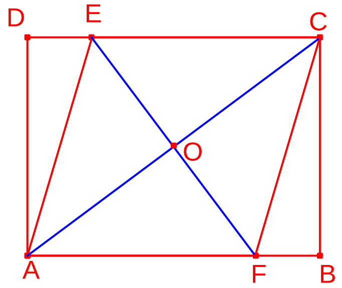
Problemes de Geometria per a l'ESO 236

2351.- Siga el rectangle ABCD.
Siga E del costat $\overline{CD}$ i F del costat $\overline{AB}$ tal que AECF és un rombe.
Si $\overline{BC} = 24, \overline{BF} = 7$, calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.

Solució:
Siguen $\overline{AE} = \overline{CE} = \overline{CF} = \overline{AF} = x$ costats del rombe AECF.
Les diagonals d'un rombe són perpendiculars.
Les diagonals es tallen en el punt mig.
Siga O el centre del rombe AECF, i centre del rectangle ABCD



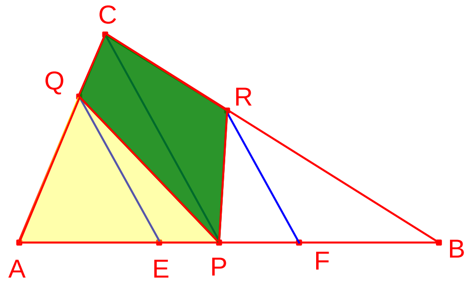
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FBC}$:
$x^2 = 7^2 + 24^2 = 625$
Aleshores, $x = 25$
$\overline{AB} = x + 7 = 32$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AC}^2 = 32^2 + 24^2 = 1600$
$\overline{AC} = 40$
$\overline{OA} = 20$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOF}$
$25^2 = 20^2 + \overline{OF}^2$
$\overline{OF} = 15$

Aleshores, $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{OF} = 30$

2352.- Els punts E i F del costat $\overline{AB}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ divideixen el costat en tres parts iguals. Siga P un punt qualsevol del segment central $\overline{EF}$ Les rectes paral·leles al segment $\overline{CF}$ que passen per E i F, tallen els costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ en els punts Q, R, respectivament.



Proveu que les àrees del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ i del quadrilàter CQPR són iguals.
KöMaL 1586

Solució:
Siga $\overline{EP} = x$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AEQ}, \overset{\Delta}{APC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CQ}}{x} = \frac{b - \overline{CQ}}{\frac{c}{3}} = \frac{b}{x + \frac{c}{3}}$$

Aleshores,

$$\overline{CQ} = \frac{3bx}{3x + c}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APQ}, \overset{\Delta}{APC}$ tenen la mateixa altura sobre la base AC, Aleshores:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{APC}} = \frac{\overline{AQ}}{b} = \frac{b - \overline{CQ}}{b} = \frac{b - \frac{3bx}{3x + c}}{b} = \frac{c}{3x + c}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{CPQ}, \overset{\Delta}{APC}$ tenen la mateixa altura sobre la base AC, Aleshores:

$$\frac{S_{CPQ}}{S_{APC}} = \frac{\overline{CQ}}{b} = \frac{\frac{3bx}{3x + c}}{b} = \frac{3x}{3x + c}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BFR}, \overset{\Delta}{BPC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CR}}{\frac{c}{3} - x} = \frac{a - \overline{CQ}}{\frac{c}{3}} = \frac{a}{\frac{2c}{3} - x}$$

Aleshores,

$$\overline{CR} = \frac{c - 3x}{2c - 3x} a$$

Els triangles $\overset{\Delta}{PCR}, \overset{\Delta}{BPC}$ tenen la mateixa altura sobre la base BC, Aleshores:

$$\frac{S_{PCR}}{S_{BPC}} = \frac{\overline{CR}}{a} = \frac{c - 3x}{2c - 3x}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APC}, \overset{\Delta}{BPC}$ tenen la mateixa altura sobre la base AB, Aleshores:

$$\frac{S_{BPC}}{S_{APC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{2c}{3} - x}{\frac{c}{3} + x} = \frac{2c - 3x}{c + 3x}$$

