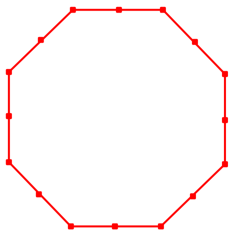
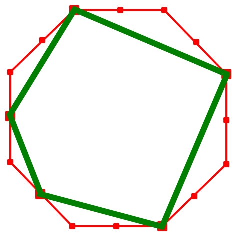
Problemes de Geometria per a l’ESO 240

2391.- A la primera figura es mostra un octàgon regular marcat amb els vèrtexs i els punts migs de cada costat.
Un polígon s’anomena “*polígon intern*” si és un polígon format recorrent l'octògon en sentit horari seleccionant alguns dels punts marcats a mesura que l’aneu dibuixant, assegurant-vos que cada costat de l'octàgon original conté exactament un punt seleccionat. A continuació, cada punt seleccionat està connectat al següent amb un segment i l'últim està connectat a la primer per completar el *polígon intern*.
La segona figura mostra un exemple de polígon intern.
Quants *polígons interns* té l'octògon regular?

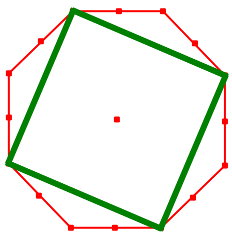




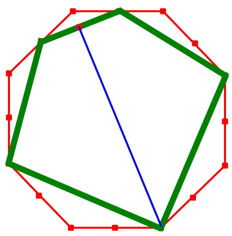
Crux Mathematicorum MA64

Solució.
Per fer un polígon intern si es té un vèrtex de l’octògon aquest vèrtex pertany a dos costats de l’octògon inicial.

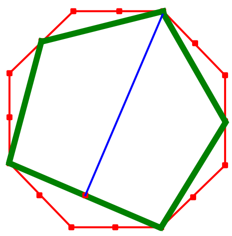
No es poden formar triangles.
Els quadrats es formen amb 4 vèrtexs de l’octògon ininical.
Els pentàgons es poden formar amb 3 vèrtexs i 2 punts migs de l’octògon inicial.
Els hexàgons es poden formar amb 2 vèrtexs i 4 punts migs de l’octògon inicial.
Els heptàgons es poden format amb 1 vèrtex i 6 punts migs de l’octògon inicial.
Els octògons es poden formar amb 8 punts migs de l’octògon regular inicial.



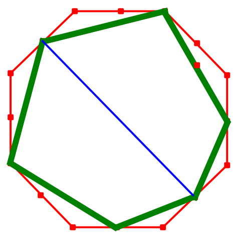
(2)



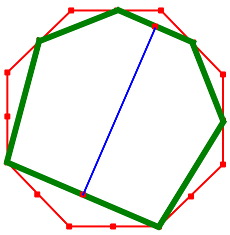
(8)



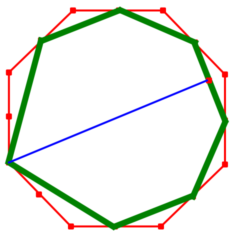
(8)



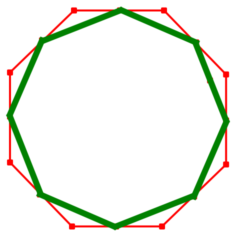
(8)



(8)



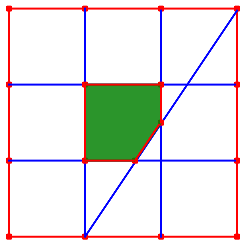
(8)



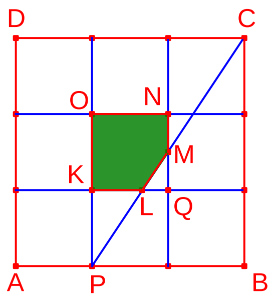
(1)

Tenint en compte la simetria de les figures es poden formar un total de 43 polígons interns

2392.- El quadrat gran de la figura s'ha dividit en 9 quadrat iguals.
El costa del quadrat gran mesura c.
Determineu en funció de c, l'àrea del polígon ombrejat.



Solució
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga $KLMNO$ el pentàgon ombrejat.



