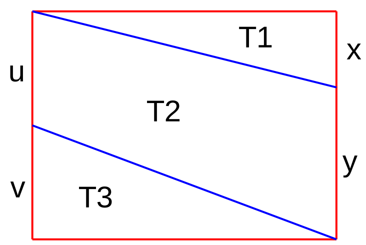
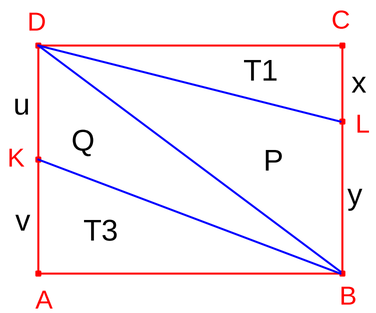
2361.-
Un rectangle s'ha dividit en tres parts d'àrees T_1, T_2, T_3 tals que
$T_1 : T_2 : T_3 = 2:7:3$
Determineu $x:y, u:v$
KöMaL K651



Solució:

Siguen P i Q les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BLD}, \overset{\Delta}{DKB}$
Per ser ABCD un rectangles:
$u + v = x + y$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:



$T_1 : T_3 = 2:3$

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{x}{v} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{P}{T_1} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{Q}{T_1} = \frac{u}{x}$$

Sumant ambdues expressions:

$$\frac{P}{T_1} + \frac{Q}{T_1} = \frac{y}{x} + \frac{u}{x}$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{y+u}{x} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{y+x+y-v}{x} = \frac{x+2y-\frac{3}{2}x}{x} = \frac{-\frac{1}{2}x+2y}{x} = -\frac{1}{2} + 2\frac{y}{x}$$

$$2 = \frac{y}{x}$$

Aleshores, $x:y = 1:2$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{y+u}{x} = \frac{7}{2}$$

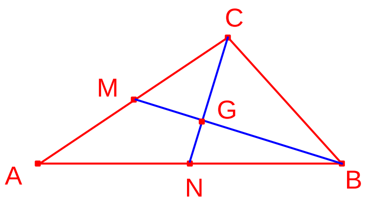
$$\frac{7}{2} = \frac{y+u}{x} = \frac{u+v-x+u}{x} = \frac{2u+v-\frac{2}{3}v}{\frac{2}{3}v} = \frac{1}{2} + 3\frac{u}{v}$$

$$1 = \frac{u}{v}$$

Aleshores, $u:v = 1:1$

2362.- Dos costats d'un triangle tenen costats 3 cm i 4 cm.
Quin és l'angle que fo9rmen els costats si les mitjanes dibuixades als vèrtexs oposats són perpendiculars.
KöMaL C1593

Solució:
Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle tal que $c = \overline{AB} = 4, b = \overline{AC} = 3$.
Siga G el baricentre del triangle.
Siguen $\overline{BM}, \overline{CN}$ les mitjanes del triangle
La mitjana al vèrtex B mesura:



$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 4^2 - 3^2}}{2}$$

La mitjana al vèrtex C mesura:

$$\overline{CN} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 3^2 - 4^2}}{2}$$

Aplicant la propietat del baricentre.

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 4^2 - 3^2}}{3}$$

$$\overline{GN} = \frac{1}{3}\overline{CN} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2 \cdot 3^2 - 4^2}}{6}$$

Les mitjanes $\overline{BM}, \overline{CN}$ són perpendiculars

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NGB}$:

$$2^2 = \left(\frac{\sqrt{2a^2 + 23}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2a^2 + 2}}{6}\right)^2$$

$$4 = \frac{1}{9}(2a^2 + 23) + \frac{1}{18}(a^2 + 1)$$

Simplificant:

$$a^2 = 5$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

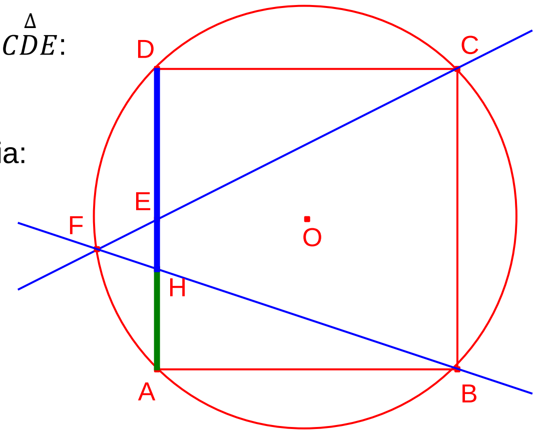
$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{5}{6}$$

$$A = \arccos\frac{5}{6} = 33°33'26"$$

2363.- Un quadrat $ABCD$ té els vèrtexs sobre una circumferència de centre O.
Soga E el punt mig del costat $\overline{AD}$.
La recta CE talla, novament, la circumferència en el punt F.
Les rectes FB i AD és tallen en H.
Demostreu que $2 \cdot \overline{HD} = \overline{AH}$.

Solució:
Siga $\overline{AB} = 1$, costat del quadrat $ABCD$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Aplicant la potència de E respecte de la circumferència:

$$\overline{FE} \cdot \overline{CE} = \overline{AD} \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{FE} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{FE} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$\overline{CF} = \overline{CF} + \overline{FE} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{FHE}, \overset{\Delta}{FBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{CF}}$$

$$\frac{\overline{EH}}{1} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{10}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

Aleshores:

$$\overline{EH} = \frac{1}{6}$$

$$\overline{HD} = \overline{DE} + \overline{EH} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{AH} = \overline{AE} - \overline{EH} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Aleshores, $2 \cdot \overline{HD} = \overline{AH}$

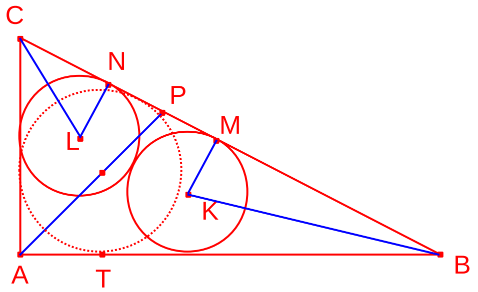
2364.- En un triangle rectangle hi ha inscrites dos circumferències tangents d'igual radi i tangents cadascuna d'elles a un catet i la hipotenusa.
Siguen M, N els punts de tangència amb la hipotenusa.
Siga P el punt mig del segment $\overline{MN}$
Proveu que el punt P pertany a la bisectriu de l'angle recte del triangle.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°$
Siga r el radi de les dues circumferències tangents.

Siga s el radi de la circumferència inscrit al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el catet $\overline{AB}$:

$$tg\frac{B}{2} = \frac{s}{\overline{BT}} = \frac{\frac{b+c-a}{2}}{\frac{a+c-b}{2}} = \frac{b+c-a}{a+c-b}$$



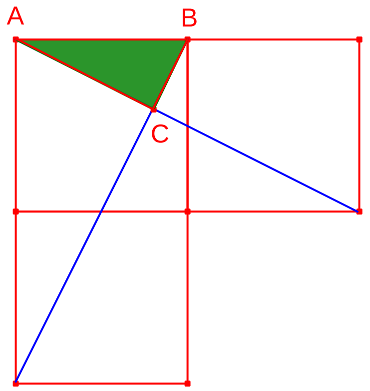
$$\angle KBM = \frac{B}{2}$$
$$tg\frac{B}{2} = \frac{r}{\overline{BM}}$$
$$\overline{BM} = \frac{a+c-b}{b+c-a}r$$