Multiplicant les dues darreres expressions:

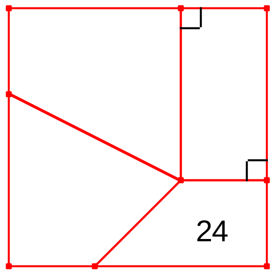
$$\frac{S_{PCR}}{S_{APC}} = \frac{c - 3x}{2c - 3x} \cdot \frac{2c - 3x}{c + 3x} = \frac{c - 3x}{c + 3x}$$

$$S_{APQ} = \frac{c}{3x+c} S_{APC}, S_{CPQ} = \frac{3x}{3x+c} S_{APC}, S_{PCR} = \frac{c-3x}{3x+c} S_{APC},$$

$$S_{CPQ} + S_{PCR} = \frac{c}{3x+c} S_{APC}$$

Aleshores:
$S_{APQ} = S_{CQPRC}$

2353.- Els costats d'un quadrat es divideixen en tres parts iguals. Un punt interior del quadrat està connectat amb un dels punts de divisió de cada costat, com es mostra a la figura, per formar quatre quadrilàters. Tenint en compte l'àrea d'un quadrilàter (vegeu la figura), determineu les àrees dels altres quadrilàters.



Solució:

Siga ABCD el quadrat exterior.

Siga $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x, \overline{AH} = \overline{DG} = \overline{CF} = \overline{BE} = 2x$

El costat del quadrat és $\overline{AB} = 3x$

L'àrea del trapezi EBFP és 24:

$$\frac{2x + x}{2} x = 24$$

Resolent l'equació:

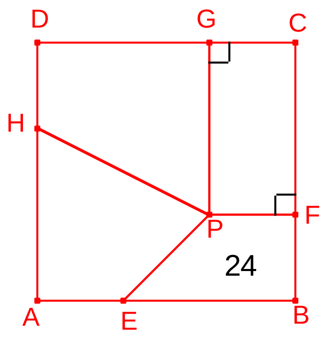
$x = 4$

L'àrea del rectangle PFCG és:

$S_{PFCG} = x \cdot 2x = 32$

L'àrea del trapezi PGDH és:

$$S_{PGDH} = \frac{2x + x}{2} 2x = 48$$

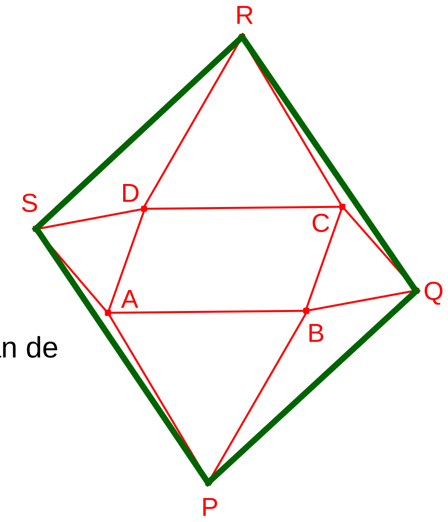


$\overline{AB} = 3x = 12$

L'àrea del quadrilàter AEPH és:

$S_{AEPH} = S_{ABCD} - (S_{EBFP} + S_{PFCG} + S_{PGDH}) = 12^2 - (24 + 32 + 48 = 40$

2354.- Donat un paral·lelogram ABCD sobre els exteriors del seus costats és dibuixen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{APB}, \overset{\Delta}{BQC}, \overset{\Delta}{CRD}, \overset{\Delta}{DCA}$.
Determineu les condicions en què el quadrilàter PQRS és un quadrat.
KöMaL, C1582



Solució:
Siga $\alpha = \angle DAB$.
$\overline{AS}, \overline{CQ}$ són iguals i paral·lels.
$\overline{DR}, \overline{BP}$ són iguals i paral·lels.
$\angle SDR = \angle PBQ = 60° + \alpha$
Aleshores, $\overline{SR}, \overline{PQ}$ són iguals i paral·lels.
Aleshores, PQRS és un paral·lelogram

