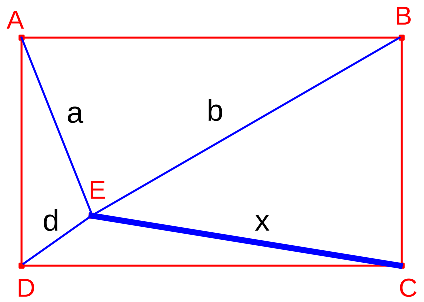
Problemes de Geometria per a l'ESO 235

2341.- Siga E un punt interior del rectangle ABCD tal que $\overline{AE} = a,\ \overline{BE} = b, \overline{AD} = d$, calculeu la mesura del segment $\overline{AC} = x$ en funció de a, b, d.

Crux Mathematicorum MA47

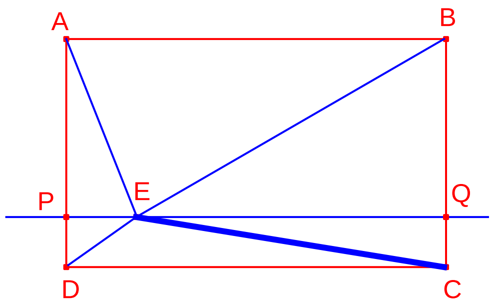


Solució:

Siga P la projecció de E sobre el costat $\overline{AD}$

Siga Q la projecció de E sobre el costat $\overline{BC}$

Siga $p = \overline{AP} = \overline{BQ}, q = \overline{DP} = \overline{CQ}$



Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{APE}, \overset{\Delta}{DPE}$

$\overline{PE}^2 = a^2 - p^2 = d^2 - q^2$

$p^2 = a^2 - d^2 + q^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{BQE}, \overset{\Delta}{CQE}$

$\overline{QE}^2 = b^2 - p^2 = x^2 - q^2$

$b^2 - (a^2 - d^2 + q^2) = x^2 - q^2$

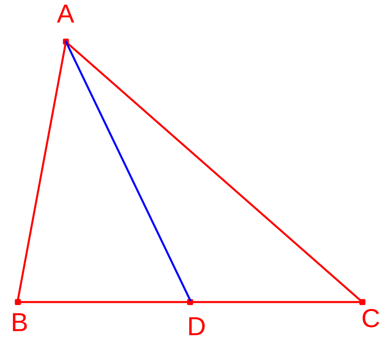
Simplificant:

$x^2 = -a^2 + b^2 + d^2$

$x = \sqrt{= -a^2 + b^2 + d^2}$

2342.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overline{AD} = m$ la mitjana.
Proveu que $4m^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$
Crux Mathematicorum MA 48

Solució.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$
$$m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2\frac{a}{2}c \cdot \cos B$$

$$2 \cdot m^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$2 \cdot m^2 = \frac{1}{2}a^2 + 2c^2 + b^2 - a^2 - c^2$$
$$2 \cdot m^2 = -\frac{1}{2}a^2 + c^2 + b^2$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$
$$m^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2\frac{a}{2}b \cdot \cos C$$
$$2 \cdot m^2 = -\frac{1}{2}a^2 + c^2 + b^2$$
Aleshores:
$4 \cdot m^2 = -a^2 + 2b^2 + 2c^2$

Per tant:
$4 \cdot m^2 = -(b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A) + 2b^2 + 2c^2$
$4 \cdot m^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$

2343:- Els perímetres del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i del quadrat $DEFG$ són iguals.

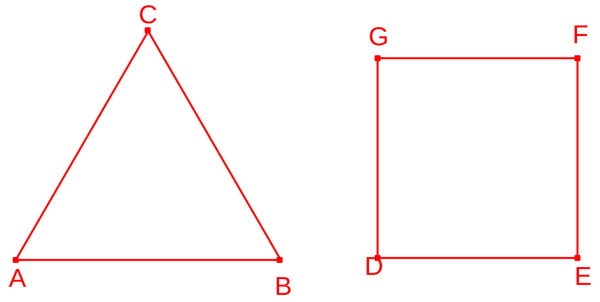
Determineu la raó entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i del quadrat $DEFG$
Crux Mathematicorum MA 49

Solució:
Siga $\overline{AB} = c$, costat del triangle equilàter.
El costat del quadrat és $\overline{DE} = \frac{3}{4}c$
L'àrea del triangle equilàter és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