Siga $\overline{LQ} = x, \overline{QM} = y$
L'àrea del pentàgon $KLMNO$ és igual a l'àrea del quadrat $KQNO$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{LQM}$

$\overline{KQ} = \frac{1}{3}c$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LKP}, \overset{\Delta}{PBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{c}{3} - x}{\frac{c}{3}}$$

Simplificant:

$$x = \frac{1}{9}c$$

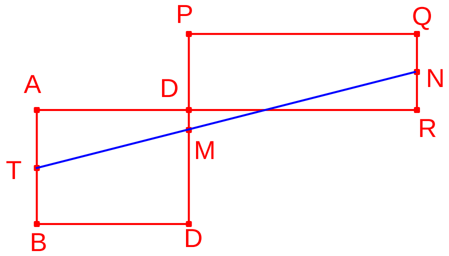
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LQM}, \overset{\Delta}{PBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2}$$

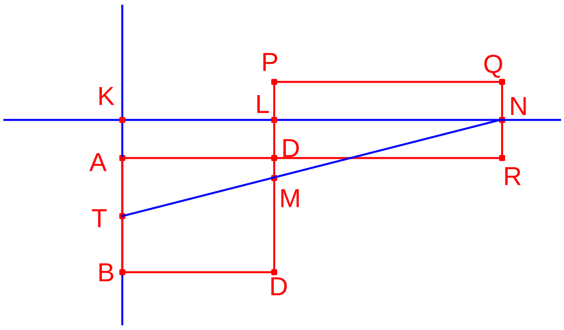
$$y = \frac{3}{2}x = \frac{1}{6}c$$

$$S_{KLMNO} = S_{KQNO} - S_{LQM} = \frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}c \cdot \frac{1}{6}c = \frac{11}{108}c^2$$

2393.- En la figura es mostra dos rectangles $ABCD$ i $PQRD$ d'àrees iguals i amb els costats respectius paral·lels.
Siguen M,N,T els punts migs dels segments $\overline{QR},\overline{PC},\overline{AB}$, respectivament.
Demostreu que els punts N,M,T estan alineats.



Solució:



Siguen $\overline{BD}=a,\overline{AB}=b$, costats del rectangle $ABCD$.
Siguen $\overline{DR}=c,\overline{DP}=d$, costats del rectangle $PQRD$.
Els rectangles $ABCD$ i $PQRD$ tenen la mateixa àrea, aleshores:

$$\frac{b}{c}=\frac{d}{a}$$

Siguen K,L les projeccions de N sobre les rectes AB,DP, respectivament.

N,M,T estan alineats si els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKN},\overset{\Delta}{NLM}$ són semblants.

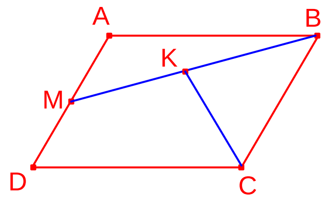
$$\overline{TK}=\frac{b+d}{2},\overline{KN}=a+c$$
$$\overline{ML}=\overline{PM}-\overline{QN}=\frac{b+d}{2}-\frac{d}{2}=\frac{b}{c},\overline{LN}=c$$

$$\frac{\overline{TK}}{\overline{KN}}=\frac{b+d}{2(a+c)}$$

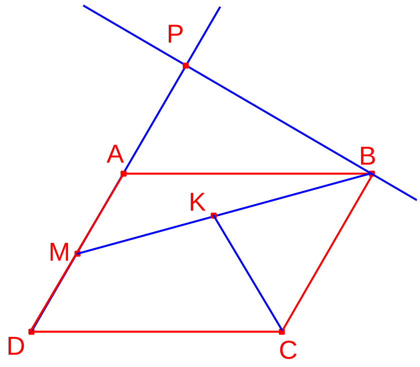
$$\frac{\overline{ML}}{\overline{NL}}=\frac{b}{2c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{a}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+d}{a+c}=\frac{b+c}{2(a+c)}=\frac{\overline{TK}}{\overline{KN}}$$

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKN},\overset{\Delta}{NLM}$ són semblants.
Per tant, els punts N,M,T estan alineats.

2394.- En la figura $ABCD$ és un paral·lelogram, $D = 60°, \overline{AD} = 2, \overline{AB} = \sqrt{3} + 1$.
M és el punt mig del costat $\overline{AD}$.
El segment $\overline{CK}$ és bisectriu de l'angle C.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BKC$.