$\angle SAP = \angle QCR = 240° - \alpha$

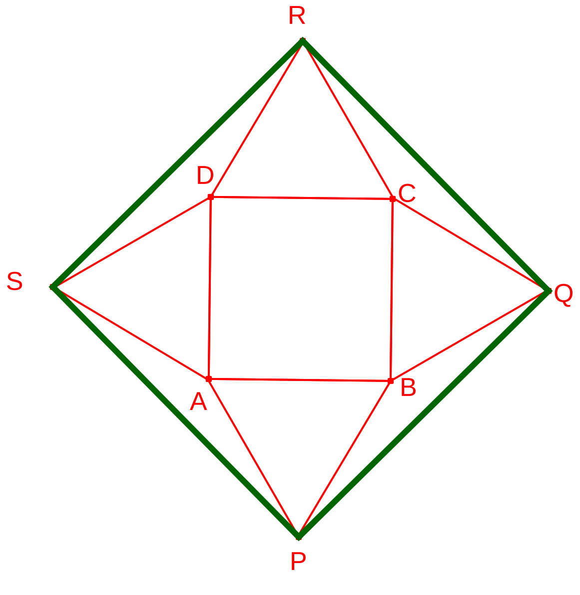
Per a ser un quadrat els costats del paral·lelogram PQRS han de ser iguals i formar angles de 90º.

$\overline{AP} = \overline{DR}, \overline{AS} = \overline{DS}$

$\overline{PS} = \overline{SR}$ si els triangles $\overset{\Delta}{PAS}, \overset{\Delta}{RDS}$ són iguals. És a dir,
$240° - \alpha = 60° + \alpha$
És a dir, quan $\alpha = 90°$

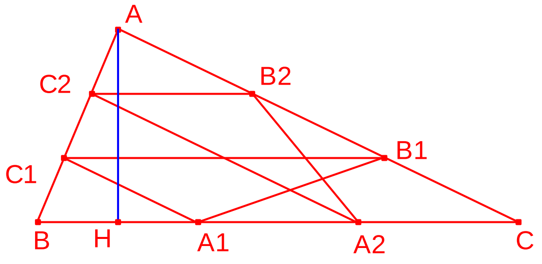
$\angle DSR = \angle ASP$
PQRS és quadrat si els angles són rectes si
$\angle DSR = \angle ASP = 15°$
Anàlogament,
$\angle DRS = \angle CRQ = 15°$
És a dir, quan $\overline{AB} = \overline{AD}$

ABCD és un quadrat.



2355.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Els punts A_1, A_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{BC}$, A_1 el més proper de B
Els punts B_1, B_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{AC}$, B_1 el més proper de C
Els punts C_1, C_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{AB}$, C_1 el més proper de B
Proveu que els triangles $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1, A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ tenen la mateixa àrea i és $\frac{2}{9}$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Solució:



Aplicant el teorema invers del teorema de Tales:
$\overline{B_2C_2}, \overline{B_1C_1}$ són paral·lels al costat $\overline{BC}$.
A més a més:
$$\overline{B_2C_2} = \frac{1}{3}\overline{BC}, \overline{B_1C_1} = \frac{2}{3}\overline{BC}$$

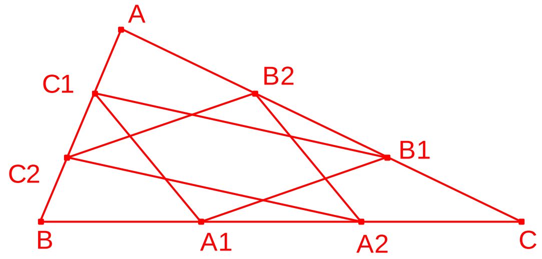
Siga $\overline{AH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
L'altura del triangle $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ sobre la base $\overline{B_1C_1}$ és $\frac{1}{3}\overline{AH}$