L'àrea del quadrat DEFG és:

$$S_{DEFG} = \left(\frac{3}{4}c\right)^2 = \frac{9}{16}c^2$$



La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEFG}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c^2}{\frac{9}{16}c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0.7698$$

2344.- Una família de rectes està definida amb la condició que la suma dels recíprocs de les interseccions amb l'eix d'abscisses i amb l'eix d'ordenades és constant k. Demostreu que les rectes d'aquesta família concorren en un punt i determineu les seues coordenades d'aquest punt amb comú.
Crux Mathematicorum MA 50

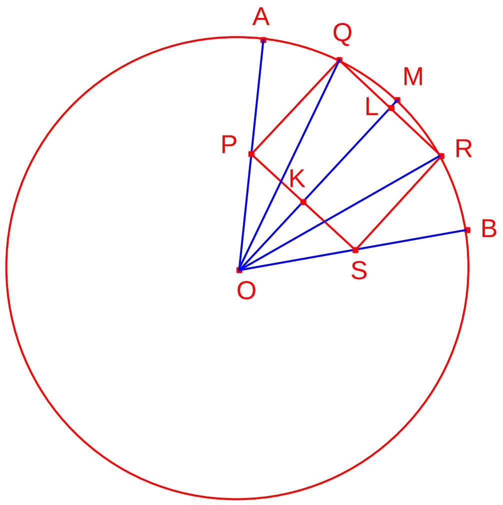
Solució:
Siga a la intersecció d'una recta qualsevol de la família amb l'eix d'abscisses.
Siga b la intersecció de la mateixa recta de la família amb l'eix d'ordenades.
La seua equació canònica és:
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Els valors a, b compleixen:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=k$$

$$\frac{\frac{1}{k}}{a}+\frac{\frac{1}{k}}{b}=1$$

La recta anterior passa pel punt $P\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$

2345.- Siga $\widehat{AB}$ un arc de circumferència de radi r i centre O i angle central θ, essent inferior a π. Siga M el punt mig de l'arc $\widehat{AB}$.
El punt P pertany al radi $\overline{OA}$, els punts Q, R sobre l'arc $\widehat{AB}$ i S sobre el radi $\overline{OB}$, són tals que PQRS és un rectangle.
Demostreu que l'àrea del rectangle PQRS és màxima quan els segments $\overline{OQ}, \overline{OM}$ i $\overline{OR}$ divideixen l'angle $\angle AOB$ en quatre parts iguals de valor comú $\frac{\theta}{4}$.
Determineu l'àrea màxima en termes de r i θ
Crux Mathematicorum 4500



Solució:
Siga $\alpha = \angle QOR$
Siga K el punt mig del costat $\overline{PS}$
Siga L el plunt mig del costat $\overline{QR}$

$$\overline{RL} = r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, \overline{OL} = r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{OK} = r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

$$\overline{KL} = \overline{OL} - \overline{OK} = r\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\overline{QR} = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

L'àrea del rectangle PQRS és:

$$S(\alpha) = 2r^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right)\right), \qquad \alpha \in [\![0, \pi]\!]$$

$$S(\alpha) = r^2\left(\sin\alpha - 2\cot\frac{\theta}{2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \qquad \alpha \in [\![0, \pi]\!]$$

Derivant la funció:

$$S'(\alpha) = r^2\left(\cos\alpha - ctg\frac{\theta}{2} \cdot \sin\alpha\right), \qquad \alpha \in [\![0, \pi]\!]$$

$$S'(\alpha) = 0$$

$$\cos\alpha - ctg\frac{\theta}{2} \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \tan\frac{\theta}{2}$$

Resolent l'equació $\alpha = \frac{\theta}{2}$

$$S''(\alpha) = r^2\left(-\sin\alpha - ctg\frac{\theta}{2} \cdot \cos\alpha\right), \qquad \alpha \in [\![0, \pi]\!]$$

$$S''\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$$

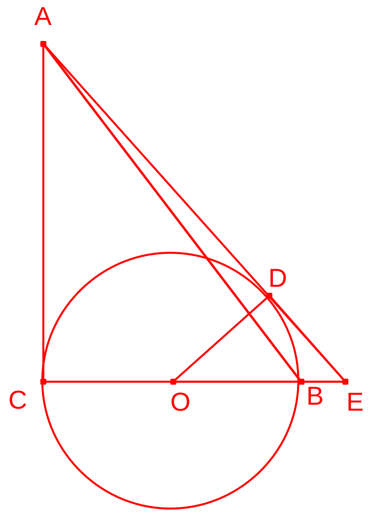
Aleshores, quan $\alpha = \frac{\theta}{2}$ l'àrea és màxima.
En aquest cas, els segments $\overline{OQ}, \overline{OM}$ i $\overline{OR}$ divideixen l'angle $\angle AOB$ en quatre parts iguals de valor comú $\frac{\theta}{4}$.

