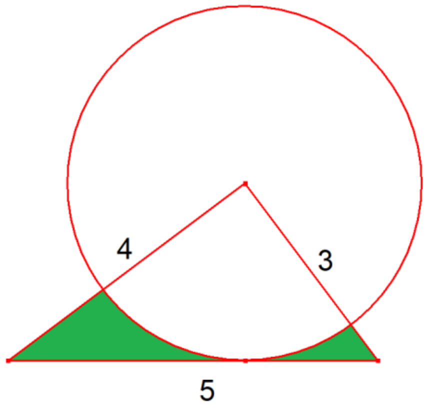
2371.- Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
El triangle és rectangle.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle menys l'àrea d'un quadrant de cercle de radi $\overline{AD}$, altura del triangle sobre la hipotenusa.

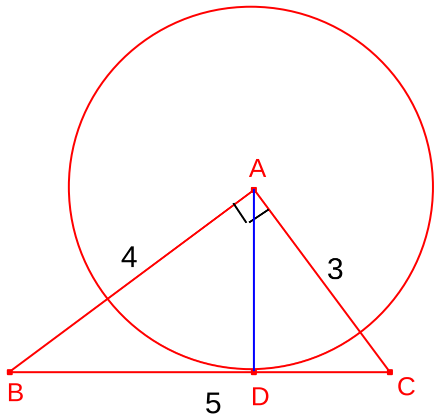
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DAC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

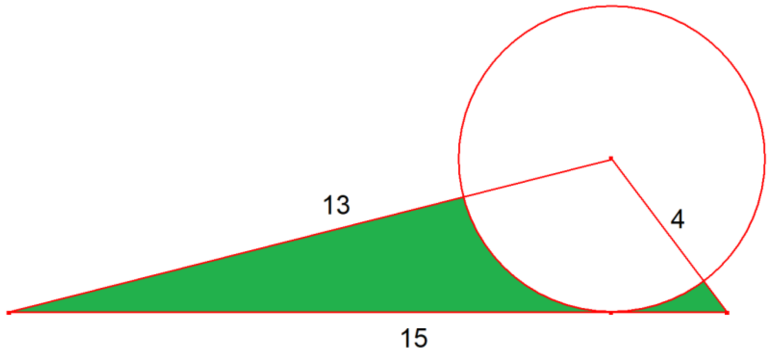
$$\frac{\overline{AD}}{4} = \frac{3}{5}$$

$\overline{AD} = \frac{12}{5}$, radi del cercle.
L'àrea ombrejada és:

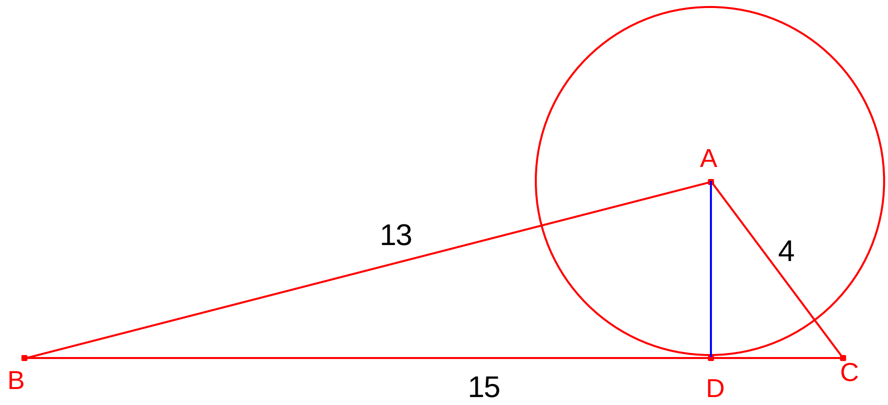
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}4 \cdot 3 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{12}{5}\right)^2 = 6 - \frac{36\pi}{25} \approx 1.4761$$



2372.- Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



Solució:



L’àrea ombrejada és igual a l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys l’àrea d’un sector de cercle d’angle $\angle BAC$ i de radi $\overline{AD}$, altura del triangle.