L'àrea del triangle $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ és:
$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{B_1C_1} \cdot \frac{1}{3}\overline{AH} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

L'altura del triangle $A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ sobre la base $\overline{B_2C_2}$ és $\frac{2}{3}\overline{AH}$
L'àrea del triangle $A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ és:
$$S_2 = \frac{1}{2}\overline{B_2C_2} \cdot \frac{2}{3}\overline{AH} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

2356.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Els punts A_1, A_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{BC}$, A_1 el més proper de B
Els punts B_1, B_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{AC}$, B_1 el més proper de C
Els punts C_1, C_2 divideixen en tres parts iguals el costat $\overline{AB}$, C_1 el més proper de A
Proveu que els triangles $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1, A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ són iguals i la seua àrea és $\frac{1}{3}$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Solució:



Aplicant el teorema invers del teorema de Tales:
$\overline{B_1A_2}$ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.
A més a més:

$$\overline{B_1A_2} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \overline{C_1C_2}$$

Aleshores, $A_2B_1C_1C_2$ és un paral·lelogram.
Per tant,

$$\overline{B_1C_1} = \overline{A_2C_2}$$

Anàlogament, $\overline{B_2C_2} = \overline{B_1A_1}, \overline{A_2B_2} = \overline{A_1C_1}$
Aleshores, els triangles $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1, B_2\overset{\Delta}{C_2}A_2$ són iguals.

$$S_{BA_1C_1} = \frac{2}{3}S_{BA_1A} = \frac{2}{3}\frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

Anàlogament,

$$S_{CB_1A_1} = \frac{2}{9}S_{ABC}, S_{AC_1B_1} = \frac{2}{9}S_{ABC}$$

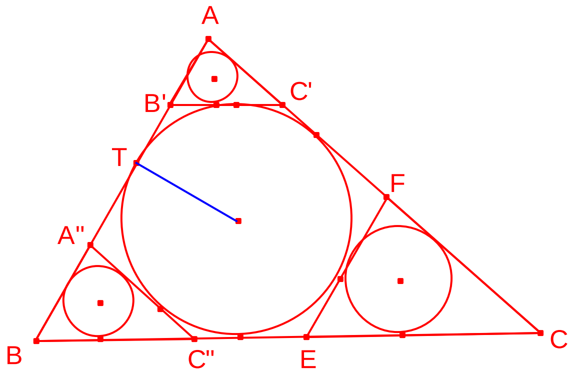
Aleshores:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - \left(S_{BA_1C_1} + S_{CB_1A_1} + S_{AC_1B_1}\right) = \frac{1}{3}S_{ABC}$$

2357.- Les tangents dibuixades a la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ paral·leles als costats tallen el triangle en tres triangles menuts.
Els radis de les circumferències inscrites als tres triangles formats són 2, 3, i 10.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.
KöMaL, B5073

Solució:



Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga T el punt de tangència de la la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el costat $\overline{AB}$

$$\overline{AT} = \frac{-a+b+c}{2}$$

Siga $\overline{B'C'}$ tangent a la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i paral·lela al costat $\overline{BC}$

Siga 2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$

Els triangles $\overset{\Delta}{AB'C'}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i de raó 2:r

La circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és exinscrita al triangle $\overset{\Delta}{AB'C'}$

$$\overline{AT} = \frac{\overline{AB'} + \overline{B'C'} + \overline{AC'}}{2} = \frac{\frac{2}{r}(a+b+c)}{2}$$

