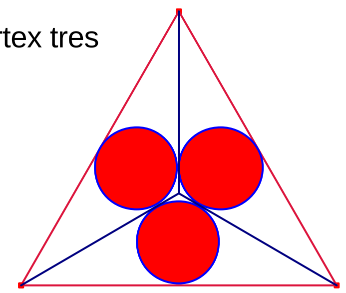
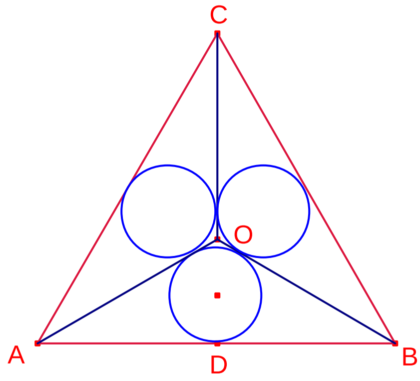
Problemes de Geometria per a l'ESO 24

231.- El centre d'un triangle equilàter de costat c forma amb el vèrtex tres triangles iguals.
Calculeu el radi de les tres circumferències inscrites.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $c=\overline{AB}$.
Siga O el centre del triangle equilàter.
Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Aplicant la propietat del baricentre del triangle:

$\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{3}c$. $\overline{OD}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{6}c$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$ és:

$S_{ABO}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OD}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}c^2$.

$S_{ABO}=\frac{\overline{AB}+\overline{OA}+\overline{OB}}{2}r$ en r és el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABO}$.

$S_{ABO}=\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)c}{6}r$.

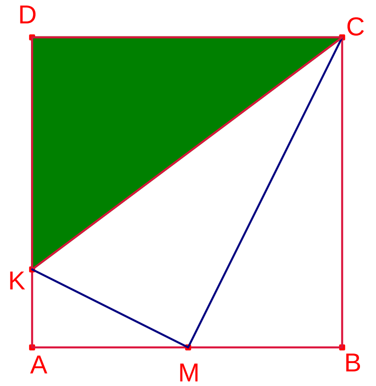
Igualant les àrees:

$\frac{\sqrt{3}}{12}c^2=\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)c}{6}r$. Resolent l'equació:

$r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}c$.

232.- Siga el quadrat ABCD de costat c. Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
La perpendicular al segment $\overline{CM}$ que passa per M talla el costat $\overline{AD}$ en el punt K
a) Proveu que $\angle BCM = \angle KCM$.
b) Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{KDM}$ és semblant al triangle rectangle 3-4-5.

Solució:
Siga $\alpha = \angle BCM$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$:

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$.

$\angle AMK = \alpha$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{MBC}$, $\overset{\Delta}{KAM}$ són semblants i la raó de semblança és $2:1$.

$\frac{\overline{AK}}{\overline{CM}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{MB}}{\overline{CB}}$. Aleshores, $\angle BCM = \angle KCM$.

Per tant, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBC}$, $\overset{\Delta}{KMC}$ són semblants.

$\frac{\overline{AK}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\overline{AK} = \frac{1}{4}c$.

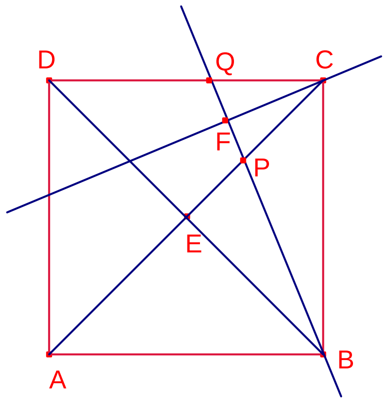
Per tant, $\overline{KD} = \frac{3}{4}c$.

$\overline{DC} = \frac{4}{4}c$.

Aleshores el triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDM}$ és semblant al triangle rectangle 3-4-5.

233.- Donat el quadrat ABCD de centre O dibuixem la bisectriu a l'angle $\angle ACD$ i la perpendicular a la bisectriu pel punt B que talla la diagonal $\overline{AC}$ en el punt P i al costat $\overline{CD}$ en el punt Q. Proveu que $\overline{DQ} = 2 \cdot \overline{EP}$.

Solució:
Siga F la intersecció de la bisectriu i la recta perpendicular a la bisectriu.



Notem que $\angle FCQ = \angle FCP = \frac{45^o}{2}$.

Aleshores, $\overline{CQ} = \overline{CP}$.

Notem que $\angle FCQ = \angle QBC$.