$$\angle LCN = \frac{C}{2} = 45° - \frac{B}{2}.\ tg\left(45° - \frac{B}{2}\right) = \frac{1+tg\frac{B}{2}}{1+tg\frac{B}{2}} = \frac{a-b}{c}$$
$$tg\left(45° - \frac{B}{2}\right) = \frac{r}{\overline{CN}}$$
$$\overline{CN} = \frac{c}{a-b}r$$

$$\overline{NP} = \overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{KL} = r$$
Vegem que $\overline{CP}$ compleix la propietat de la bisectriu.
$$\frac{\overline{CP}}{b} = \frac{r\left(\frac{c}{a-b}+1\right)}{b} = \frac{a-b+c}{b(a-b)}r$$
$$\frac{\overline{BP}}{c} = \frac{r\left(\frac{a+c-b}{b+c-a}+1\right)}{b} = \frac{2c}{c(b+c-a)}$$
Dividint ambdues expressions:
$$\frac{\frac{a-b+c}{b(a-b)}}{\frac{2c}{c(b+c-a)}} = \frac{(c+a-b)(c-(a-b))}{2b(a-b)} = \frac{c^2-(a^2+b^2-2zb)}{2b(a-b)} = \frac{-2(b^2-ab)}{2b(a-b)} = 1$$

Aleshores, $\overline{AP}$ és la bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

2365.- La figura consta de tres quadrats de costat 1.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

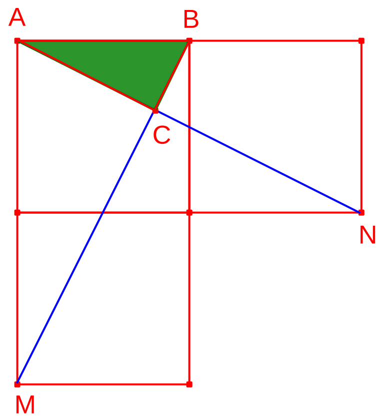


Solució:
Els segments $\overline{BM}, \overline{AN}$ són perpendicular.
Aleshores, $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $C = 90°$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{MAB}$ són semblants.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MAB}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

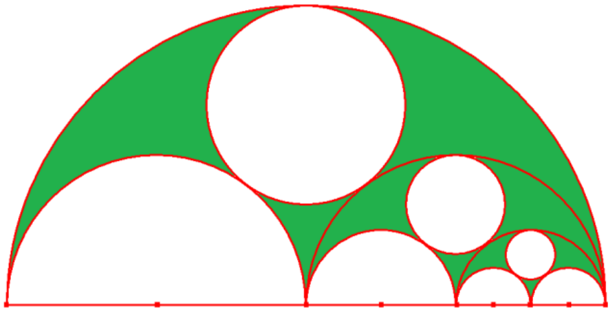
$$S_{ABC} = \frac{1}{5} \cdot S_{MAB} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(1 \cdot 2) = \frac{1}{5}$$



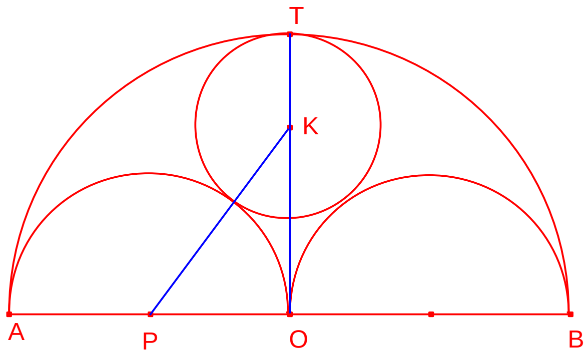
2366.- En la figura, la semicircumferència exterior té radi R.

a) Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.

b) Si reproduírem indefinidament la figura, calculeu l'àrea infinita.