Apliquem la fórmula d’Heró per calcular l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(15+13+4)(-15+13+4)(15-13+4)(15+13-4)}}{4} = 24$$

Per calcular l’altura $\overline{AD}$ sobre el costat $\overline{BC}$ apliquem l’àrea:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \overline{AD} = 24$$

$$\overline{AD} = \frac{16}{5}$$

Apliquem el teorema del cosinus per calcular l’angle $\angle BAC$:

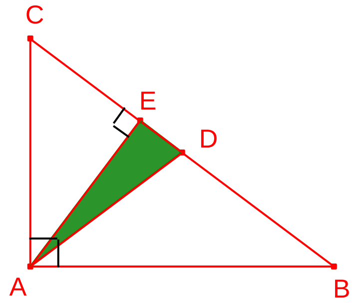
$$15^2 = 13^2 + 4^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{-5}{13}, A = \arccos \frac{-5}{13} \approx 112°37'12"$$

L’àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 24 - \pi \left(\frac{16}{5}\right)^2 \frac{112°37'12"}{360°} \approx 13.9362$$

2373.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c, b \leq c$.
Siga D el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$
Siga E el peu de l'altura del triangle sobre la hipotenusa.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle$\overset{\Delta}{ABC}$

$$\overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\overline{CD} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EAC}, \overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CE}}{b} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

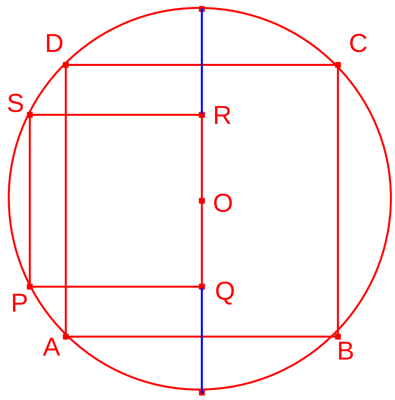
$$\overline{CE} = \frac{b^2\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2}$$

$$\overline{ED} = \overline{CD} - \overline{CE} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2} - \frac{b^2\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}(c^2 - b^2)}{2(b^2 + c^2)}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura $\overline{AE}$ les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{\sqrt{b^2 + c^2}(c^2 - b^2)}{2(b^2 + c^2)}}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{c^2 - b^2}{2(b^2 + c^2)}$$

2374.- En una circumferència de radi r s'ha inscrit un quadrat $ABCD$.
El quadrat $PQRS$ té els vèrtexs P, Q sobre la circumferència i els vèrtexs Q, R en un diàmetre
Calculeu la proporció entre les àrees dels dos quadrats.



Solució:

Aplicant el teorema de Piitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = r\sqrt{2}$

L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 2r^2$

Siga $\overline{PQ} = c$, costat del quadrat $PQRS$.
$\overline{OQ} = \frac{1}{2}c, \overline{OP} = r$

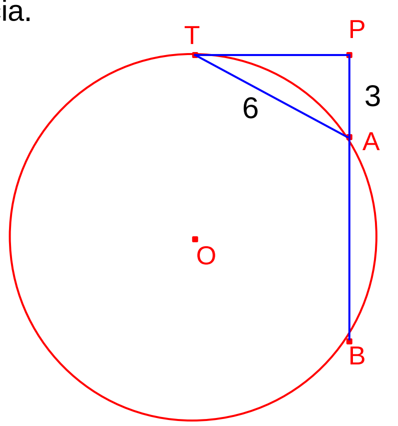
Aplicant el teorema de Piitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$:
$$r^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$$
$$c^2 = \frac{4}{5}r^2$$

L'àrea del quadrat $PQRS$ és:
$$S_{PQRS} = c^2 = \frac{4}{5}r^2$$

La proporció entre les àrees dels quadrats $ABCD, PQRS$ és:
$$\frac{S_{ABCD}}{S_{PQRS}} = \frac{2r^2}{\frac{4}{5}r^2} = \frac{5}{2}$$

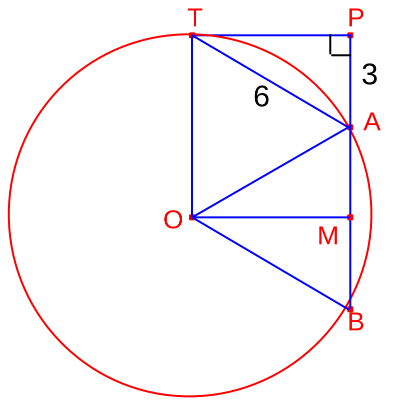
2375.- En la figura el segment $\overline{PT}$ és tangent a la circumferència.
$\overline{TA} = 6, \overline{PA} = 3$
La recta AB és perpendicular a la tangent PT en el punt P
Calculeu:

a) La mesura del segment $\overline{AB}$
b) El radi de la circumferència.
c) La distància de O al segment $\overline{AB}$



Solució 1:
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
$\overline{OM}$ és perpendicular al segment $\overline{AB}$.