Aleshores:

$$\frac{-a+b+c}{2} = \frac{2}{r}\frac{a+b+c}{2}$$

$$(-a+b+c) = \frac{2}{r}(a+b+c)$$

Siga 3 el radi circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BA"C"}$
Aleshores:

$$(a-b+c) = \frac{3}{r}(a+b+c)$$

Siga 10 el radi circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{CEF'}$
Aleshores:

$$(a+b-c) = \frac{10}{r}(a+b+c)$$

Sumant les tres expressions:

$$a+b+c = \frac{1}{r}(2+3+10)(a+b+c)$$

Aleshores, $r = 15$

$(-a+b+c)=\frac{2}{15}(a+b+c)$
$-17a+13b+13c=0$

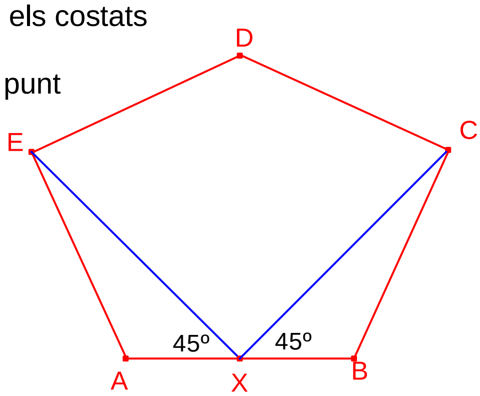
$(a+b-c)=\frac{10}{15}(a+b+c)$
$2a-3b+2c=0$

Considerem el sistema
$\begin{cases} 2a-3b+2c=0 \\ -17a+13b+13c=0 \end{cases}$
Resolent el sistema:
$\begin{cases} a=13\alpha \\ b=12\alpha \\ c=5\alpha \end{cases}$
El triangle és rectangle ja que $a^2=b^2+c^2$

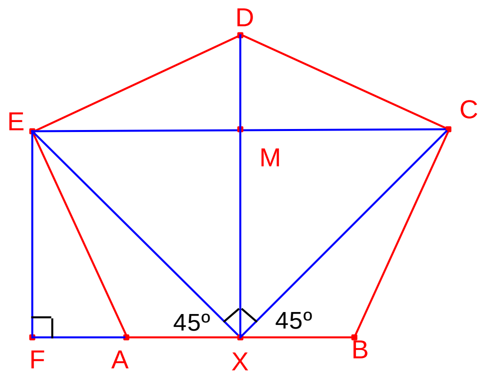
Si el triangle és rectangle:
$\overline{AT}=r=15=\frac{-a+b+c}{2}=\frac{4\alpha}{2}$
Resolent l'equació:
$\alpha=\frac{15}{2}$
Els costats del triangle són:
$\begin{cases} a=13\frac{15}{2}=\frac{195}{2} \\ b=12\frac{15}{2}=90 \\ c=5\frac{15}{2}=\frac{75}{2} \end{cases}$

2358.- Una sorrera té forma de pentàgon ABCDE amb tots els costats iguals i els angles no.
El pentàgon és simètric respecte de la recta DX on X és el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Si $\angle AXE = \angle BXC = 45°$ i els costats del pentàgon mesuren 2 m.
Calculeu:

a) La mesura de $\angle XEA$
b) La mesura de $\overline{EX}$
c) Si la fondària de la sorrera és de 30 cm calculeu el volum de la sorra.



Solució:
a)
Siga F la projecció de E sobre la recta AB.
Siga $x = \overline{EF} = \overline{XF}$
$\overline{AF} = x - 1, \overline{AE} = 2$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFA}$
$2^2 = x^2 + (x-1)^2$
$2x^2 - 2x - 3 = 0$
Resolent l'equació:
$$x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$
Siga $\alpha = \angle FEA$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFA}$:
$$\alpha = \arccos\frac{x}{2} = \arccos\frac{1+\sqrt{7}}{4} \approx 24°17'43"$$
$\angle FEX = 45°$
$\angle XEA = \angle FEX - \alpha = 45° - 24°17'43" = 24°42'17"$
b)
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFX}$:
$$\overline{EX} = \sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2} \approx 2.5779\ cm$$
c)
Siga M el unt mig del segment $\overline{EC}$.
$$\overline{EM} = \overline{FX} = x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$
$\overline{EC} = 2x = 1+\sqrt{7}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EMD}$:
$$\overline{DM}^2 = 2^2 - \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{4-\sqrt{7}}{2}$$
$$\overline{DM} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}}$$
L'àrea del pentàgon és igual a l'àrea del trapezi ABCE més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ECD}$:
$$S_{ABCDE} = \frac{2+1+\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)\sqrt{\frac{4-\sqrt{7}}{2}} \approx 6.6458\ cm^2$$
El volum de la sorrera és:
$V = S_{ABCDE}\cdot 0.3 = 1.9937\ m^3$

2359.- La figura està formada per un cub d'aresta a i dues piràmides quadrangulars regulars d'altura a. Determineu l'àrea i el volum de la figura.

