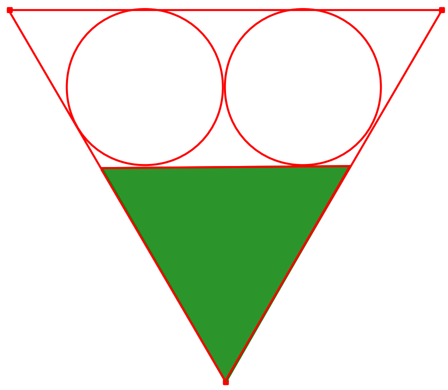
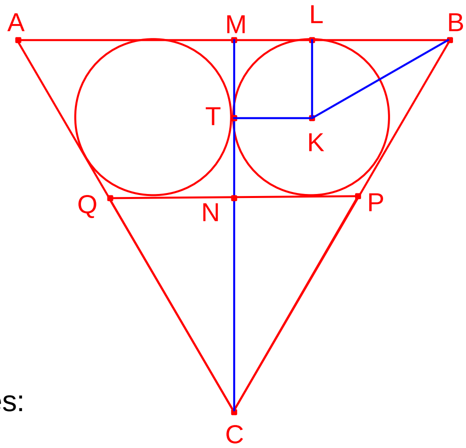
Problemes de Geometria per a l'ESO 241

2401.- Quina part de l'àrea del triangle equilàter exterior és l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ del triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga K el centre de una de les circumferències.
Siga $r = \overline{KL} = \overline{KT}$
$\overline{BL} = r\sqrt{3}$
$\overline{BM} = r\left(1 + \sqrt{3}\right)$
$\overline{MC} = \sqrt{3} \cdot \overline{BM} = r\left(3 + \sqrt{3}\right)$

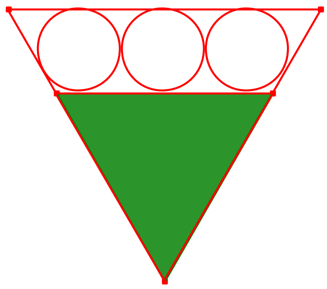


Siga $\overline{PQ}$ la tangent a les circumferències.
Siga N el punt mig de $\overline{PQ}$
$\overline{MN} = 2r$
$\overline{CN} = \overline{MC} - \overline{MN} = r\left(1 + \sqrt{3}\right)$

La proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters és:

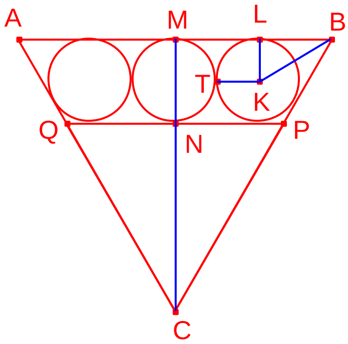
$$\frac{S_{CPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

2402.- Quina part de l'àrea del triangle equilàter exterior és l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ del triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga K el centre de una de les circumferències.
Siga $r = \overline{KL} = \overline{KT}$
$\overline{BL} = r\sqrt{3}$
$\overline{BM} = r(2 + \sqrt{3})$
$\overline{MC} = \sqrt{3} \cdot \overline{BM} = r(3 + 2\sqrt{3})$

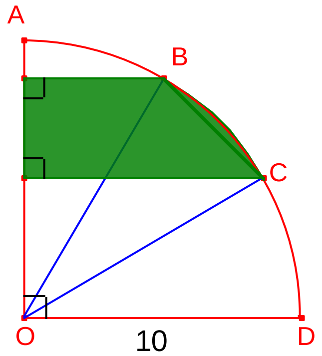


Siga $\overline{PQ}$ la tangent a les circumferències.
Siga N el punt mig de $\overline{PQ}$
$\overline{MN} = 2r$
$\overline{CN} = \overline{MC} - \overline{MN} = r(1 + 2\sqrt{3})$