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{TPA}$, $\overline{TP} = 6, \overset{\frown}{PA} = 3$, aleshores:
$\angle ATP = 30°, \angle TAP = 60°$
L'angle $\angle ATP = 30°$ és semiinscrit a la circumferència.
Aleshores,
$\angle AOT = 2 \cdot 30° = 60°$



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{TPA}$ és equilàter.
$\overline{OA} = \overline{TA} = 6$, radi de la circumferència.

$\angle OAB = 180° - (\angle TAP + \angle OAB) = 180° - (60° + 60°) = 60°$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és equilàter.
$\overline{AB} = \overline{OA} = 6$.

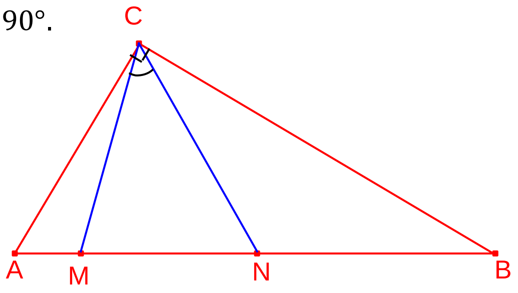
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$, la distància de O al segment $\overline{AB}$ és:
$\overline{OM} = 3\sqrt{3}$

Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TPA}$:
$\overline{TP} = 3\sqrt{3}$
Siga $x = \overline{AB}$.
Aplicant la potència de P respecte de la circumferència:
$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$
$3(3 + x) = \left(3\sqrt{3}\right)^2$
Resolent l'equació:
$x = \overline{AB} = 6$
Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
$\overline{OM}$ és perpendicular a $\overline{OT}$ per tant, perpendicular a $\overline{AB}$.
La distància de O al segment $\overline{AB}$ és:
$\overline{OM} = \overline{PT} = 3\sqrt{3}$

El radi de la circumferència és:
$$\overline{OT} = \overline{PA} + \overline{AM} = 3 + \frac{1}{2}6 = 6$$

2376.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $C = 90°$.
$\overline{BM} = \overline{BC}, \overline{AN} = \overline{AC}$
Calculeu la mesura de l'angle $\angle MCN$



Solució:
Siga $\angle ABC = \alpha$.
Aleshores, $\angle CAB = 90° - \alpha$

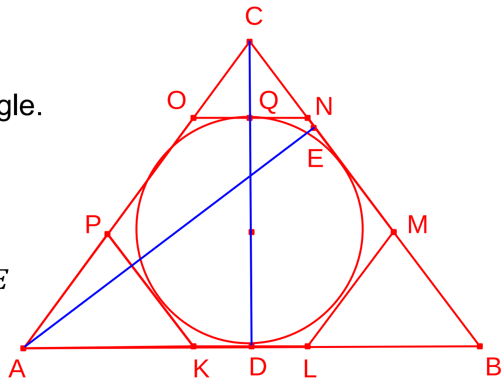
El triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle CMB = 90° - \frac{\alpha}{2}$

El triangle $\overset{\Delta}{ACN}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle CNA = 45° + \frac{\alpha}{2}$

$\angle MCN = 180° - (\angle CMB + \angle CNA) = 45°$

2377.- Els costats d'un triangle mesuren 5 cm, 5 cm i 6 cm.
Dibuixem tres tangents a la circumferència inscrita del triangle, paral·leles als costat.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon format quan les tres tangents tallen els costats.
KöMaL C1596

Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AC} = \overline{BC} = 5, \overline{AB} = 6$.
Siga $KLMNOP$ l'hexàgon format per les tangents i el triangle.
Els triangles $\overset{\Delta}{AKP}, \overset{\Delta}{BLM}$ són iguals.

Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$
$\overline{CD} = 4$

Siga r el radi de la circumferència inscrita.
Aplicant l'àrea calculem el radi de la circumferència inscrita del triangle:
$S_{ABC} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = \frac{5+5+6}{2} r = 12$
Resolent l'equació:
$r = 3$

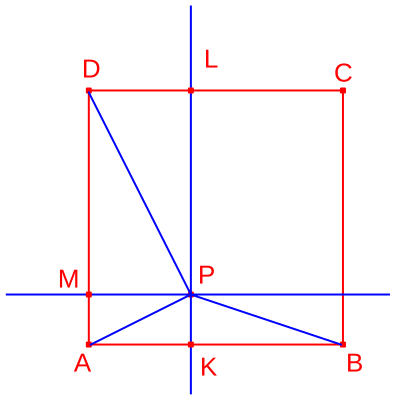
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ONC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$S_{ONC} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{CD} - 2r} \right)^2 \cdot S_{ABC} = \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot S_{ABC}$$

Siga $\overline{AE}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$\frac{5 \cdot \overline{AE}}{2} = 12.$
Resolent l'equació:
$\overline{AE} = \frac{24}{5}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AKP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$S_{AKP} = \left(\frac{\overline{AE}}{\overline{AE} - 2r} \right)^2 \cdot S_{ABC} = \left(\frac{3}{8} \right)^2 \cdot S_{ABC}$$

L'àrea de l'hexàgon és:
$$S_{KLMNOP} = S_{ABC} - (S_{ONC} + 2 \cdot S_{AKP}) = \left(1 - \left(\frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{9}{64} \right) \right) S_{ABC} = \frac{21}{32} \cdot 12 = \frac{63}{8} =$$
$$= 7.875 cm^2$$

2378.- Siga P un punt interior del quadrat $ABCD$ tal que $\overline{AP} = 1, \overline{BP} = \sqrt{2}, \overline{DP} = 2$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle APB$
KöMaL B5087

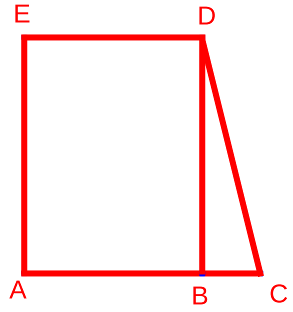


Solució:
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.
Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{CD}$.
Siga M la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$
Siguen $\overline{AK} = \overline{DL} = x, \overline{AM} = \overline{PK} = y$
Aleshores, $\overline{DM} = c - y, \overline{KB} = c - x$

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles
$\overset{\Delta}{AKP}, \overset{\Delta}{DMP}, \overset{\Delta}{PKB}$:
$x^2 + y^2 = 1$
$x^2 + (c - y)^2 = 4$
$y^2 + (c - x)^2 = 2$
Efectuant $E_2 + E_3$
$x^2 + (c - y)^2 + y^2 + (c - x)^2 = 6$
Simplificant:
$2(x^2 + y^2) + 2c^2 - 2c(x + y) = 6$
Substituint l'expressió E_1 i simplificant:
$c^2 - c(x + y) = 2$
$$x + y = \frac{c^2 - 2}{c} \qquad (1)$$
Efectuant $E_2 - E_3$
$x^2 + (c - y)^2 - (y^2 + (c - x)^2) = 2$
Simplificant:
$c(x - y) = 1$
$$x - y = \frac{1}{c} \qquad (2)$$
Sumant les expressions (1) (2) i simplificant:
$$x = \frac{c^2 - 3}{2c} \qquad (3)$$
$$y = \frac{c^2 - 1}{cc} \qquad (4)$$
Substituint les expressions (3) (4) en E_1
$$\left(\frac{c^2 - 1}{2c}\right)^2 + \left(\frac{c^2 - 3}{2c}\right)^2 = 1$$
Simplificant:
$c^4 - 6c^2 + 5 = 0$
Resolent l'equació:
$c = \sqrt{5}$
Siga $\alpha = \angle APB$
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$
Simplificant:
$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
Aleshores, $\alpha = 135°$

2379.- En la figura, $\overline{AE} = \overline{AC}, \overline{AB} = 3 \cdot \overline{BC}$,
El punt B pertany a la reccta AC.
$ABDE$ és un rectangle de perímetre $168\ cm$.
Calculeu:

a) L'àrea del rectangle $ABDE$
b) L'àrea de la figura.



