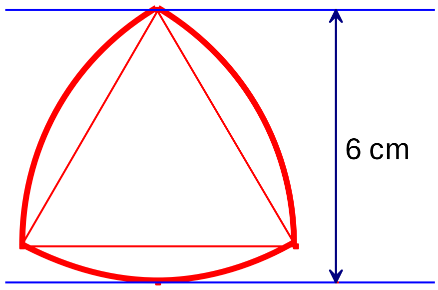
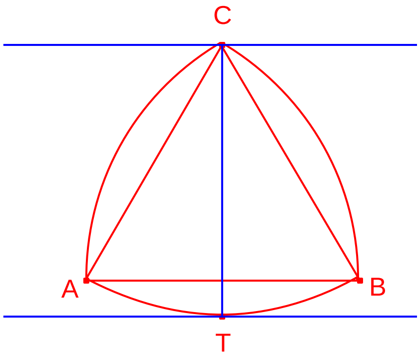
2381.- La següent forma geomètrica consta de tres arcs de circumferència, cadascun amb centre en el vèrtex oposat d'un triangle equilàter com mostra la figura.
Calculeu el perímetre i l'àrea de la figura.



Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T el punt de tangència de l'arc $\widehat{AB}$ i la recta paral·lela inferior.
$\overline{CA} = \overline{CT} = 6$

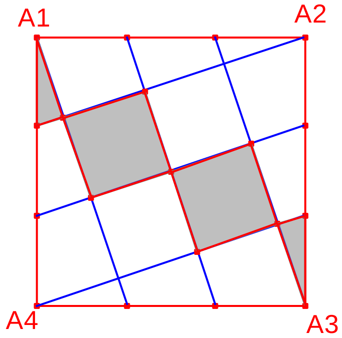
El perímetre està format per 3 arcs de $60°$ i radi 6.

$$P = 3 \cdot \frac{1}{6} 2\pi \cdot 6 = 6\pi \approx 18.85\ cm$$

L'àrea està formada per 3 segments circulars de $60°$ i radi 6.i un triangle equilàter de costat 6.

$$S = 3 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot 6^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 18\pi - 18\sqrt{3} \approx 25.37\ cm^2$$

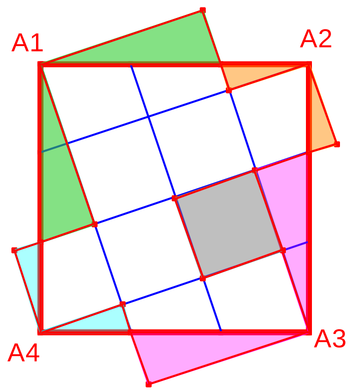
2382.- Siga A un quadrat de vèrtexs $A_k, k = 1,2,3,4$
Sobre cadascun dels costats de A, es dibuixen 2 punts que divideixen cadascun dels costats en 3 parts iguals. Aquests 8 punts i els vèrtexs de A estan connectats per dividir A en 16 regions, com s'indica.
Determineu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i l'àrea de A.
Crux Mathematicorum 4530.

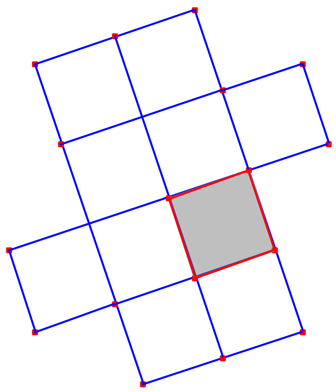


Solució:
Notem que la regió ombrejada està formada per 2 quadrats i 2 triangles rectangles de catets els costats del quadrat i la seua tercera part.