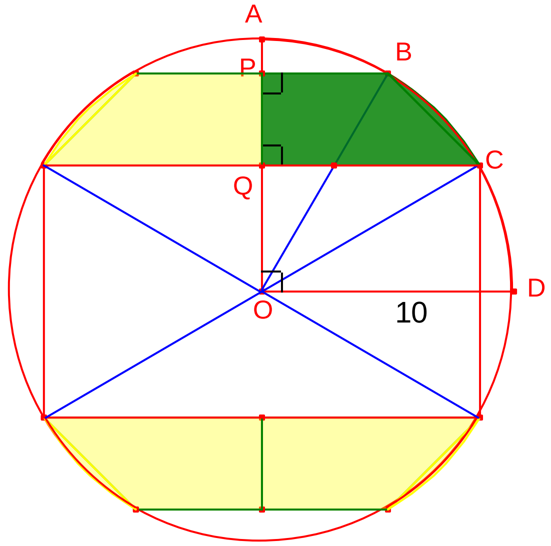
La proporció entre les àrees dels dos triangles equilàters és:

$$\frac{S_{CPQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}\right)^2 = \left(\frac{1 + 2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{3}$$

2403.- Els punts B, C divideixen el quadrant $\widehat{AD}$ en tres arcs iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució 1:

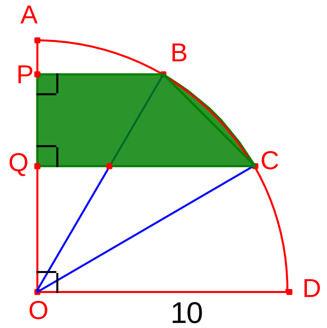


Considerem la circumferència de radi.
Amb simetries considerem 4 regions ombrejades iguals a les que volem calcular.

La zona no ombrejada ocupa 4 sectors circulars de 60º del cercle.
La zona ombrejada ocupa 2 sectors de 60º del cercle.
La zona ombrejada del problema ocupa un sector de 30º del cercle.

$$S = \frac{1}{12}\pi 10^2 = \frac{25\pi}{3}$$

Solució 2:
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del trapezi $BCQP$ més l'àrea del segment circular $\widehat{BC}$



$$\overline{PB} = \overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{OD} = 5$$
$$\overline{CQ} = \overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = 5\sqrt{3}$$
$$\overline{PQ} = \overline{OP} - \overline{OQ} = 5\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

L'àrea del trapezi $BCQP$ és:

$$S_{BCQP} = \frac{\overline{PB} + \overline{CQ}}{2} \cdot \overline{PQ} = \frac{5 + 5\sqrt{3}}{2} \cdot 5\left(\sqrt{3} - 1\right) = 25$$

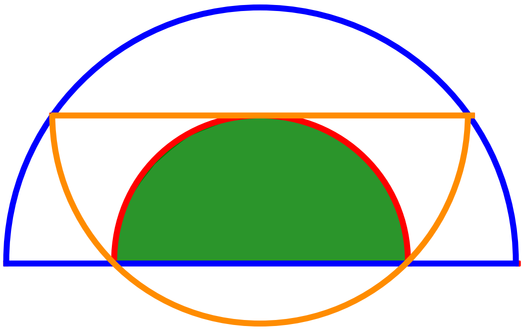
L'àrea del segment circular és igual a l'àrea del sector de 30º menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OBC}$:

$$S_{segment} = \frac{1}{12}\pi 10^2 - \frac{1}{2}10^2 \sin 30^\circ = \frac{25\pi}{3} - 25$$

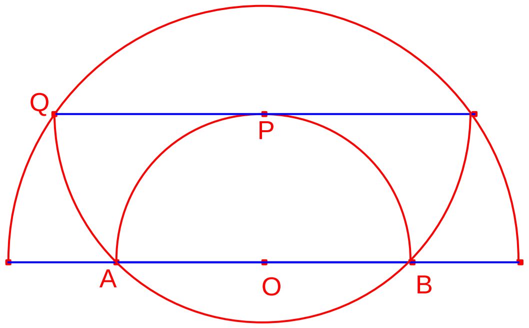
L'àrea ombrejada és:

$$S_o = S_{BCQP} + S_{segment} = \frac{25\pi}{3}$$

2404.- Quina fracció del semicercle gran ocupa el semicercle ombrejat.



Solució:
Siga $R = \overline{OA}$ el radi del semicercle major.