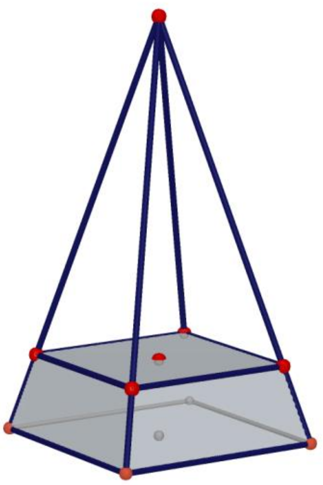
Solució:
Siga $\overline{BC} = x$
$\overline{AB} = 3x, \overline{AC} = \overline{AE} = 4x$

El perímetre del rectangle $ABDE$ és $168\ cm$
$14x = 168$
Resolent l'equació:
$x = 12$

L'àrea del rectangle $ABDE$ és:
$S_{ABDE} = 3x \cdot 4x = 1728\ cm^2$

L'àrea del trapezi $ACDE$ és:
$$S_{ACDE} = \frac{3x + 4x}{2} \cdot 4x = 2016\ cm^2$$

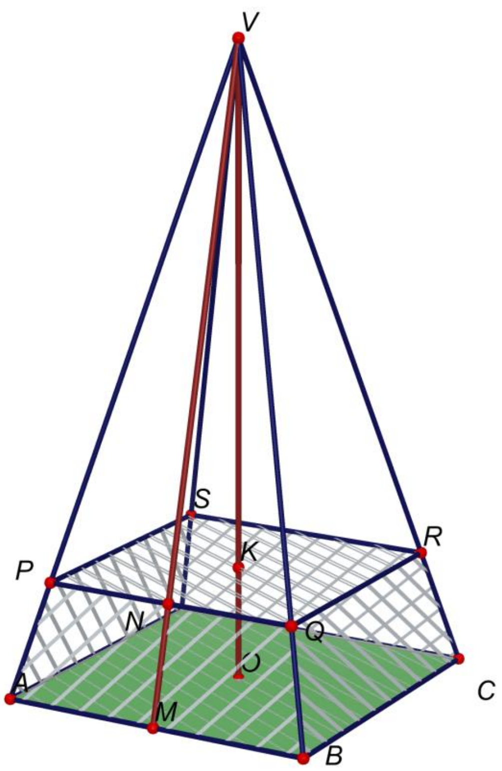
2380.- L'altura d'una cara lateral d'una piràmide regular quadrangular és el doble que l'aresta de la base.
Quin percentatge d'aquesta alçada de la piràmide (comptant des de la base hem de tallar amb un plànol paral·lel a la base de manera que l'àrea total de la superfície lateral més el quadrat superior del tronc de piràmide resultant siga igual a la meitat de la superfície lateral de la piràmide original.



Solució
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base de la piràmide $ABCDV$
Siga $\overline{MV} = 2a$ altura d'una cara lateral.

Siga el tron de piràmide $ABCDPQRS$.
Siga $\overline{PQ} = b$ aresta de la cara superior del tronc.

Siga O el centre de la base $ABCD$.
Siga K el centre de la base $PQRS$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{VMO}$. L'àltura de la piràmide és:
$H = \overline{VM} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.$
L'àrea lateral de la piràmide és:
$S_L = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 2a = 4a^2$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{PQ}$
Les piràmides $ABCDV, PQRSV$ són semblants.
Aleshores,
$\overline{NV} = 2b$

L'altura del trapezi $ABQP$ és $\overline{MN}$.
$\overline{MN} = 2(a-b)$

L'àrea del trapezi és:
$S_{ABQP} = \frac{a+b}{2} \cdot 2(a-b)$
L'àrea de la superfície lateral més el quadrat superior del tronc de piràmide és:
$S_2 = 4(a+b)(a-b) + b^2$ l'àrea total de la superfície lateral més el quadrat superior del tronc de piràmide resultant

$S_2 = \frac{1}{2}S_L$
$4(a+b)(a-b) + b^2 = 2a^2$

Simplificant:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Siga $h = \overline{OK}$ altura del tron de piràmide.

Les piràmides $ABCDV, PQRSV$ són semblants.
Aleshores,

$$\frac{b}{a} = \frac{H-h}{H}$$

$$\frac{h}{H} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{\frac{b}{a}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.1835$$

En de talla la piràmide inicial a un 18.35% de la seua altura.