Agafem l'àrea d'un costat ombrejat com unitat.
L'àrea del triangle rectangle és $\frac{1}{6}$

L'àrea de la zona ombrejada és:
$$S_o = 2 + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3}$$





Efectuant girs sobre els vèrtexs de A.
L'àrea de A és igual a l'àrea de 10 quadrats com un dels ombrejats.
L'àrea del quadrat A és
$S_A = 10$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_o}{S_A} = \frac{\frac{7}{3}}{10} = \frac{7}{30}$$

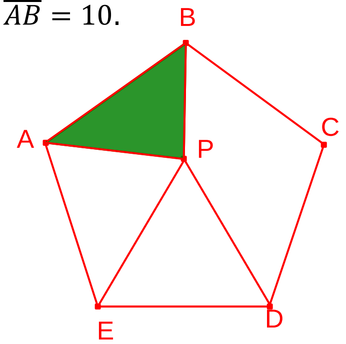
2383.- Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 10$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{EDP}$ interior al pentàgon

Calculeu:

a) La mesura de l'angle $\angle APB$.

b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$.



Solució:

a)

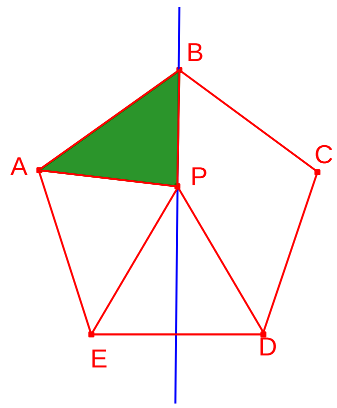
L'angle interior del pentàgon regular és:

$\angle AED = 108°$

$\angle PED = 60°$

Aleshores,

$\angle AEP = 108° - 60° = 48°$



El triangle $\overset{\Delta}{AEP}$ és isòsceles, $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{EP}$

Aleshores,

$$\angle EAP = \frac{180° - 48°}{2} = 66°$$

$\angle BAP = \angle BAE - \angle EAP = 108° - 66° = 42°$

La recta BP és mediatriu del costat $\overline{DE}$, aleshores és bisectriu de l'angle $\angle ABC$

$$\angle ABP = \frac{108°}{2} = 54°$$

$\angle APB = 180° - (\angle BAP + \angle ABP) = 180° - (42° + 54°) = 84°$

b)

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEP}$

$\overline{AP}^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos 48°$

$\overline{AP} = 10\sqrt{2(1 - \cos 48°)}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:

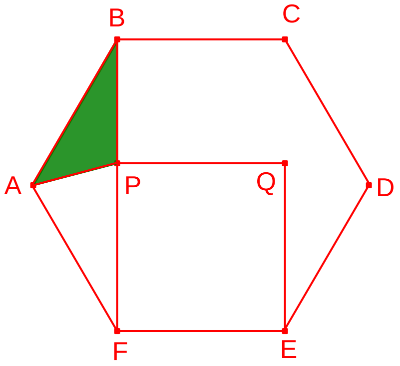
$$S_{APB} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AB} \cdot \sin 42°}{2}$$

$$S_{APB} = \frac{10\sqrt{2(1 - \cos 48°)} \cdot 10 \cdot \sin 42°}{2} \approx 27.22$$

2384.- Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$.
Siga el quadrat $FPQE$ cap a l'interior de l'hexàgon.
Calculeu:

a) La mesura de l'angle $\angle APB$.

b) La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ i de l'hexàgon regular $ABCDEF$



Solució

a)

F, P, B estan alineats.

L'angle interior de l'hexàgon regular és:
$\angle AFE = 120°$
$\angle PFA = 120° - 90° = 30°$
Aleshores,
$$\angle FAP = \angle APF = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$
Aleshores,
$\angle APB = 180° - 75° = 105°$

b)

Siga $\overline{AB} = c$ costat de l'hexàgon regular.
L'àrea de l'Hexàgon és igual a 6 vegades l'àrea d'un triangle equilàter de costat c
$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