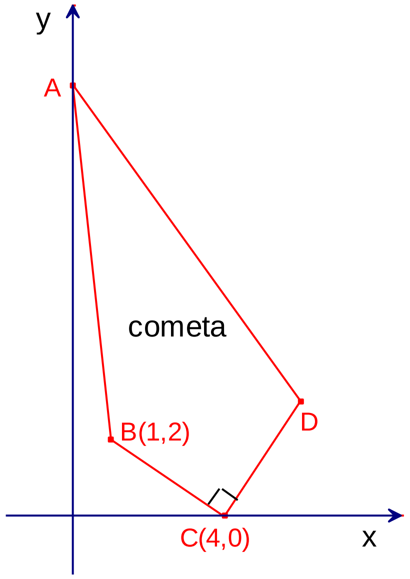
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$, el radi de la mitjana és:
$\overline{PA} = R\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$, el radi de la gran és:
$\overline{OQ} = R\sqrt{3}$

La proporció entre les àrees dels semicercles menut i gran és:

$$\frac{S_m}{S_G} = \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OQ}}\right)^2 = \left(\frac{R}{R\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

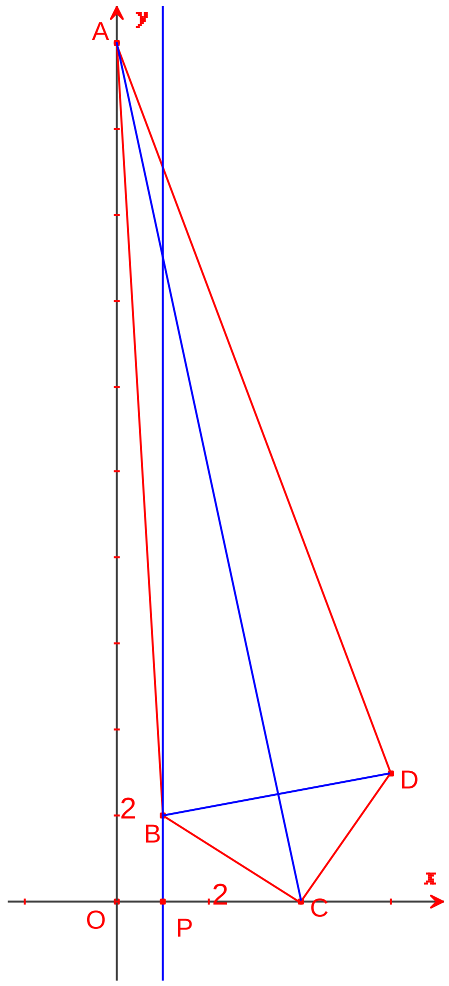
2405.- En la figura siga $ABCD$ una cometa, $\overline{AB} = \overline{AD}, \overline{BC} = \overline{CD}$.
Si $B(1,2), C(4,0)$ i $\angle BCD = 90°$, determineu les coordenades del punt A



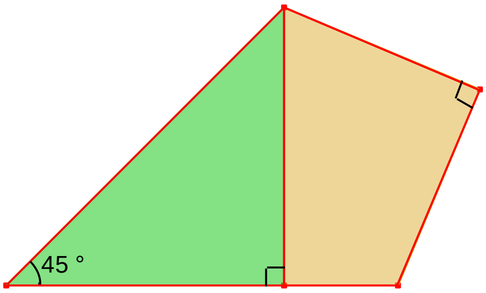
Solució:
Siga P la projecció de B sobre l'eix d'abscisses.
Siga $\alpha = \angle PCB$
$\overline{BP} = 2, \overline{PC} = 3$
$\tan \alpha = \dfrac{2}{3}$
$\angle BCA = 45°$
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOC}$
$\angle OCA = 45° + \alpha$

Siga $a = \overline{OA}$

$$\tan(45° + \alpha) = \frac{a}{4} = \frac{\tan 45° + \tan \alpha}{1 - \tan 45° \cdot \tan \alpha}$$
$$\frac{a}{4} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{2}{3}} = 5$$
Aleshores, $a = 20$

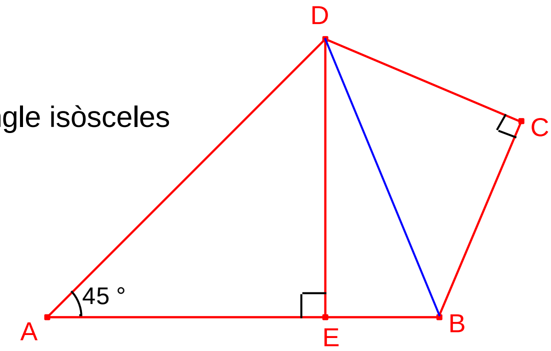


2406.- La figura és una cometa.
Determineu la proporció entre les dues àrees ombrejades del cometa.



