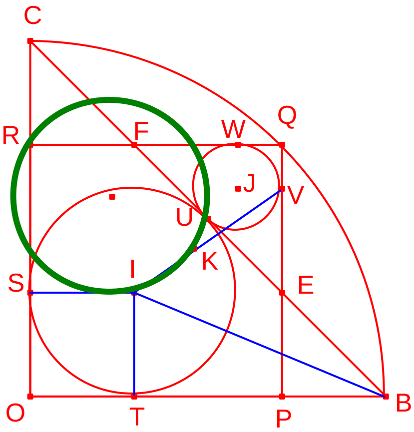
$\overline{QI}=2r$
$\overline{BC}=2\cdot\overline{BU}=2\cdot\overline{OU}=2\left(1+\sqrt{2}\right)r$

$$\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{IQ}}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)r}++\frac{1}{2r}=\frac{1}{r}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

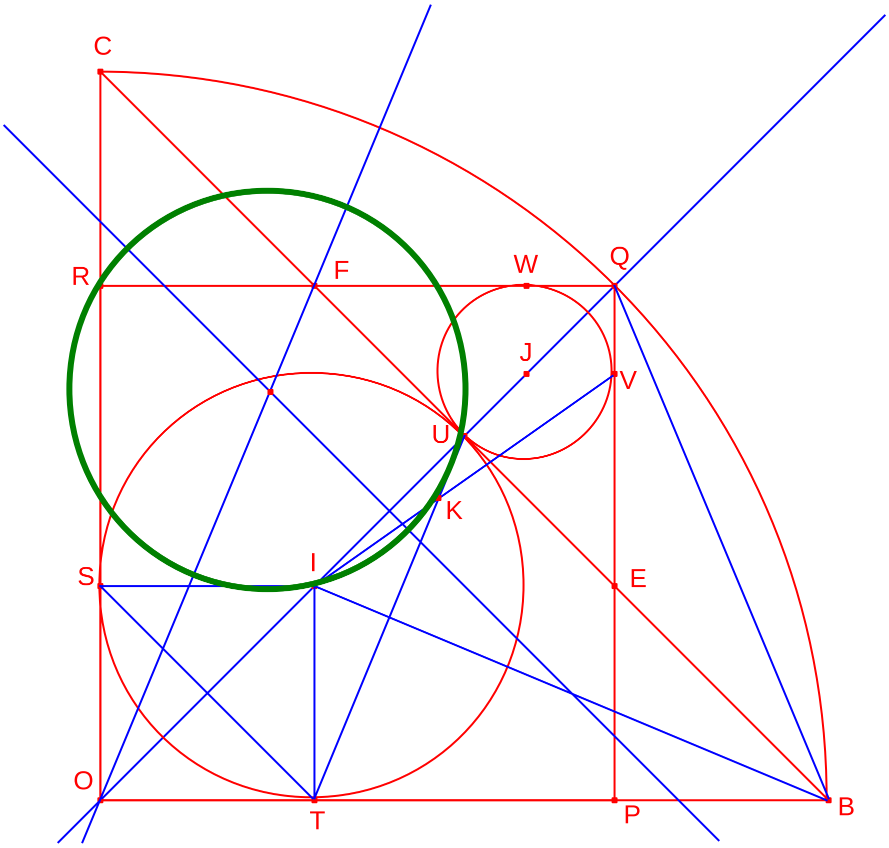
$$\frac{1}{\overline{TS}}=\frac{1}{r\sqrt{2}}=\frac{1}{r}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Aleshores,
$$\frac{1}{\overline{BC}}+\frac{1}{\overline{IQ}}=\frac{1}{\overline{TS}}$$

2338.- S'ha dibuixat un quadrant de centre O i radi $\overline{OB}$
OPQR és un quadrat inscrit en els radis i l'arc del quadrant.
$E = \overline{PQ} \cap \overline{BC}, F = \overline{QR} \cap \overline{BC}$

I, J són els incentres dels triangles $\overset{\Delta}{OBC}$, $\overset{\Delta}{FQE}$, respectivament.
S, T, U, V, W són els punts de tangència de les circumferències inscrites
Siga $K = \overline{IV} \cap \overline{TU}$
Proveu que I, K, U, R formen un quadrilàter cíclic.



Solució:



Q és el punt mig del quadrant.
Aleshores, O, I, U i Q estan alineats.

Siga $r = \overline{IT} = \overline{OT} = \overline{IU}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{OBC}$
Per ser angle inscrit i abraçar un arc de $45°$

$$\angle CBQ = \frac{1}{2}45°$$

$$\angle IBU = \frac{1}{2}45°$$

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IUB}, \overset{\Delta}{QUB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{QU} = \overline{IU} = r$

OTIS és un quadrat de costat r.