Solució:



Considerem la semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB} = 2R$

Considerem la semicircumferència de centre P i diàmetre $\overline{AP} = R$

Considerem la circumferència de centre K i radi $\overline{KT} = r$

$$\overline{PK} = \frac{R}{2} + r, \overline{OK} = R - r, \overline{OP} = \frac{R}{2}$$

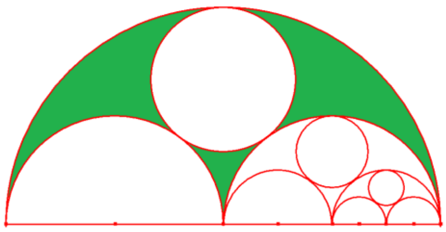
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POK}$:

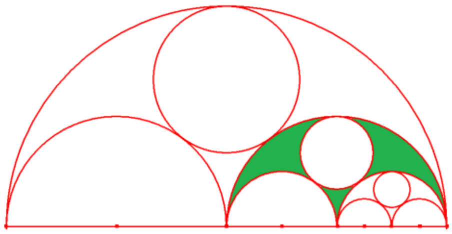
$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

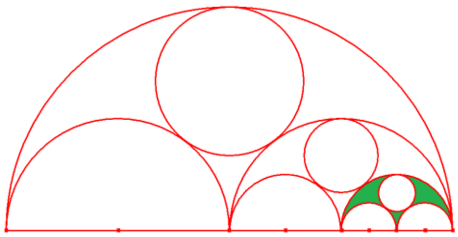
Resolent l'equació:

$$r = \frac{R}{3}$$

Considerem la successió de les següents àrees ombrejades.







La successió de zones ombrejades són semblants i de raó 2:1
La proporció entre les àrees és 4:1

La primera àrea de la successió anterior és igual a l'àrea d'un semicercle de radi R menys l'àrea d'un cercle de radi $\frac{1}{2}R$ i l'àrea d'un cercle de radi $\frac{1}{3}R$

$$a_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 - \left(\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\right) = \frac{5\pi}{36}R^2$$

El segon terme és:

$$a_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{5\pi}{36}R^2$$

El tercer terme és:

$$a_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{5\pi}{36}R^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{5\pi}{36}R^2$$

La successió és una progressió geomètrica de primer terme $a_1 = \frac{5\pi}{36}R^2$ i raó $k = \frac{1}{4}$

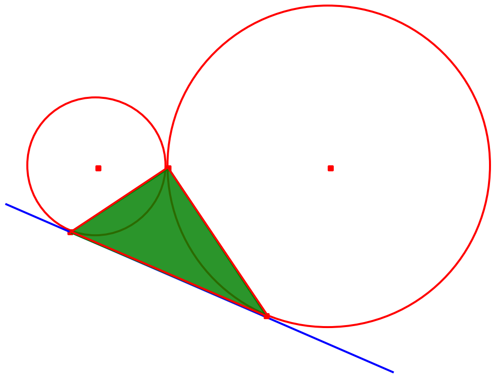
a)
La suma dels tres primers termes és:

$$S_3 = \frac{5\pi}{36}R^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = \frac{35\pi}{192}R^2$$

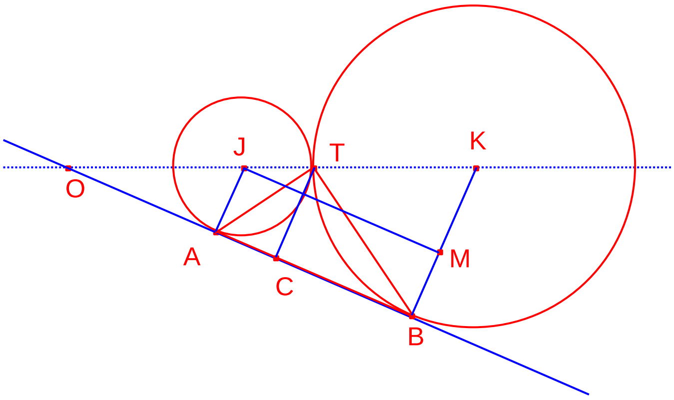
b)
La successió d'àrees té suma infinita:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-k} = \frac{\frac{5\pi}{36}R^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5\pi}{27}R^2$$

2367.- Calculeu l'àrea del triangle determinat per dues circumferències tangents exteriors i la recta tangent a les dues circumferències, suposant que el radi de la menuda és r i el radi de la gran és R.



