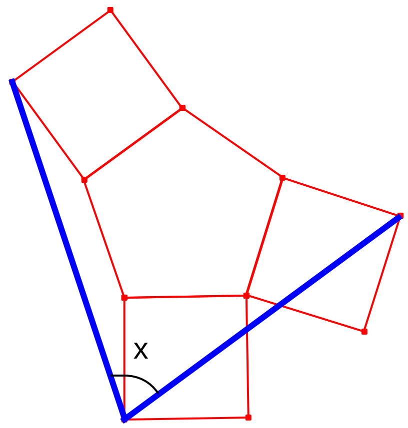
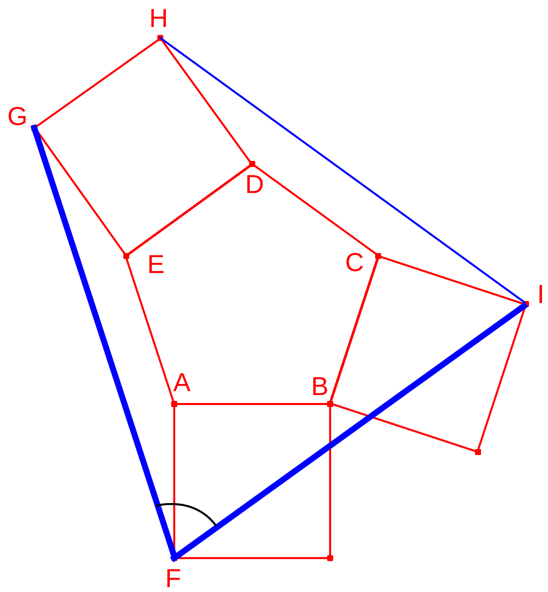
Problemes de Geometria per a l'ESO 242

2411.- En la figura, sobre un pentàgon regular s'han dibuixat 3 quadrats.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga $ABCDE$ el pentàgon regular.

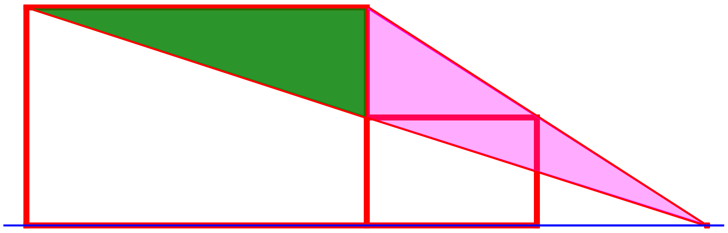
$FAEG$ és un trapezi isòsceles, ja que els triangles triangles $\overset{\Delta}{FAG}, \overset{\Delta}{GEF}$ són iguals (CCC)

$\angle FAE = \angle GEA = 360° - (90° + 108°) = 162°$
$\angle FGE = \angle AFF = 180° - \angle GEA = 180° - 162° = 18°$
$FIHG$ és un trapezi isòsceles.

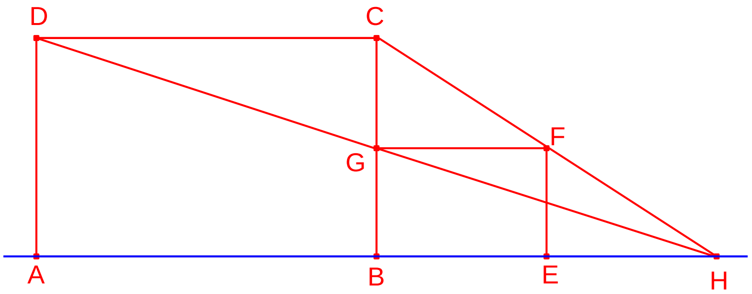
$\angle FGA = \angle FGE = 108°$

$x = \angle GFI = 180° - \angle GGA = 180° - 108° = 72°$

2412.- En la figura, els dos triangles ombrejats tenen àrea 10 cadascun d'ells. Calculeu la suma de les àrees dels dos rectangles.