$\overline{TS} = \overline{OI} = r\sqrt{2}$
$\overline{QI} = 2r$
$\overline{OQ} = \overline{OB} = \left(2 + \sqrt{2}\right)r$
$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BU} = 2 \cdot \overline{OU} = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)r$
$\overline{OP} = \overline{OR} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = \left(1 + \sqrt{2}\right)r$
$\overline{CR} = \overline{RF} = \overline{OQ} - \overline{OP} = r$
$\overline{CF} = \sqrt{2} \cdot \overline{CR} = r\sqrt{2}$

$\overline{OU} = \overline{OI} + \overline{IU} = \left(1 + \sqrt{2}\right)r$

$\overline{OR} = \overline{OU}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OUR}$ és isòsceles.
Aleshores, $\angle IUR = 90° - \frac{45°}{2}$
El triangle $\overset{\Delta}{TIU}$ és isòsceles.
Aleshores, $\angle IUK = \frac{45°}{2}$
Aleshores, $\angle RUR = 90°$

$\overline{EF} = \overline{BC} - 2 \cdot \overline{CF} = 2r$

Els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{OBC}, \overset{\Delta}{QEF}$ són semblants i de raó $\overline{EF}$:$\overline{BC} = 1$:$\left(1 + \sqrt{2}\right)$
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{QV}}{r} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$
$\overline{QV} = \left(\sqrt{2} - 1\right)r$
$\overline{VE} = \overline{OP} - (\overline{OS} + \overline{QV}) = r$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SIR}, \overset{\Delta}{EVI}$ són iguals.

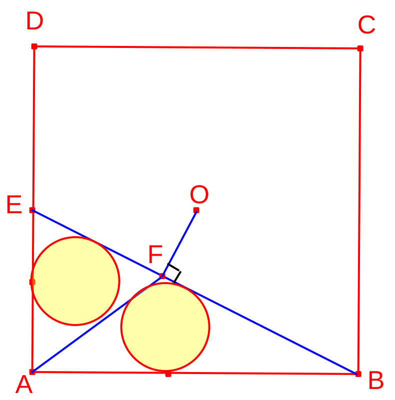
Aleshores, $\angle RIV = 90°$

Aleshores el quadrilàter SIUR té dos angles oposats rectes.
Aleshores el quadrilàter és cíclic.

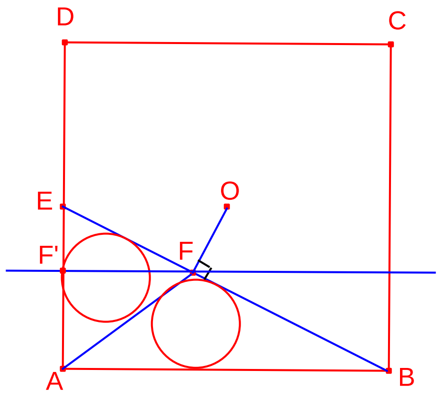
2339.- Siga ABCD el quadrat de centre O.
Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$
Siga F en el segment $\overline{BE}$ tal que $\overline{OF}$ és perpendicular a $\overline{BE}$.
Proveu que

a) $\overline{EF}+\overline{FO}=\overline{FB}$

b) Les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{AFE}, \overset{\Delta}{ABF}$ són iguals.



Solució:
Siga $\overline{AB}=c$, costat del quadrat ABCD.
$\overline{EO}$ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.
Siga F' la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{BE}=\frac{\sqrt{5}}{2}c$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{FEO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EF}}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\overline{OF}}{\frac{1}{2}c}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Aleshores,

$$\overline{EF}=\frac{\sqrt{5}}{5}c, \overline{OF}=\frac{\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{BF}=\overline{BE}-\overline{EF}=\frac{\sqrt{5}}{2}c-\frac{\sqrt{5}}{5}c=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{F'FE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FF'}}{c}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{2}{5}, \frac{\overline{EF'}}{\frac{1}{2}c}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{2}{5}$$

Aleshores,

$$\overline{FF'}=\frac{2}{5}c, \overline{EF'}=\frac{1}{5}c$$

$$\overline{AF'}=\overline{BE}-\overline{EF'}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{5}c=\frac{3}{10}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFF'}$:

$$\overline{AF}=\frac{1}{2}c$$

a)

$$\overline{EF}+\overline{FO}=\frac{\sqrt{5}}{5}c+\frac{\sqrt{5}}{10}c=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

$$\overline{FB}=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$$

Aleshores, $\overline{EF}+\overline{FO}=\overline{FB}$

b)

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AFE}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ és:

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{FF'} = \frac{1}{2}(\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{AF})r$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{5}c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c + \frac{\sqrt{5}}{5}c + \frac{1}{2}\right)r$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{5-\sqrt{5}}{20}c$$

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és:

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AF'} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BF} + \overline{AF})s$$

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{3}{10}c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{3\sqrt{5}}{10}c + \frac{1}{2}\right)s$$