L'àrea màxima és:

$$S\left(\frac{\theta}{2}\right) = r^2\left(\sin\frac{\theta}{2} - 2\cot\frac{\theta}{2} \cdot \sin^2\frac{\theta}{4}\right) = r^2\left(\sin\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} \cdot \tan\frac{\theta}{4}\right)$$

2346.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{AC} > \overline{BC}$.
Siga la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$
Des del punt A s’han traçat les tangents a la circumferència que tallen la circumferència en el punt A i D.
La recta AD talla la recta BC en el punt E.
Siga O el punt mig del catet $\overline{BC}$.

Proveu que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DOE}, \overset{\Delta}{AEB}$ són iguals.
KöMaL 5063



Solució:
Notem que la recta AC és tangent a la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$ ja que $C = 90°$
Siga $\overline{OB} = \overline{OC} = r, \overline{BE} = x, \overline{AC} = b$
Aplicant la potència de E respecte de la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$:
$x(x + 2r) = \overline{DE}^2$

$\overline{OD} = r$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ACE}, \overset{\Delta}{ODE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{b} = \frac{\overline{DE}}{2r + x}$$

$$b = \frac{r(2r + x)}{\overline{DE}}$$

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}xb = \frac{1}{2}\frac{xr(2r + x)}{\overline{DE}}$$

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{DOE}$ és:

$$S_{DOE} = \frac{1}{2}r\overline{DE}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{DOE}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{xr(2r + x)}{\overline{DE}}}{\frac{1}{2}r\overline{DE}} = \frac{x(2r + x)}{\overline{DE}^2} = 1$$

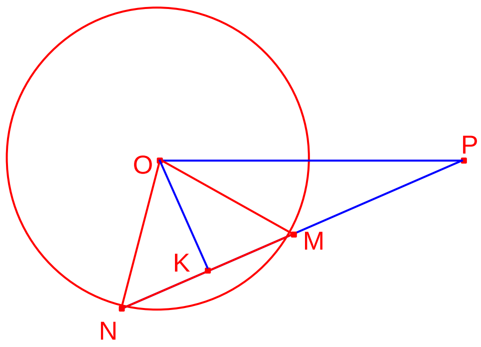
Aleshores, les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DOE}, \overset{\Delta}{AEB}$ són iguals.

Notem que el teorema s’acompleix amb la condició $\overset{\Delta}{ABC}, C = 90°, \overline{AC} > \frac{1}{2}\overline{BC}$.

2347.- Siga una circumferència de centre i de radi 1 i un punt P tal que $\overline{OP} = 2$.
Una recta que passa per P talla la circumferència en els punts M, N tal que M és el punt mig del segment $\overline{PN}$

Demostreu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OMN}$ és menor que $\frac{1}{2}$.

Solució:
Siga $x = \overline{MN} = \overline{MP}$
El radi de la circumferència és $r = 1$



Siga K el punt mig del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OMN}$.

Siga $h = \overline{OK}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{OMN}$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:

$$x \cdot 2x = \overline{OP}^2 - r^2$$
$$2x^2 = 2^2 - 1^2$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$
$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

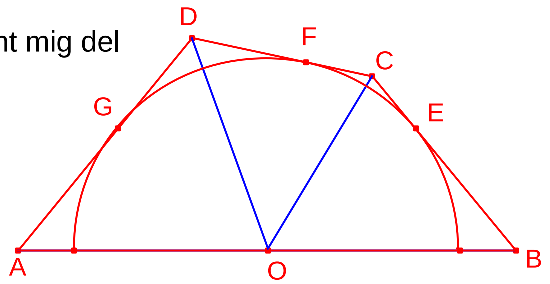
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$

$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$$
$$h = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OMN}$ és:

$$S_{OMN} = \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8} < \frac{1}{2}$$

2348.- Siga el quadrilàter $ABCD$.
Siga una semicircumferència de centre O, O és el punt mig del segment $\overline{AB}$, el diàmetre pertany al segment $\overline{AB}$ i és tangent als altres tres costats del quadrilàter. (veure figura)



a) Proveu que els triangles $\overset{\Delta}{AOD}, \overset{\Delta}{DOC}, \overset{\Delta}{COB}$ són semblants (no necessàriament en aquest ordre).
b) Proveu que $\overline{AB}^2 = 4 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD}$.