Aleshores, $\angle EBP = \frac{45^o}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PEB}$, $\overset{\Delta}{QCB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \sqrt{2} \qquad (1)$$

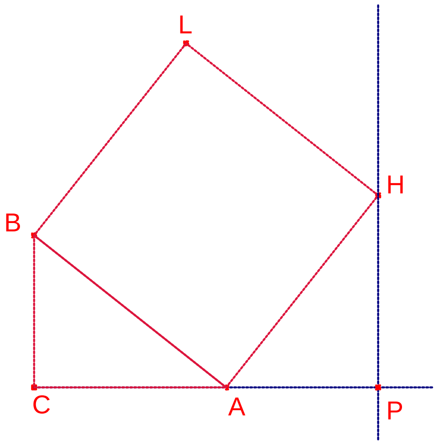
Els triangles $\overset{\Delta}{DQB}$, $\overset{\Delta}{CPB}$ són semblants.

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{c\sqrt{c}}{c} = \sqrt{2} \qquad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{PE}} = 2.$$

234.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$.
Sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ i exterior al triangle es dibuixa el quadrat ABLH.
Determineu la mesura del segment $\overline{CH}$.



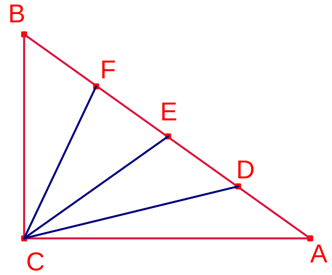
Solució:
Siga P la projecció de H sobre la recta CA.
$\overline{AH}=\overline{AB}$, $\angle CAB=\angle AHP$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{HAP}$ són iguals.
Per tant, $\overline{AP}=a, \overline{HP}=b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPH}$:
$\overline{CH}=\sqrt{(a+b)^2+b^2}$.

Anàlogament, $\overline{CL}=\sqrt{(a+b)^2+a^2}$.

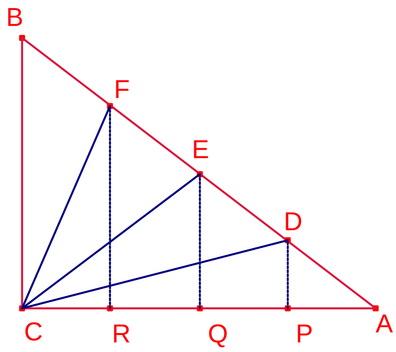
235.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{AB} = c$.
La hipotenusa $\overline{AB}$ s'ha dividit en quatre parts iguals pels punts D, E, F.
Calculeu la suma dels quadrats dels segments formats des de C als punts D, E, F.



Solució:

Siga $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ catets del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores, $a^2 + b^2 = c^2$.

Siga A, D, E, F, B (en aquest ordre) els punts que divideixen la hipotenusa en quatre parts iguals.
Siguen P, Q, R les projeccions de D, E, F sobre el catet $\overline{AC}$ respectivament.



$\overline{CR} = \frac{1}{4}b$, $\overline{FR} = \frac{3}{4}a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CRF}$:

$$\overline{CF}^2 = \frac{1}{16}b^2 + \frac{9}{16}a^2.$$

$\overline{CQ} = \frac{1}{2}b$, $\overline{EQ} = \frac{1}{2}a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQE}$:

$$\overline{CE}^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

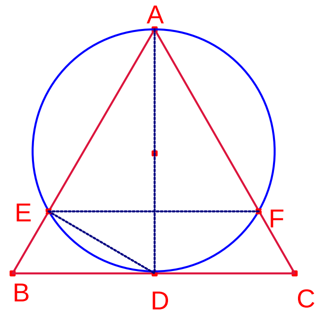
$\overline{CP} = \frac{3}{4}b$, $\overline{DP} = \frac{1}{4}a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPD}$:

$$\overline{CF}^2 = \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{16}a^2.$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{CF}^2 = \frac{7}{8}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{7}{8}c^2.$$

236.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Sobre la altura $\overline{AD}$ com a diàmetre es dibuixa una circumferència que talla els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ en els punts E, F, respectivament. Calculeu la raó entre els segments $\overline{EF}$, $\overline{BC}$.

Solució 1:



Siga c el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Notem que $\overline{AE} = \overline{EF}$.
Siga, $x = \overline{AE}$, $y = \overline{DE}$.

El triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és rectangle en E ja que abraça un diàmetre.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}c^2 \qquad (1)$$

El triangle $\overset{\Delta}{BED}$. Aplicant el teorema de Pitàgores:

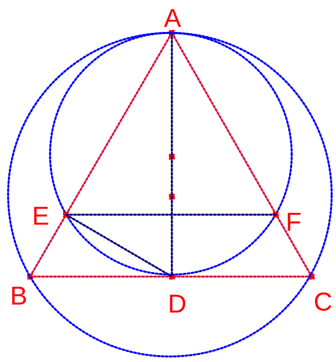
$$(c-x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}c^2 \qquad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4}c^2 \\ (c-x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}c^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}c \\ y = \frac{\sqrt{3}}{4}c \end{cases}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{3}{4}c}{c} = \frac{3}{4}$.