$\overline{FE} = 2c. \overline{FE} = c$

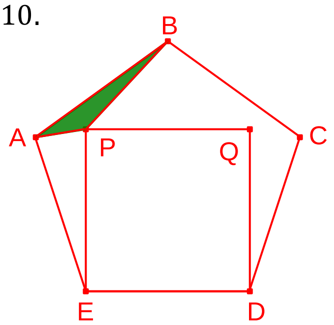
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFE}$
$\overline{BF} = \sqrt{3}c$
$\overline{BP} = \overline{BF} - \overline{FP} = \left(\sqrt{3} - 1\right)c$

Siga K la projecció de A sobre $\overline{BF}$
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{FKA}$ és $30°, 60°, 90°$, aleshores:
$$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \frac{1}{2}c$$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:
$$S_{APB} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AB}}{2}$$

$$S_{APB} = \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)c \cdot \frac{1}{2}c}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}c^2$$

La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{APB}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{4}c^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{18}$$

2385.- Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 10$.
Siga el quadrat $EPQD$ interior al pentàgon
Calculeu:



a) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$.
b) La mesura del segment $\overline{BP}$.
c) La mesura de l'angle $\angle APB$

Solució:
a)
L'angle interior del pentàgon regular és:
$\angle AED = 108°$
$\angle PED = 90°$
Aleshores,
$\angle AEP = 108° - 90° = 18°$
El triangle $\overset{\Delta}{AEP}$ és isòsceles, $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{EP}$
Aleshores,
$$\angle EAP = \frac{180° - 18°}{2} = 81°$$
$\angle BAP = \angle BAE - \angle EAP = 108° - 81° = 27°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AEP}$
$\overline{AP}^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos 18°$
$\overline{AP} = 10\sqrt{2(1 - \cos 18°)} \approx 3.1287$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:
$$S_{APB} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AB} \cdot \sin 27°}{2}$$
$$S_{APB} = \frac{10\sqrt{2(1 - \cos 18°)} \cdot 10 \cdot \sin 27°}{2} \approx 7.1020$$
b)
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APB}$
$\overline{PB}^2 = 2 \cdot 10^2 + -2 \cdot 10^2 \cdot \cos 18° + 10^2 - 2 \cdot 10^2\sqrt{2(1 - \cos 18°)} \cdot \cos 27°$

$\overline{PB}^2 \approx 54.0350$
$\overline{PB} \approx 7.3509$
c)
$\overline{AP} < \overline{BP}$, aleshores, $\angle ABP < \angle BAP = 27°$
Aleshores, l'angle $\angle APB$ és obtús.
Siga $\alpha = \angle APB$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APB}$
$$\frac{\overline{PB}}{sin27°} = \frac{10}{\sin \alpha}$$
$$\sin \alpha = \frac{10 \cdot \sin 27}{\overline{PB}} \approx 0.6176$$
$\alpha = 180° - \arcsin 0.6176) \approx 141°\, 51'32"$

2386.- Per a qualsevol triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{AB}$ siga D el peu de l'altura referida al vèrtex C.
Siguen M i N les interseccions de les bisectrius dels angles $\angle ADC$ i $\angle BDC$ amb els costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Demostreu que
$2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BN} = \overline{MN}^2$
Crux Mathematicorum OC474

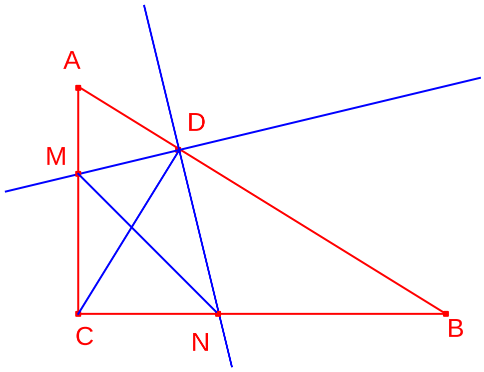
Solució:
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{b - \overline{AM}}{\overline{CD}} = \frac{b}{\overline{AD} + \overline{CD}}, \qquad \frac{\overline{BN}}{\overline{BD}} = \frac{a - \overline{BN}}{\overline{CD}} = \frac{a}{\overline{BD} + \overline{CD}}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AD}}{b} = \frac{b}{c}$$