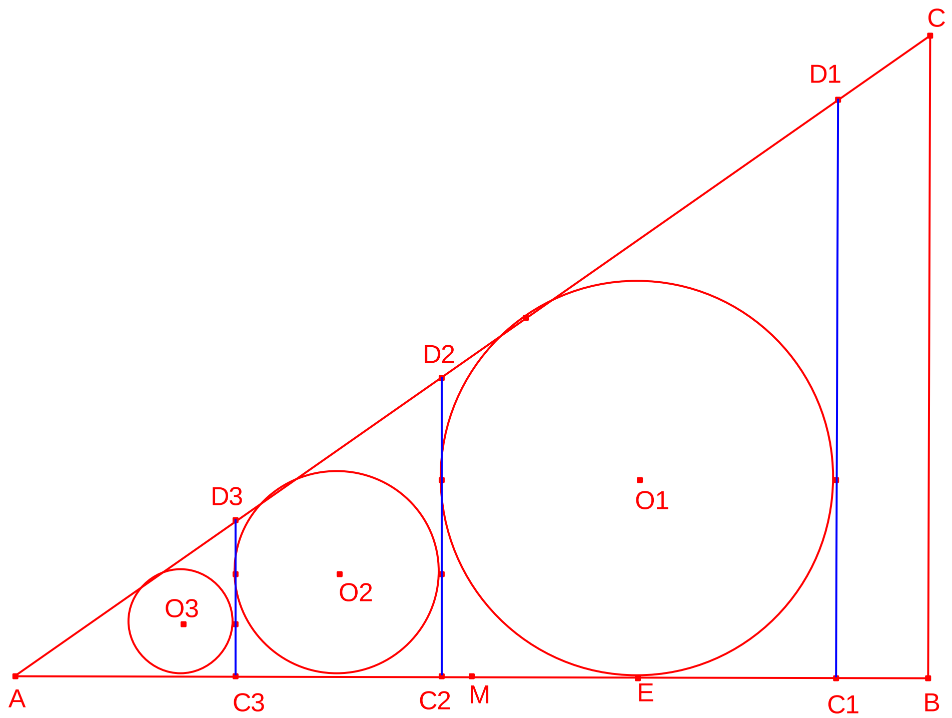
$$s = \frac{5-\sqrt{5}}{20}c$$

Els dos radis de les circumferències inscrites són iguals.

2340.- Siga el segment $\overline{AB}$ de longitud c que és el diàmetre d'una circumferència F y siga M el punt mig.
Amb centre en A i radi $\overline{AM}$ es traça l'arc de circumferència MR (R en F).
Calculeu en funció de c el radi de la circumferència inscrita (centre O_1) en el triangle mixtilini MRB.

Determineu el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle en B de manera que (O_1) siga tangent als dos costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

Determineu la longitud dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de c.
A continuació per a cada $n \in \mathbb{N} \sim \{1\}$, es considera la circumferència (O_n) en el triangle $\overset{\Delta}{AC_nD_n}$ essent C_n un punt de la recta AB i D_n un punt de la recta AC tals que la recta C_nD_n és paral·lela a la recta CB i tangent a la circumferència (O_{n-1}) tal com mostra la figura següent.



Solució:
Siga $r_1 = \overline{OE}$ radi de la primera circumferència.
Siga $x = \overline{ME}$

$\overline{AO_1} = \frac{1}{2}c + r_1, \overline{AE} = \frac{1}{2}c + x, \overline{MO_1} = \frac{1}{2}c - r_1$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEO_1}$:
$c \cdot r_1 = x^2 + c \cdot x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MEO_1}$:
$x^2 = \frac{1}{4}c^2 - c \cdot r_1$

De les dues expressions:
$x = 2r_1 - \frac{1}{4}c$

Aleshores:
$r_1{}^2 = \frac{3}{64}c^2$

$$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right)c$$

Siga $\alpha = \angle O_1AE$

$$tg\alpha = \frac{r_1}{\frac{1}{2}c + x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$$

$$tgA = tg(2\alpha) = \frac{2 \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{4}}{1 - \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{44\sqrt{3} - 60}{23}$$

Aleshores,

$$\overline{BC} = c \cdot tg(2\alpha) = \frac{44\sqrt{3} - 60}{23}c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AC} = \frac{48\sqrt{3} - 55}{23}c$$

$$\overline{AC_1} = \overline{AE} + r_1 = \frac{1}{2}c + x + r_1 = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{8}c$$

$\overline{AC_2} = \overline{AC_1} - 2r_1 = \left(\frac{2+3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)c = \frac{2+\sqrt{3}}{8}c$1-k

$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\frac{2 + \sqrt{3}}{8}}{\frac{2 + 3\sqrt{3}}{8}} = \frac{4\sqrt{3} + 5}{23}$$

La proporció entre les àrees dels dos primers cercles és:

$$k = \left(\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{3} + 5}{23}\right)^2 = \frac{43 + 40\sqrt{3}}{529}$$

Les àrees dels cercles formen una progressió geomètrica de primer terme l'àrea del primer cercle i raó

$$k = \frac{43 + 40\sqrt{3}}{529}$$

L'àrea del primer cercle és

$$C_{O_1} = \pi \frac{3}{64}c^2$$

La suma de les àrees del n primers cercles és:

$$S_n = \frac{C_{O_1}(1 - k^n)}{1 - k}$$

La suma dels infinits termes és:

$$S_\infty = \frac{\frac{3}{64}\pi}{1 - \frac{43 + 40\sqrt{3}}{529}}c^2 \approx 0.1869 \cdot c^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\frac{44\sqrt{3} - 60}{23}c^2 \cong 0.3524 \cdot c^2$$