Solució 2:



Siga c el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

El triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és equilàter.

El radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$R = \frac{2}{3}\overline{AD}$.

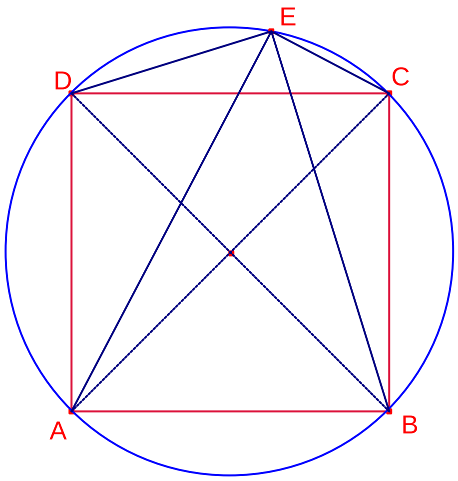
El radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$r = \frac{1}{2}\overline{AD}$.

Aleshores, $\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD}}{\frac{2}{3}\overline{AD}} = \frac{3}{4}$.

237.- Sobre la circumferència circumscrita al quadrat ABCD de costat c es troba el punt D.

Calculeu $\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores les diagonals del quadrat mesuren:

$\overline{AC}^2=\overline{BD}^2=2c^2$.

Les diagonals del quadrat són diàmetres de la circumferència.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ ja que abraça un diàmetre de circumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{AC}^2=2c^2$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{BED}$ ja que abraça un diàmetre de circumferència.

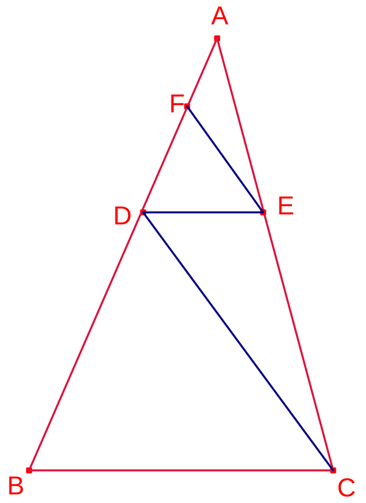
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{BE}^2+\overline{DE}^2=\overline{BD}^2=2c^2$.

Sumant ambdues expressions:

$\overline{AE}^2+\overline{BE}^2+\overline{CE}^2+\overline{DE}^2=4c^2$.

238.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura $\overline{BC}//\overline{DE}$ i $\overline{CD}//\overline{EF}$.
Si $\overline{AF}=4$ i $\overline{DF}=6$. Calculeu $\overline{BD}$.



Solució:

Siga $x=\overline{BD}$.

Siga $\overline{EF}=a$ i $\overline{DE}=b$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}$. $\overline{CD}=\dfrac{10}{4}a=\dfrac{5}{2}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{CD}}$. $\overline{BC}=\dfrac{10}{4}b=\dfrac{5}{2}b$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

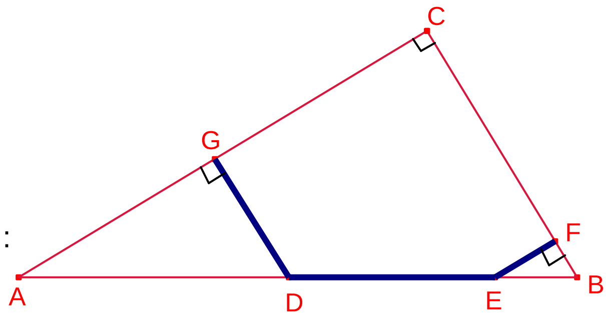
$\dfrac{10+x}{10}=\dfrac{5}{2}$. Aleshores, $x=\overline{BD}=15$.

Generalització:

En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura $\overline{BC}//\overline{DE}$ i $\overline{CD}//\overline{EF}$.

Si $\overline{AF}=m_1$ i $\overline{DF}=m_2$ aleshores, $\overline{BD}=\dfrac{(m_1+m_2)m_2}{m_1}$.

239.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{o}$.
Siguen els punts D, E de la hipotenusa tal que $\overline{AE} = \overline{AC}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$.
Siga F la projecció de E sobre el catet $\overline{BC}$.
Siga G la projecció de D sobre el catet $\overline{AC}$.
Proveu que $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$.