Aleshores, $\overline{AD} = \frac{b^2}{c}$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CDB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{a}{c}$$

Aleshores, $\overline{BD} = \frac{a^2}{c}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{c \cdot \overline{CD}}{2}$$

Aleshores, $\overline{CD} = \frac{ab}{c}$

$$\overline{AM} = \frac{b \cdot \overline{AD}}{\overline{AD} + \overline{CD}} = \frac{b \cdot \frac{b^2}{c}}{\frac{b^2}{c} + \frac{ab}{c}} = \frac{b^2}{a+b}, \qquad \overline{BN} = \frac{a \cdot \overline{BD}}{\overline{BD} + \overline{CD}} = \frac{a \cdot \frac{a^2}{c}}{\frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c}} = \frac{a^2}{a+b}$$

$$2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BN} = 2\frac{b^2}{a+b} \cdot \frac{a^2}{a+b} = 2\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$

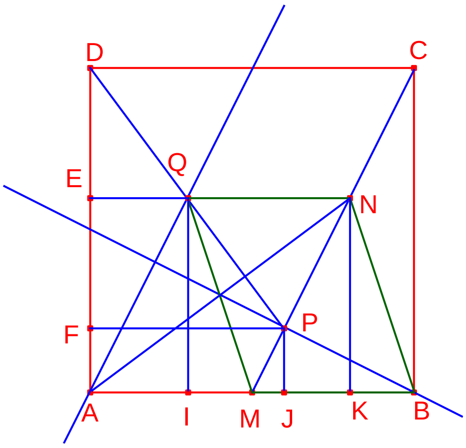
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNC}$

$$\overline{MN}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{CM}^2 = (a - \overline{BN})^2 + (b - \overline{AM})^2 = \left(a - \frac{a^2}{a+b}\right)^2 + \left(b - \frac{b^2}{a+b}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$

Aleshores, tenim la igualtat que cercàvem.

2387.- Donat el quadrat $ABCD$, siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga P la projecció de B sobre el segment $\overline{CM}$
Siga N el punt mig del segment $\overline{CP}$
La bisectriu de l'angle $\angle DAN$ intersecta el segment $\overline{DP}$ en el punt Q.
Proveu que $BMQN$ és un paral·lelogram.
Crux Mathematicorum OC473



Solució:
Siga $\overline{AB} = 1$, costat del quadrat $ABCD$.
$\overline{MB} = \frac{1}{2}, \overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
Siga I la projecció de Q sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga J la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga K la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga E la projecció de Q sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga F la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MJN}, \overset{\Delta}{MBC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{MP} = \frac{\sqrt{5}}{10}$
$\overline{CP} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\overline{MN} = \overline{MP} + \frac{1}{2}\overline{CP} = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$
$\overline{MK} = \frac{3}{10}$
$\overline{KN} = \frac{3}{4}$

$\overline{AK} = \overline{AM} + \overline{MK} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MJN}, \overset{\Delta}{MBC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PJ} = \frac{1}{5}$
$\overline{MJ} = \frac{1}{10}$