Solució:



Considerem els rectangles $ABCD, BEFG$.
Siga $a = \overline{AB}, b = \overline{AD}$

Els triangles $\overset{\Delta}{CGD}, \overset{\Delta}{CGH}$ tenen la mateixa àrea i igual base $\overline{CG}$
Aleshores,
$\overline{AB} = \overline{BE}$

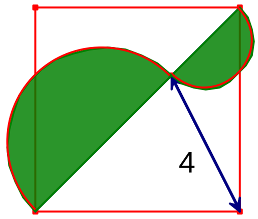
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAH}, \overset{\Delta}{GBH}$ són semblants i de raó 2:1
Aleshores,
$$\overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{AD}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CGF}, \overset{\Delta}{CBH}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores:
$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BH}$$
Els dos rectangle $ABCD, BEFG$. Són semblants i de raó 2:1.
Aleshores, $S_{BEFG} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{DCG} = 40$$

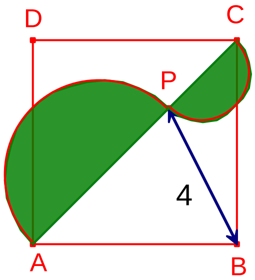
$$S_{ABCD} + S_{ABCD} = \frac{5}{4}S_{ABCD} = 50$$

2413.- Calculeu l’àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$

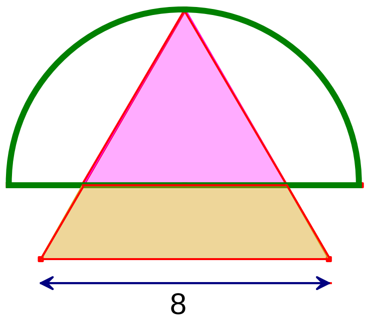


Siga P la intersecció de les dues semicircumferències.
Siga $\overline{AP} = x$ diàmetre d’un semicercle.
$\overline{CP} = a\sqrt{2} - x$

L’àrea de la zona ombrejada és:
$$S = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{a\sqrt{2} - x}{2}\right)^2\right)$$
Simplificant:
$$S = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - \sqrt{2}ax + a^2\right)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCP}$
$$4^2 = x^2 + a^2 - 2a \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
Simplificant:
$$x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 = 16$$
Aleshores,
$$S = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{a\sqrt{2} - x}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

2414.- En la figura, un triangle equilàter de costat 8 s'ha dividit en dos parts d'igual àrea.
Calculeu l'àrea del semicercle.



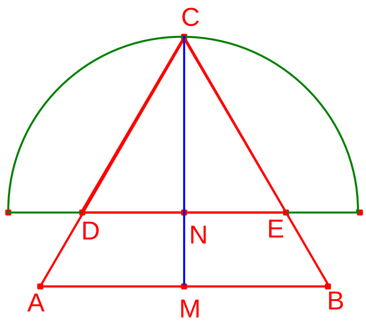
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 8$.

Siga el triangle equilàter superior $\overset{\Delta}{DEC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Siga N el punt mig del costat $\overline{DE}$



$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = 4\sqrt{3}$$

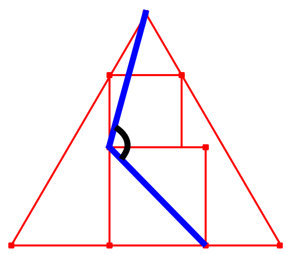
$$\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{\overline{CN}}{\overline{CM}}\right)^2$$

$$\overline{CN}^2 = \frac{1}{2}\overline{CM}^2 = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 24$$

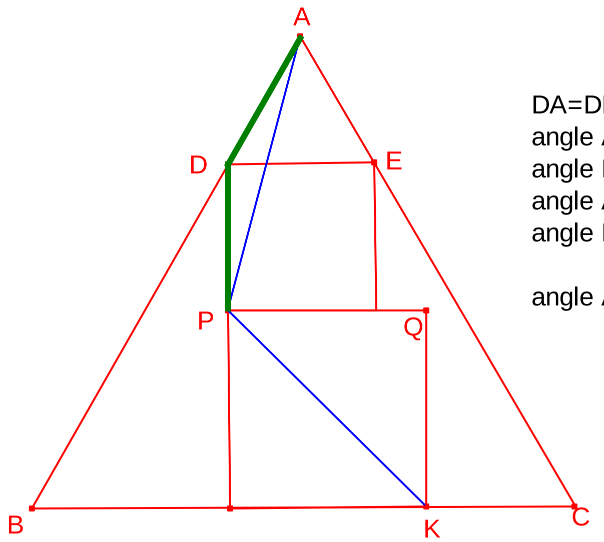
L'àrea del semicercle de radi CN és:

$$S = \frac{1}{2}\pi\overline{CN}^2 = 12\pi$$

2415.- En la figura, dins d'un triangle equilàter s'han dibuixat dos quadrats.
Calculeu l'angle desconegut de la figura.



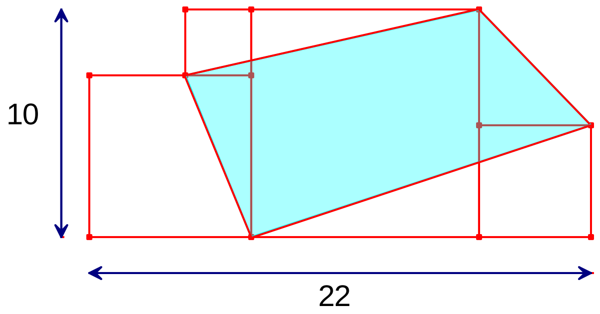
Solució:



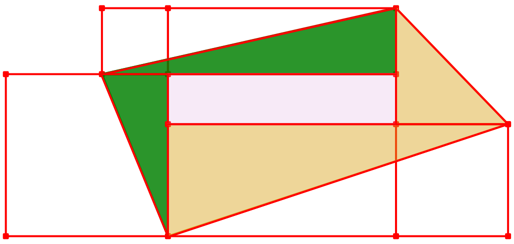
DA=DP
angle ADP=60º+90º=150º
angle DPA=15º
angle APQ=90º-15º=75º
angle PPK=45º

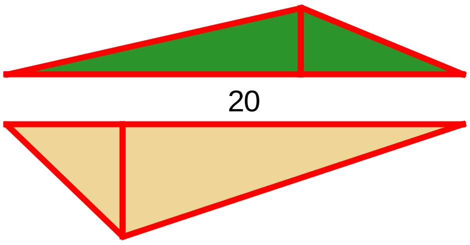
angle APK=75º+45º=120º

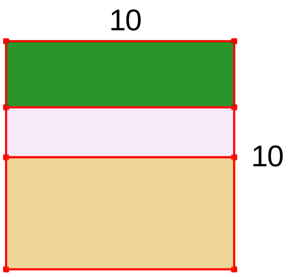
2416.- La figura consta de 4 quadrats.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució
Dividim el quadrilàter en 4 triangles rectangles i un rectangle.







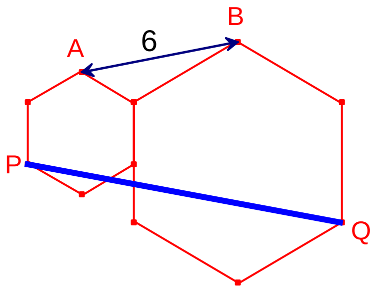
Els triangles verds tenen la mateixa altura (costat quadrat de dalt) i la suma de les bases és 20.
Aleshores, la suma dels triangles verds és igual a l'àrea d'un rectangle de base 10 i altura el costat del quadrat de dalt

Els triangles ocres tenen la mateixa altura (costat quadrat de la dreta) i la suma de les bases és 20.
Aleshores, la suma dels triangles ocres és igual a l'àrea d'un rectangle de base 10 i altura el costat del quadrat de la dreta.

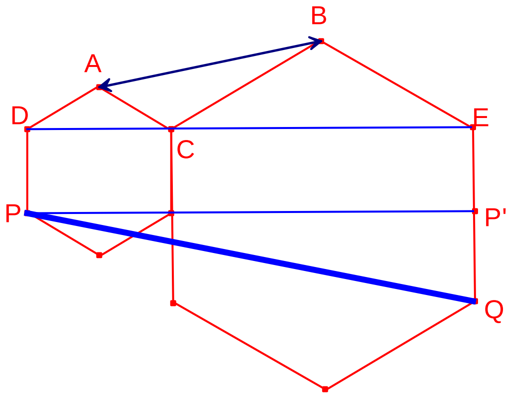
La suma dels tres rectangles és igual a l'àrea del quadrat de costat 10.