Solució:
Siga $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$c^2 = a^2 + b^2$.
$\overline{DE} = \overline{BD} - \left(\overline{AB} - \overline{AE}\right) = a - (c - b) = a + b - c$.

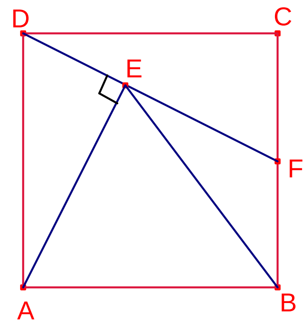
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADG}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{DG}}{c - a} = \frac{a}{c}$. Aleshores, $\overline{DG} = \frac{a(c - a)}{c}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EBF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{EF}}{c - b} = \frac{b}{c}$. Aleshores, $\overline{EF} = \frac{b(c - b)}{c}$.

$$\overline{EF} + \overline{DG} = \frac{b(c - b)}{c} + \frac{a(c - a)}{c} = \frac{bc - b^2 + ac - a^2}{c} = \frac{bc + ac - c^2}{c} = a + b - c.$$

Aleshores, $\overline{DE} = \overline{EF} + \overline{DG}$.

240.- El costat del quadrat ABCD és c.
F és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga E la projecció de A sobre el segment $\overline{DF}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$.



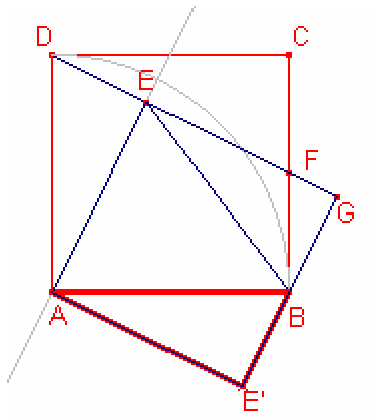
Solució 1:

Efectuem el gir de -90^o i centre A del triangle $\overset{\Delta}{AED}$ que el transforma en el triangle $\overset{\Delta}{ABE'}$.
El costat $\overline{GE'}$ quadrat AE'GE conté el punt B.
Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}=\frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BE'}}{\overline{AE'}}=\frac{1}{2}$.

Per tant, B és el punt mig del costat $\overline{GE'}$.
Aleshores, $\overline{BE}=\overline{AB}$.



Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FCD}$:

$$\overline{DF}=\frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

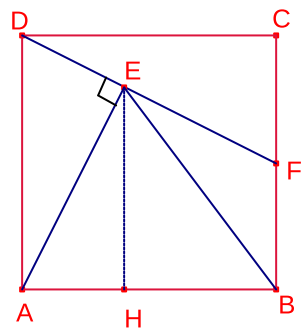
Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{DE}}{c}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{5}c$.

$$\overline{AE}=2\cdot\overline{DE}=\frac{2\sqrt{5}}{5}c.$$

Siga H la projecció de E sobre el segment $\overline{AB}$

Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{AHE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:



$\frac{\overline{EH}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{EH}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{EH}=\frac{4}{5}c$.

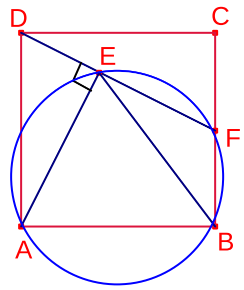
$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{EH}=\frac{2}{5}c.$$

$$\overline{BH}=c-\overline{AH}=\frac{3}{5}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHE}$, $\overline{BE}=c$.

Solució 3:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FCD}$: $\overline{DF}=\frac{\sqrt{5}}{2}c$.



Els triangles $\overset{\Delta}{FCD}$, $\overset{\Delta}{DEA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}$. $\frac{\overline{DE}}{c}=\frac{\frac{c}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}$. Aleshores, $\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{5}c$.

$\overline{AE}=2\cdot\overline{DE}=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$. $\overline{EF}=\overline{DF}-\overline{DE}=\frac{3\sqrt{5}}{10}c$. $\overline{AF}=\overline{DF}=\frac{\sqrt{5}}{2}c$.

El quadrilàter ABFE és inscriptible ja que té dos angles oposats rectes. Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{EF}\cdot\overline{AB}+\overline{AE}\cdot\overline{BF}=\overline{AF}\cdot\overline{BE}$.

$\frac{3\sqrt{5}}{10}c\cdot c+\frac{2\sqrt{5}}{5}c\cdot\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}c\cdot\overline{BE}$. Resolent l'equació:

$\overline{BE}=c$.