cometa

Solució:
Siga $ABCD$ el cometa $\overline{AB} = \overline{AD}, \overline{BC} = \overline{CD}$
Siga E la projecció de D sobre $\overline{AB}$



Siga $\overline{AE} = \overline{DE} = x$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AED}$

$\overline{AD} = x\sqrt{2}$

$\overline{AB} = \overline{AD} = x\sqrt{2}$
Aleshores,
$\overline{EB} = x\left(\sqrt{2} - 1\right)$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BED}$

$$\overline{BD}^2 = x^2 + \left(x\left(\sqrt{2}\right) - 1\right)^2 = \left(4 - 2\sqrt{2}\right)x^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCD}$

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD}^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)x^2$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és:

$$S_{AED} = \frac{1}{2}x^2$$

L'àrea del quadrilàter $BCDE$ és:

$$S_{BCDE} = S_{EBD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)x^2 = \frac{1}{2}x^2$$

Aleshores, les dues àrees són iguals.

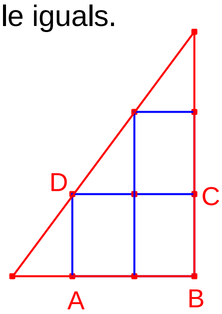
$$\frac{S_{AED}}{S_{BCDE}} = 1$$

2407.- La figura està dividida en 3 rectangles iguals i 3 triangle iguals.

$\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{AD}$

El perímetre de $ABCD$ és $100\ cm$

Calculeu l'àrea de la figura.

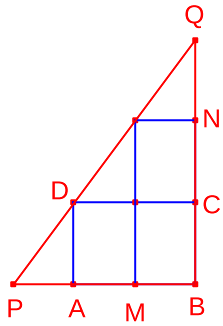


Solució.

El triangle exterior $\overset{\Delta}{PBQ}$ és rectangle.

Siga $\overline{AD} = 4x, \overline{AB} = 6x$

$\overline{PA} = \overline{AM} = 3x, \overline{NQ} = \overline{AD} = 4x$



El perímetre de $ABCD$ és $100\ cm$

$2(6x + 4x) = 100$

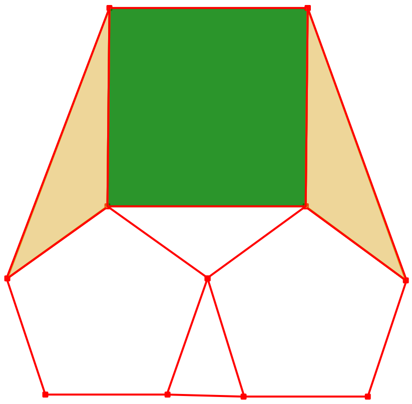
Aleshores, $x = 5$

$\overline{PB} = 9x = 45, \overline{BQ} = 12x = 60$

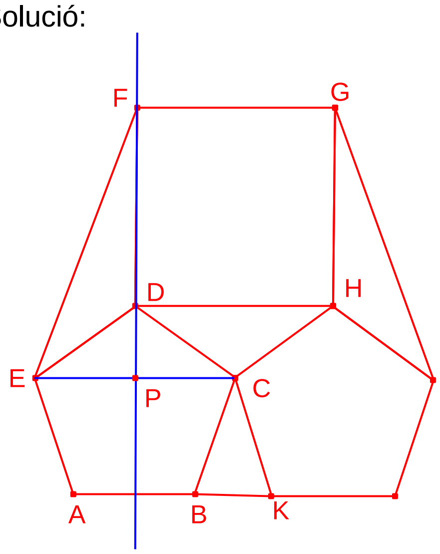
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBQ}$ és:

$S_{PBQ} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{BQ} = 135\ cm^2$

2408.- En la figura els dos pentàgons són iguals i les bases estan sobre una recta.
Determineu la proporció entre les àrees de la suma dels dos triangles ombrejats i la del quadrat ombrejat.