Solució:
El volum és igual al volum del cub d'aresta a i de dues piràmides de base quadrada d'aresta a i altura a.

$$V = a^3 + 2\left(\frac{1}{3}a^2 \cdot a\right) = \frac{5}{3}a^3$$

L'apotema x d'una cara de les piràmides és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets $\frac{1}{2}a, a$

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

L'àrea de la figura és igual a la suma de 4 quadrats de costat a i 8 triangles de base a i altura l'apotema $x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

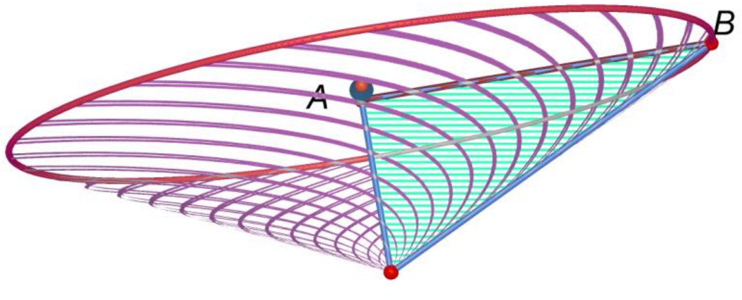
$$S = 4 \cdot a^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a\right) = \left(4 + 2\sqrt{5}\right)a^2$$

2360.-
La hipotenusa d'un triangle rectangle és 5.

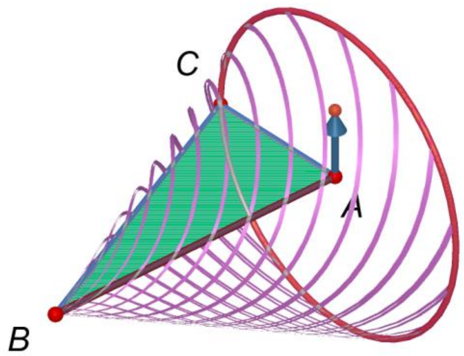
a) Determineu la mesura dels catets sabent que els volums engendrats pel triangle al girar al voltant dels catets són un el doble que l'altre.
b) Calculeu el volum dels dos cons.
c) Determineu el volum del doble con engendrat pel triangle al girar sobre la hipotenusa.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{BC} = 5$
Siga V_b el volum de con generat al girar el triangle sobre el catet $b = \overline{AC}$
El radi és $c = \overline{AB}$
El volum és:
$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$



Siga V_c el volum de con generat al girar el triangle sobre el catet $c = \overline{AB}$
El radi és $b = \overline{AC}$
El volum és:
$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$



Suposem que el volum V_b és el doble que el volum V_c
$\frac{1}{3}\pi c^2 b = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi b^2 c$
Simplificant:
$c = 2b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$b^2 + (2b)^2 = 5^2$
Resolent l'equació:
$b = \sqrt{5}, c = 2\sqrt{5}$

b)

Els volums dels cons són:

$$V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b = \frac{\pi}{3} 20\sqrt{5} = 46.83$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c = \frac{\pi}{3} 10\sqrt{5} = 23.42$$

c)

El radi dels dos cons, que estan engendrats per la rotació del triangle rectangle sobre la hipotenusa, és igual a l'altura del triangle sobre la hipotenusa.

Siga $h = \overline{AH}$ l'altura sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{5h}{2} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}$$

Resolent l'equació:

$h = 2$

El volum del doble con és:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 5 = \frac{20\pi}{3} \approx 20.94$$