Solució:



Pel punt B tracem una perpendicular al costat $\overline{AD}$
Siga P la intersecció de la perpendicular i la recta AD
$\angle ABP = 30°$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$\widetilde{PM} = \overline{AP} + \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

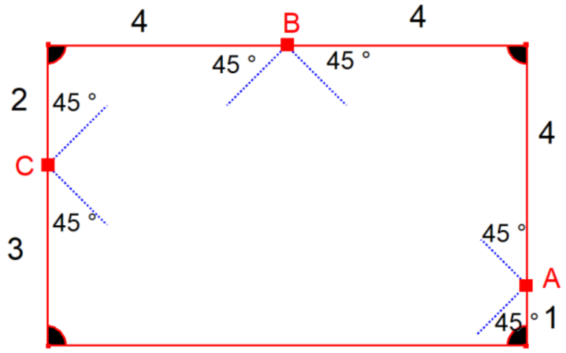
Aleshores, $\overline{AP} = \overline{PM}$
Per tant, $\angle MBP = 45°$

$\angle KBC = 90° - \angle MBP = 45°$

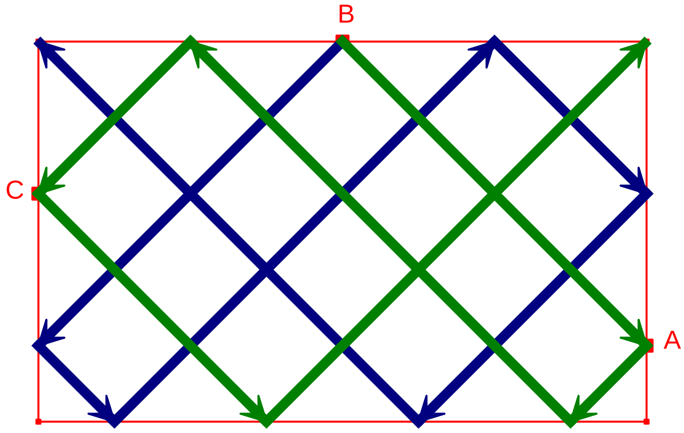
$\angle KCB = \frac{1}{2}C = 60°$

$\angle BKC = 180° - (\angle KCB + \angle MBP) = 180° - (60° + 45°) = 75°$

2395.- Una taula de Billar rectangular de 8×5 té quatre troneres, una en cada cantó. Des de quins punts A, B, C, en colpejar una bola amb les direccions indicades en la figura, la bola caurà en alguna de les troneres després de fer 6 reflexions (6 bandes). (La bola és reflecteix amb igual angle d'incidència que de reflexió en tocar la banda)



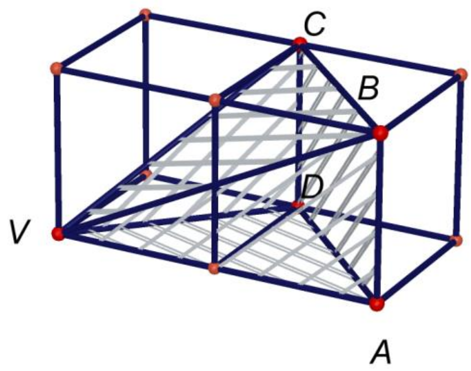
Solució



Pel punt B és poden traçar dues trajectòries amb 6 bandes.

Pels punts A i C cap de les dues trajectòries tenen 6 bandes o en tenen menys o bé passen a bans per B per tant tenen trajectòries de més de 6 bandes.

2396.- Siguen dos cub iguals ajuntats per una cara comuna (veure figura).
Determineu la proporció entre el volum de la piràmide $ABCDV$ i la suma dels coloms dels dos cubs.



Solució:
Siga $\overline{CD} = a$, aresta dels dos cubs.
La suma dels volums dels dos cubs és:
$V_{2c} = 2a^3$

El rectangle $ABCD$ és la base de la piràmide $ABCDV$.
$\overline{VC} = a\sqrt{3}, \overline{CD} = a, \overline{VD} = a\sqrt{2}$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $V\overset{\Delta}{D}C$ és rectangle $\angle VDC = 90°$

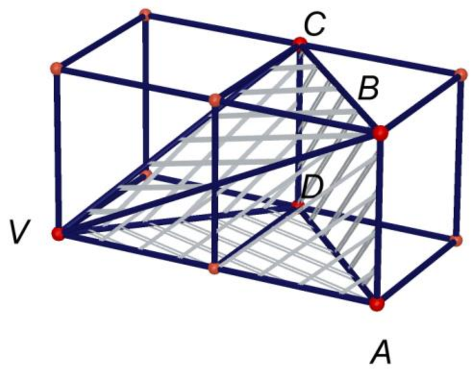
$\overline{VD} = a\sqrt{2}, \overline{AD} = a\sqrt{2}, \overline{VA} = 2a$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $V\overset{\Delta}{D}A$ és rectangle $\angle VDA = 90°$