$\overline{DF} = 1 - \overline{MJ} = \frac{4}{5}, \overline{FP} = \overline{AM} + \overline{MJ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKN}, \overset{\Delta}{DFP}$ són iguals.
Siga $\alpha = \angle NAK = \angle PDL$, $\tan\alpha = \frac{3}{4}$,
$\beta = \angle QAN = \frac{90° - \alpha}{2}, \qquad \tan(90° - \alpha) = \frac{4}{3}$
Aplicant les relacions de l'angle doble:
$\frac{4}{3} = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta}$
Aleshores, $\tan\beta = \frac{1}{2}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEQ}$

$$\frac{\overline{QE}}{\overline{DE}} = \frac{3}{4}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEQ}$

$$\frac{\overline{QE}}{1-\overline{DE}} = \frac{1}{2}$$

Resolent el sistema format per ambdues equacions:

$$\overline{DE} = \frac{2}{5}, \overline{QE} = \frac{3}{10}$$

$$\overline{AE} = 1-\overline{DE} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Aleshores:

$$\overline{AE} = \overline{NK}$$

Per tant, $\overline{QN}$ i $\overline{MB}$ són paral·lels.

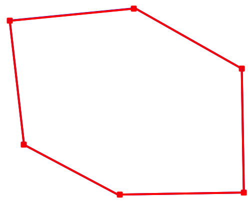
Q, N, E estan alineats.

$$\overline{QN} = \overline{AK} - \overline{QE} = \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

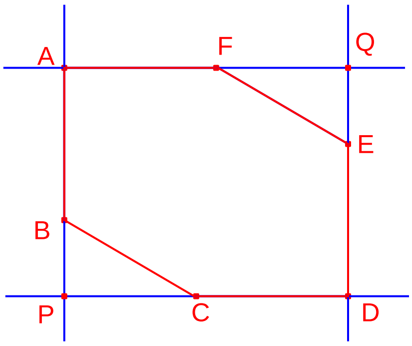
Aleshores, $\overline{QN} = \overline{MB}$

Per tant, $BMQN$ és un paral·lelogram.

2388.- Els angles d'un hexàgon són en aquest ordre $90°, 120°, 150°, 90°, 120°, 150°$.
Si tots els costats tenen longitud 4.
Calculeu l'àrea de l'hexàgon.
Crux Mathematicorum MA61



Solució.



Considerem l'hexàgon $ABCDEF$ d'angles
$A = 90°, B = 120°, C = 150°, D = 90°, E = 120°, F = 150°$

Les rectes AB i CD és tallen en el punt P.
$\angle PBC = 60°, \angle PCB = 30°$
Aleshores, $\angle BPC = 90°$

Les rectes AF i DE és tallen en el punt Q.
$\angle FEQ = 60°, \angle EFQ = 30°$
Aleshores, $\angle EQF = 90°$

$PDQA$ és un rectangle.
Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{P}C, E\overset{\Delta}{Q}B$ són iguals.

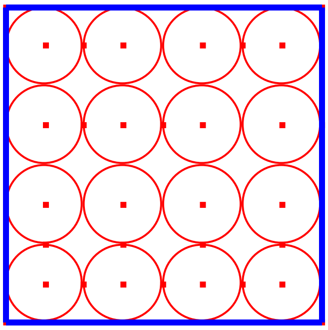
$$\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2, \overline{PC} = 2\sqrt{3}$$

$\overline{PA} = 6, \overline{PD} = 4 + 2\sqrt{3}$
L'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ és igual a l'àrea del rectangle $PDQA$ menys dues vegades l'àrea del triangle $B\overset{\Delta}{P}C$:

$$S_{ABCDEF} = S_{PDQA} - 2 \cdot S_{BPC} = 6\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} 2 \cdot 2\sqrt{3} = 24 - 8\sqrt{3}$$

2389.- Una manera de posar 10000 cercles de diàmetre 1 en un quadrat de mida 100×100 és col·locar 100 cercles en cadascuna de les 100 files.
Exemple:

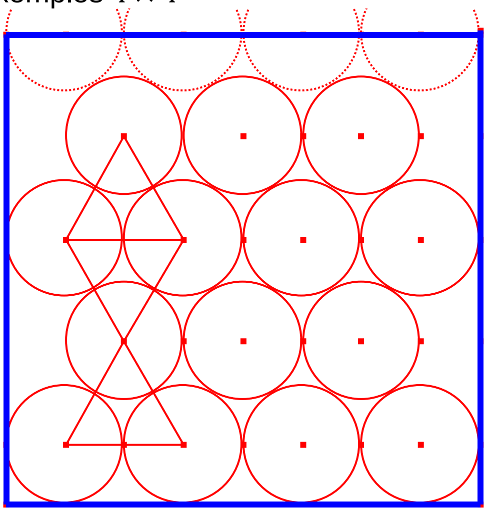
4×4

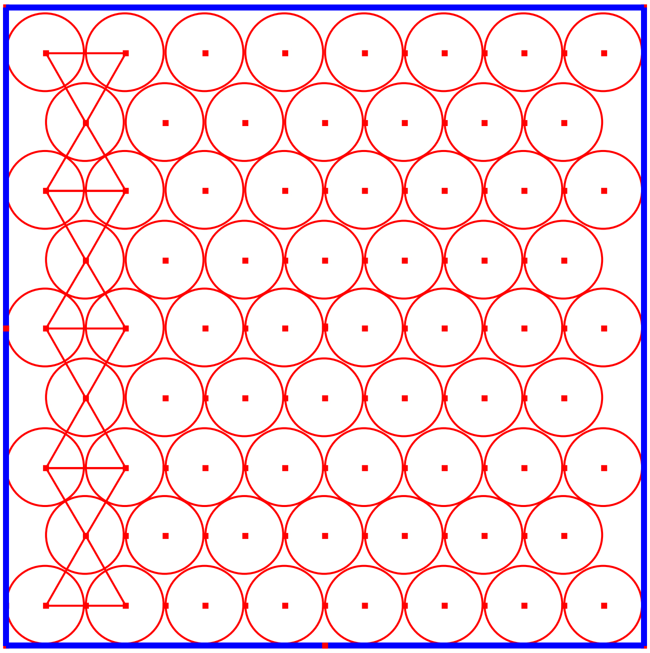


Si, d'altra banda, fem que els centres de tres cercles tangents i formen un triangle equilàter, quin és el nombre màxim de cercles que podem col·locar.
Crux Mathematicorum MA63

Solució:

Exemples 4×4 8×8





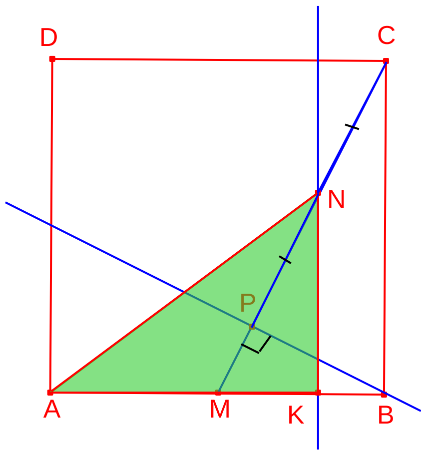
Si el quadrat és 100×100
La primera fila col·locaríem 100 cercles.
Després caldrien tantes files com triangles equilàters en $100-1$.

$$INT\left(\frac{(100-1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Es a dir, 114 files més.

Aleshores tindríem un total de $1+114=115$ files.
Cada dos files són 199 cercles i la darrera 100 cerques.
El total màxim de cercles és:
$T=199 \cdot 57+100=11443$ cercles.

2390.- En la figura, els costats del triangle rectangle ombrejat estan en proporció $3:4:5$



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat $ABCD$.

$\overline{MB} = \frac{1}{2}c, \overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$

Siga K la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}, \overset{\Delta}{MPB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{MP} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

$\overline{CP} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\overline{MN} = \overline{MP} + \frac{1}{2}\overline{CP} = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

$\overline{MK} = \frac{3}{10}$

$\overline{KN} = \frac{3}{4}$

$\overline{AK} = \overline{AM} + \overline{MK} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$

Aleshores, els costats del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKN}$ estan en proporció $3:4:5$