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$ de costat $\overline{AB} = 1$

$$\overline{EC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

L'angle interior del pentàgon regular és $\angle ABC = 108°$
$\angle CBK = \angle BKC = 180° - 108° = 72°$
Aleshores,
$\angle BCK = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$
$\angle DCH = 360° - (2 \cdot 108° + 36°) = 108°$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{DCH}$ són iguals (CAC)
Aleshores:

$$\overline{DH} = \overline{EC} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Siga P el punt mig de la diagonal $\overline{EC}$
Els punts P, D, F estan alineats.

$$\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{EC} = \frac{1}{2}\Phi$$

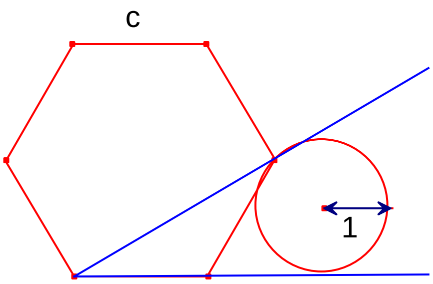
L'àrea del quadrat $DFGH$ és:
$S_{DFGH} = \Phi^2$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}\overline{DF} \cdot \overline{EP} = \frac{1}{2}\Phi \cdot \frac{1}{2}\Phi = \frac{1}{4}\Phi^2$$

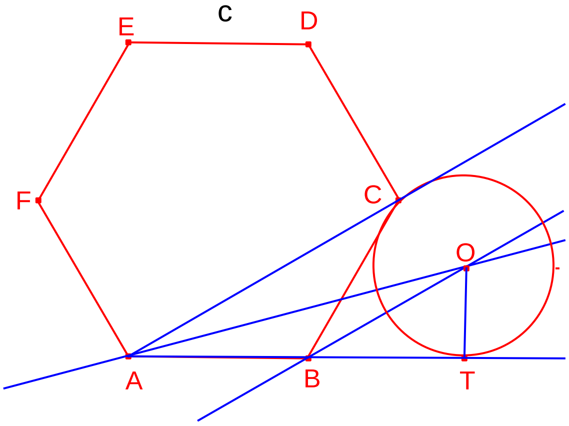
La proporció entre les àrees de la suma dels dos triangles ombrejats i la del quadrat ombrejat es:

$$\frac{S_{2T}}{S_Q} = \frac{2\frac{1}{4}\Phi^2}{\Phi^2} = \frac{1}{2}$$

2409.- En la figura la circumferència de radi 1 és tangent a dos costats i a una diagonal. Determineu la mesura del costat.



Solució:



Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AB} = c$
El centre O de la circumferència és la intersecció de les bisectrius dels angles $\angle CAB = 30°, \angle CBT = 60°$

$\angle OAB = 15°, \angle OBT = 30°$

$\overline{BT} = \sqrt{3}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$

$$\tan 15° = \frac{1}{c + \sqrt{3}}$$

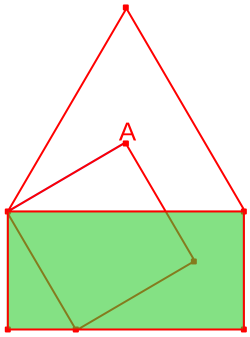
$$\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Igualant les expressions:

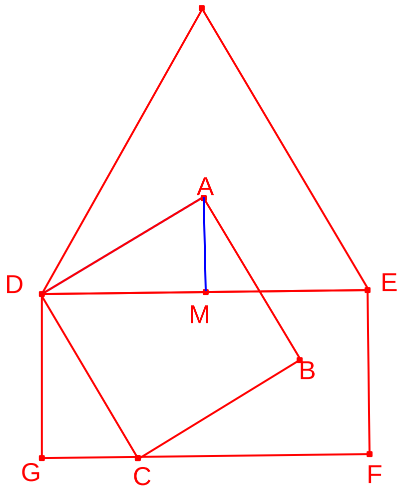
$$\frac{1}{c + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

Resolent l'equació $c = 2$

2410.- Siga A el centre del triangle equilàter.
Si l'àrea del quadrat és 12, calculeu l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
L'àrea del quadrat és 12, $c^2 = 2$
Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$ del triangle equilàter.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMD}, \overset{\Delta}{CGD}$

$$\overline{DG} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{DG} = c\sqrt{3}$$

L'àrea del rectangle $DEFG$ és:

$$S_{DEFG} = \overline{DE} \cdot \overline{DG} = c\sqrt{3} \cdot c\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}c^2 = 18$$