Aleshores, $\overline{VD}$ és perpendicular a la base, altura de la piràmide

El volum de la piràmide és:
$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}\overline{DA} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{VD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} = \frac{2}{3}a^3$$

La proporció entre els volums és:
$$\frac{V_{ABCDV}}{V_{2c}} = \frac{\frac{2}{3}a^3}{2a^3} = \frac{1}{3}$$

2397.- Siguen dos cub iguals d'aresta 1 ajuntats per una cara comuna (veure figura).
Determineu l'àrea total la piràmide $ABCDV$.



Solució:
El rectangle $ABCD$ és la base de la piràmide $ABCDV$.
$\overline{VC} = \sqrt{3}, \overline{CD} = \overline{AB} = 1, \overline{VD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{2}, \overline{VA} = 2,$
El triangle $\overset{\Delta}{VDC}$ és rectangle $\angle VDC = 90°$
El triangle $\overset{\Delta}{VAB}$ és rectangle $\angle VAB = 90°$

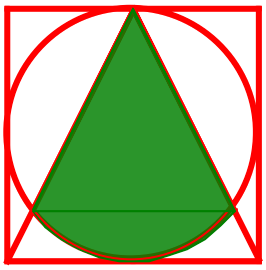
$\overline{VA}^2 = \overline{VD}^2 + \overline{DA}^2$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{VDA}$ és rectangle $\angle VDA = 90°$

$\overline{VB}^2 = \overline{VC}^2 + \overline{CB}^2$
Aplicant el teorema invers de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{VCB}$ és rectangle $\angle VCB = 90°$

L'àrea de la piràmide és l'àrea de la base ABCD, més l'àrea de 4 triangles rectangles $\overset{\Delta}{VDC}$, $\overset{\Delta}{VAB}$, $\overset{\Delta}{VDA}$, $\overset{\Delta}{VCB}$:

$$S_{ABCDDV} = 1 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} 1 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \approx 53461$$

2398.- Calculeu l'àrea ombrejada si el costat del quadrat és 1.

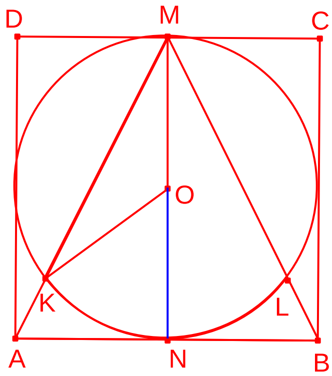


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$

El radi de la circumferència és:

$$R = \frac{1}{2}c$$



Siga $\alpha = \angle KMO$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANM}$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\angle KOM = 2\alpha, \angle KOL = 4\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$$

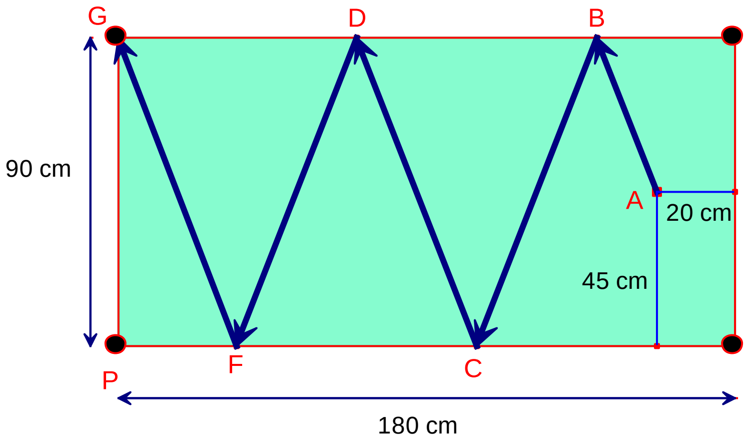
$$\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin 4\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

L'àrea ombrejada de la figura és igual a l'àrea d'un sector de radi $\frac{1}{2}c$ i angle $\arcsin\frac{24}{25}$ i dos triangles $\overset{\Delta}{OKM}$