Solució:
Siguen J, K els centres de les dues circumferències.
Siguen A, B els punts de tangència de les circumferències amb la recta.
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga O el centre d'homotècia de les dues circumferències.



Siga M la projecció de J sobre el segment $\overline{BK}$
Siga C la projecció de T sobre la recta.

$\overline{JK} = R + r, \overline{KM} = R - r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JMK}$:
$\overline{AB} = \overline{JM} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$

Siga $\overline{OJ} = a$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OAJ}, \overset{\Delta}{OCT}, \overset{\Delta}{OBK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{TC}}{a+r} = \frac{r}{a} = \frac{R}{a+r+R}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{R}{a+r+R} = \frac{R-r}{R+r}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{\overline{TC}}{a+r} = \frac{\overline{TC}-r}{r}$$

Aleshores:

$$\frac{\overline{TC}}{r} = \frac{R-r}{R+r}$$

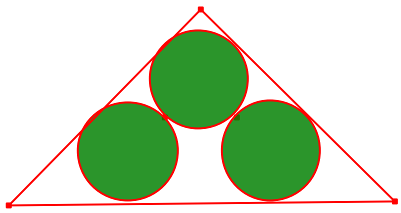
Per tant:

$$\overline{TC} = \frac{2Rr}{R+r}$$

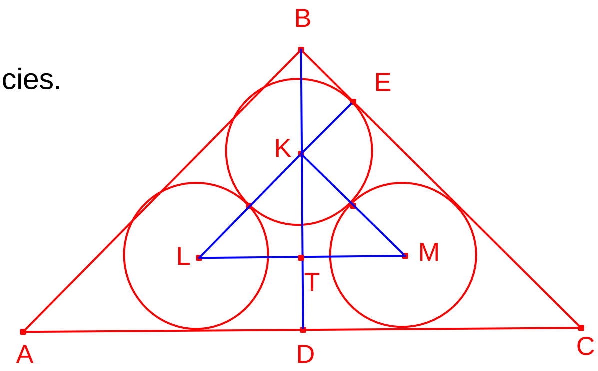
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABT}$ és:

$$S_{ABT} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{TC} = \frac{1}{2} 2\sqrt{Rr}\frac{2Rr}{R+r} = \frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$$

2368.- Tres circumferències d'igual radi estan inscrites en un triangle rectangle i isòsceles de catets 1.
Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:



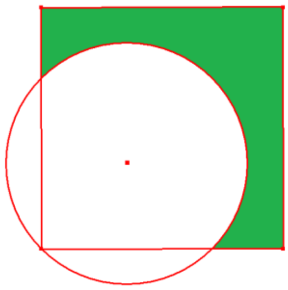
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, \overline{AB} = 1$
Siguen K, L, M en centres de les tres circumferències.
Siga r el radi de les tres circumferències.
El triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és rectangle i isòsceles. $K = 90°$

Siga D el punt mig del segment $\overline{AC}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADB}$
$\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Siga T el punt mig del segment $\overline{LM}$
Siga E el punt de tangència de la circumferència de centre K i el costat $\overline{BC}$
$\overline{DT} = \overline{KE} = r$

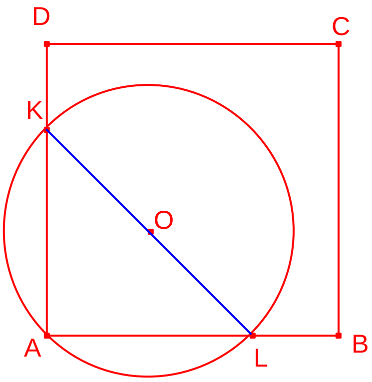
Aplicant el teorema de Pitàgores el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{LTK}$
$\overline{TK} = r\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KEB}$
$\overline{BK} = r\sqrt{2}$
$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{DT} + \overline{TK} + \overline{BK} = (1 + 2\sqrt{2})r$
Resolent l'equació:
$$r = \frac{\sqrt{2}}{2(1 + 2\sqrt{2})} = \frac{4 - \sqrt{2}}{14}$$