Aleshores, l'àrea del quadrilàter és 100

2417.- En la figura hi ha dos hexàgons regulars.
Si $\overline{AB} = 6$ calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$



Solució:
Siga C el vèrtex comú als dos hexàgons regulars.
Els vèrtexs D, C, E estan alineats.



Siga $\dot{A}C = a, \overline{BC} = b$ costats dels dos hexàgons.
$\angle ACB = 120°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$36 = a^2 + b^2 + ab$

$\overline{CD} = a\sqrt{3}, \overline{CE} = b\sqrt{3}$

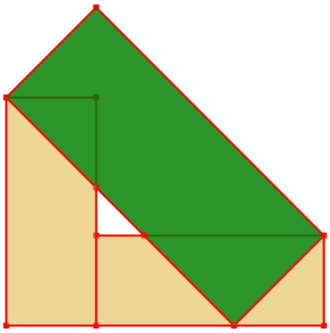
Siga P' la projecció de P sobre el costat $\overline{EQ}$
$\overline{PP'} = \overline{CD} + \overline{CE} = (a+b)\sqrt{3}$
$\overline{P'Q} = |b-a|$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PP'Q}$

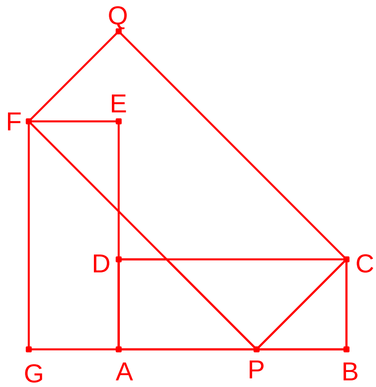
$\overline{PQ}^2 = \left((a+b)\sqrt{3}\right)^2 + |b-a|^2 = 4(a^2 + b^2 + ab) = 4 \cdot 36 = 144$

Aleshores, $\overline{PQ} = 12$

2418.- En la figura hi ha dos rectangles iguals d'àrea 12.
Calculeu l'àrea del rectangle gran.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = a, \overline{AD} = b$
Siga $PCQF$ el rectangle gran,
Siga $\overline{AP} = x$

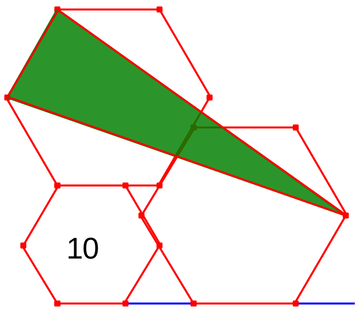


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CBP}, \overset{\Delta}{PGF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{a+x}{b} = \frac{a}{b-x} = \frac{x}{x} = 1$$

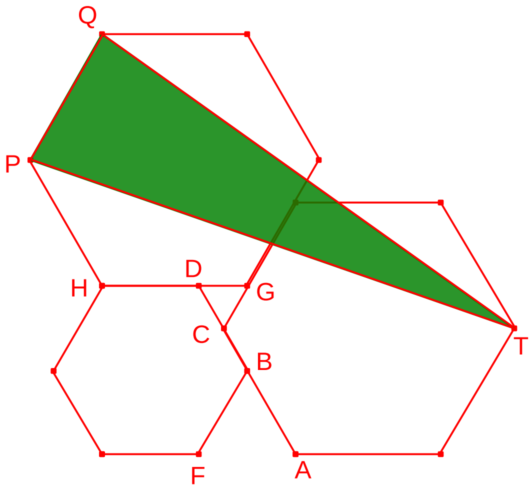
Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CBP}, \overset{\Delta}{PGF}$ són isòsceles:
$\overline{PF} = a\sqrt{2}, \overline{PC} = b\sqrt{2}$