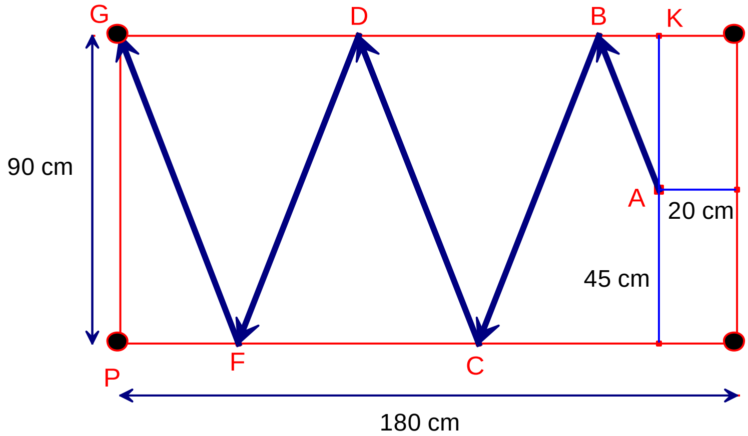
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \arcsin\frac{24}{25} + 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = \frac{1}{8}\arcsin\frac{24}{25} + \frac{1}{5} \approx 0.3609$$

2399.- Siga una taula de billar $180\ cm \times 90\ cm$ amb 4 troneres.
Una bola A es troba a $20\ cm$ d'una banda i a $45\ cm$ de l'altra, (veure figura.
La bola ha de tocar 4 bandes B, C, D, E i col·lar-se a la tronera G.
(La bola és reflecteix amb igual angle d'incidència que de reflexió en tocar la banda)



Determineu l'angle $\angle PGF$
Calculeu la distància que recorre la bola.

Solució:
Siga K la projecció de A sobre la banda BD.
$\overline{AK} = 90 - 45 = 45$



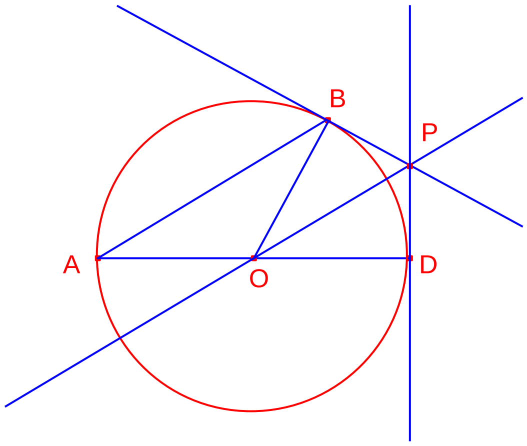
Siga $\angle PGF = \alpha$
Siga $x = \overline{PF}$.
$\overline{GB} = 4x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GPF}, \overset{\Delta}{AKB}$ són semblants i de raó 2:1.
Aleshores, $\overline{BK} = \frac{1}{2}x$

La mesura de la banda és 180 cm:
$4x + \frac{1}{2}x + 20 = 180$
Resolent l'equació:
$x = \frac{320}{9}$
$\tan\alpha = \frac{\frac{320}{9}}{90} = \frac{32}{81}$
$\alpha = \arctan\frac{32}{81} = 21°\,33'26"$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{GPF}$:
$\overline{GF} = \sqrt{90^2 + \left(\frac{320}{9}\right)^2} = \frac{10}{9}\sqrt{7585}$
La longitud és:
$L = \left(4 + \frac{1}{2}\right)\overline{GF} = 5\sqrt{7585} \approx 435.4595\ cm$

2400.- Siga una circumferència de centre O.
Per qualsevol punt de la circumferència B es traça una recta tangent a la circumferència.
Siga $\overline{AOD}$ un diàmetre de la circumferència.
Pel punt O tracem una paral·lela al segment $\overline{AB}$ que talla la recta tangent en el punt P.
Demostreu que la recta PD és tangent a la circumferència.

Solució:



Siga $\alpha = \angle BAO$
$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$

Per ser recta tangent:
$\angle ABO = \angle BAO = \alpha$

OP és paral·lela a AB, aleshores:
$\angle OBP = 90°$

Per ser angle central:
$\angle BOD = 2\angle BAO = 2\alpha$

Aleshores,
$\angle BOP = \angle BOD - \angle POD = 2\alpha - \alpha = \alpha$

$\overline{OB} = \overline{OD}$

Aleshores, els triangles $O\overset{\Delta}{B}P, O\overset{\Delta}{D}P$ són iguals (CAC)

Aleshores, $\angle ODPO = \angle OBP = 90°$

Aleshores, la recta PD és tangent a la circumferència.