Solució:
a)
Per ser AG i BE tangents i O el centre:
$\angle DAO = \angle OBC = \alpha$

Per ser DG i DF tangents:
$\angle DGO = \angle CDO = \beta$

Per ser DE i CF tangents:
$\angle ECO = \angle FCOBC = \gamma$

La suma dels angles del quadrilàter $ABCD$ és $360°$
Aleshores,
$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$
Aleshores, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Aleshores $\angle AOD = \gamma,\ \angle DOC\alpha,\ \angle COB = \beta$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{AOD}, \overset{\Delta}{ODC}, \overset{\Delta}{BCO}$ són semblants (en aquest ordre).

b)
Aplicant el teorema de Tales als triangles $\overset{\Delta}{AOD}, \overset{\Delta}{BCO}$:

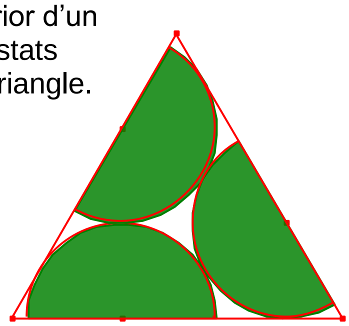
$$\frac{\overline{OA}}{\overline{Ad}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

Aleshores:
$\overline{AB}^2 = 4 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

2349.- En la figura hi ha tres semicercles de radi 1 a l'interior d'un triangle equilàter. Els diàmetres estan situats sobre els costats del triangle. Cada semicercle és tangent al altres dos i al triangle. Determineu la mesura dels costat del triangle.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

Sigen D i E els centres de dos semicercles.

Siga T el punt de tangència del semicercle de centre D i el costat $\overline{AC}$

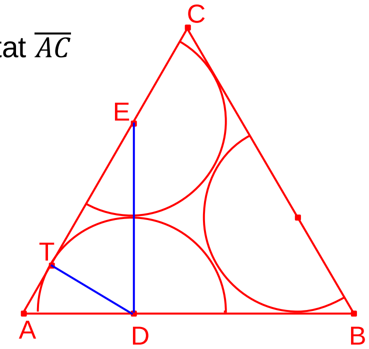
$\overline{DE} = 2, \overline{DT} = 1, \angle ETD = 90°$

Aleshores $\overline{TE} = \sqrt{3}$

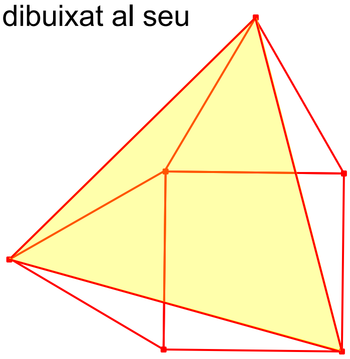
$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \overline{AD} = \overline{CE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Aleshores:

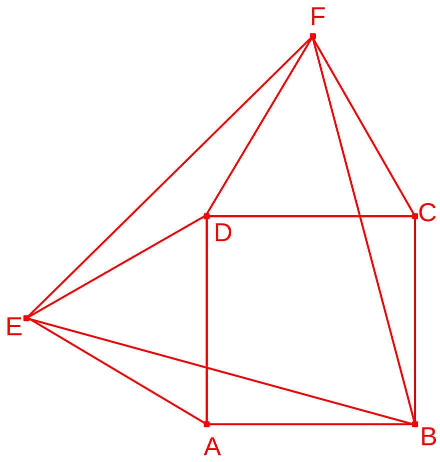
$\overline{AC} = \overline{AT} + \overline{TE} + \overline{CE} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$



2350.- Sobre dos costats consecutius d’un quadrat s’han dibuixat al seu exterior dos triangles equilàters.
Proveu que el triangle ombrejat és equilàter.



Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$ i $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{DCF}$ els triangle equilàters dibuixats a l’exterior del quadrat

$\angle CAB=\angle EDF=\angle BCF=90°+60°=150°$

$\overline{AC}=\overline{AB}=c, \overline{DE}=\overline{DF}=\overline{AB}=c, \overline{CB}=\overline{CF}=\overline{AB}=c$

Aleshores, els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{EAB}, \overset{\Delta}{EDF},\ \overset{\Delta}{BCF}$ són iguals (CAC)
Aleshores, $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{BF}$.
Aleshores, triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ és equilàter.