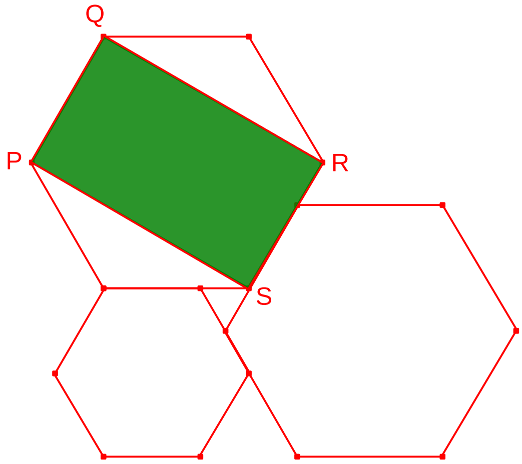
$S_{PVQF} = \overline{PF} \cdot \overline{PC} = a\sqrt{2} \cdot b\sqrt{2} = 2ab = 2 \cdot 12 = 24$

2419.- En la figura hi ha dos hexàgons iguals i un tercer hexàgon d'àrea 10.
Determineu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:





Siga S_G àrea de l'hexàgon gran.
Siga $S_m = 10$ àrea de l'hexàgon menor.

$$\frac{S_G}{S_m} = \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2$$

$$S_G = 10\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2$$

$$\overline{AD} = 2\cdot\overline{AB}, \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD} - \overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2\cdot\overline{AB} - \overline{AC} + \overline{AB}}{\overline{AB}} = 3 - \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Aleshores,

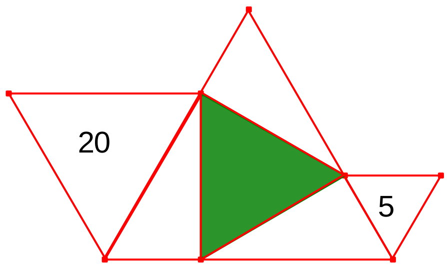
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{2}$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és igual a l'àrea del rectangle $PQRS$.
L'àrea del rectangle $PQRS$ és igual a dues terceres parts de l'hexàgon gran.

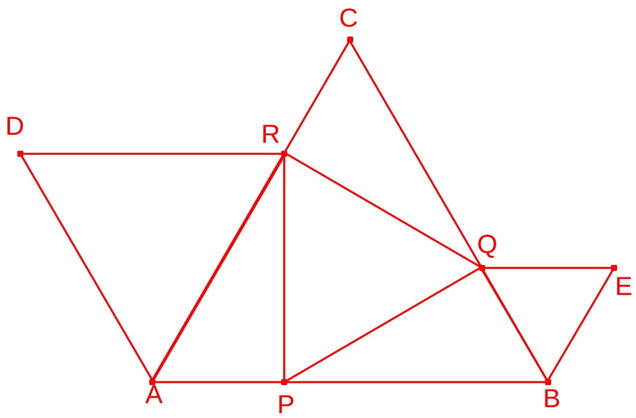
$$S_{PQT} = S_{PQRS} = \frac{2}{3}S_G$$

$$S_{PQT} = \frac{2}{3}S_G = \frac{2}{3}\cdot 10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15$$

2420.- A la figura hi ha 4 triangles equilàters.
Dos d’àrees 20 i 5.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:



$\angle RQC = \angle PRA = \angle QPB$
$\angle RCQ = \angle PAR = \angle QBP = 60°$

Aleshores, els triangles $R\overset{\Delta}{Q}C, P\overset{\Delta}{R}A, Q\overset{\Delta}{B}P$ són iguals.

$$\frac{S_{ADR}}{S_{BEQ}} = \left(\frac{\overline{AR}}{\overline{BQ}}\right)^2 = \frac{20}{5}$$
$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BQ}} = 2$$

Aleshores, els triangles $R\overset{\Delta}{Q}C, P\overset{\Delta}{R}A, Q\overset{\Delta}{B}P$ són iguals i rectangles

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ARD}} = \left(\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$S_{PQR} = \frac{3}{4} S_{ARD} = 15$$