2369.- El la figura, el quadrat té costat 2 i la circumferència de radi 1.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



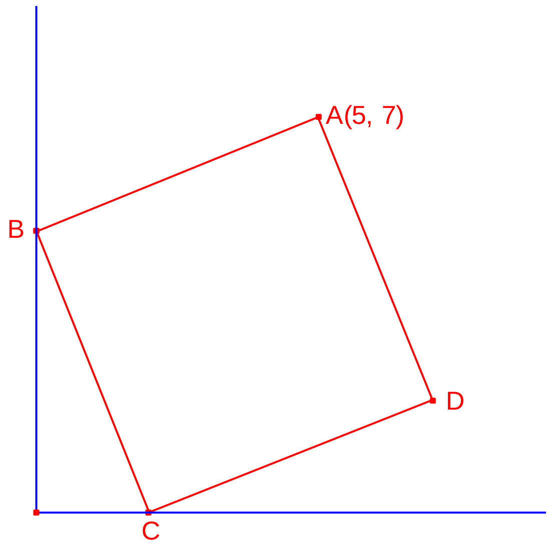
Solució:



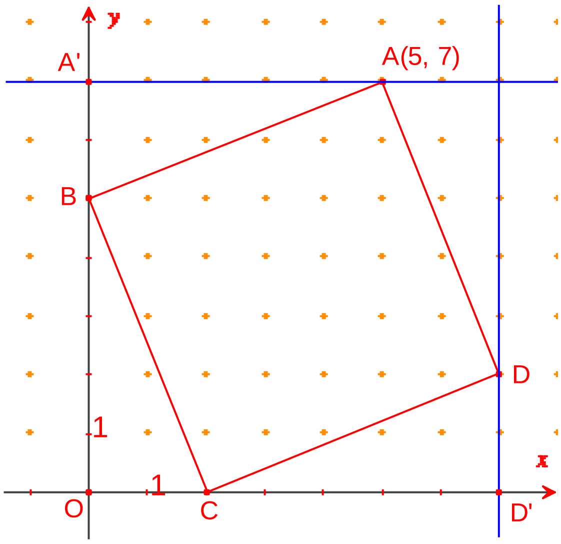
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 2$
Siguen K, L els punts de tall de la circumferència i els costats del quadrat.
$\angle KAL = 90°$
Aleshores, $\overline{KL}$ és un diàmetre.
L'àrea obrejada és igual a l'àrea del quadrat menys l'àrea d'un semicercle de radi 1 i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KAL}$:

$$S_{ombrejada} = 2^2 - \left(\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = \frac{7-\pi}{2} \approx 1.9292$$

2370- En la figura, $ABCD$ és un quadrat que té dos vèrtexs en els eixos coordenats.
Determineu els altres vèrtexs.



Solució:
Siga A' la projecció de A sobre l'eix d'ordenades.



Les coordenades de A' són:
$A'(0,7)$

$\overline{AA'} = 5$

Els triangles rectangles $O\overset{\Delta}{B}C, A'\overset{\Delta}{A}B, D'\overset{\Delta}{C}D$ són iguals.
Aleshores, $\overline{OB} = \overline{CD} = 5$
$\overline{BA'} = 2$
Aleshores: $\overline{OC} = \overline{DD'} = 2$

Les coordenades de B són:
$B(0,5)$

Les coordenades de C són:

$C(2,0)$

Les coordenades de D' són:
$D'(7,0)$

Les coordenades de D són
$D(7,2)$