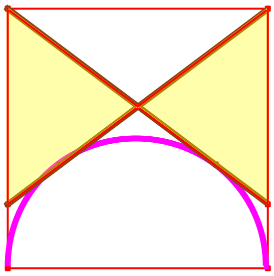
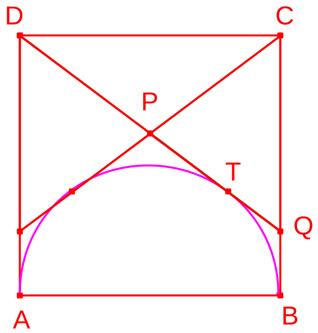
Problemes de Geometria per a l'ESO 243

2421.- En la figura dos segments són tangent a la semicircumferència.
Determineu la proporció de les àrees de la zona ombrejada i el quadrat exterior.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = 1$
Siga T el punt de tangència del segment $\overline{DQ}$ i la semicircumferència.
$\overline{DT} = \overline{DA} = 1$



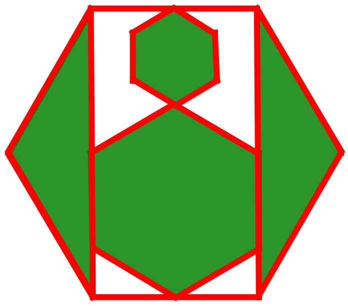
Siga P la intersecció dels dos segments tangents a la semicircumferència.

Siga $\overline{CQ} = s$
L'àrea ombrejada és:
$S = \frac{1}{2}x$

$\overline{QT} = \overline{QB} = 1 - x$
$\overline{DQ} = \overline{DT} + \overline{QT} = 2 - x$

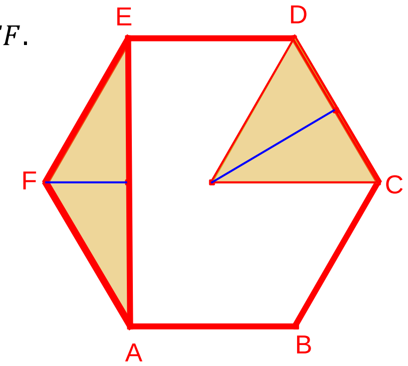
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QCD}$:
$(2 - x)^2 = 1 + x^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{3}{4}$
L'àrea ombrejada és:
$S = \frac{1}{2}x = \frac{3}{8}$
L'àrea del quadrat $ABCD$ és 1
$\frac{S}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$

2422.- A la figura hi ha 3 hexàgons regulars. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon gran.



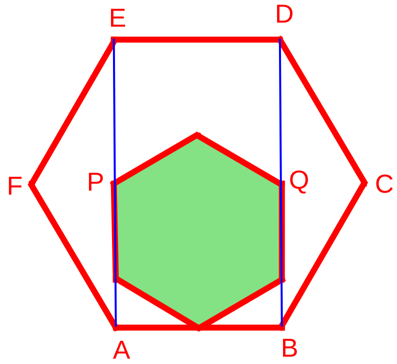
Solució:

Siga S_G l'àrea de l'hexàgon regular gran $ABCDEF$.



$$S_{AEF} = \frac{1}{6} S_G$$

Siga S_M l'àrea de l'hexàgon mitjà.



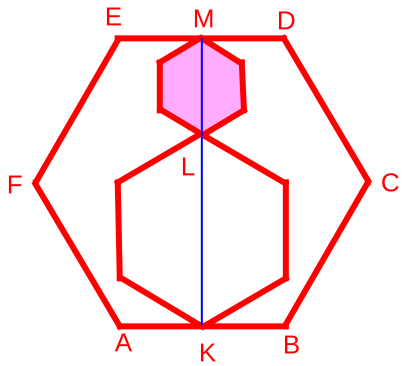
$$\frac{S_M}{S_G} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AE}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Aleshores,

$$S_M = \frac{1}{3} S_G$$

Siga S_P l'àrea de l'hexàgon petit.

Siguen c_G, c_M, c_p els costats dels hexàgons gran, mitja i petit, respectivament.



$$\overline{KM} = 2c_P + 2c_M = c_G\sqrt{3}$$

$$\frac{c_P}{c_G} + \frac{c_M}{c_G} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{c_P}{c_G} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aleshores,

$$\frac{c_P}{c_G} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{S_P}{S_G} = \left(\frac{c_P}{c_G}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$S_P = \frac{1}{12} S_G$$

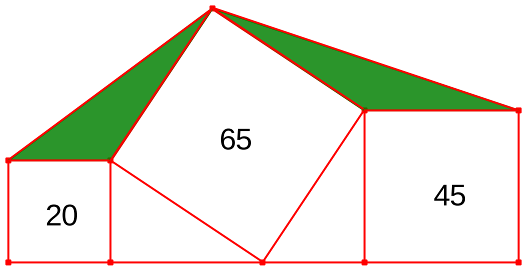
L'àrea ombrejada és

$$S_o = 2 \cdot S_{AEF} + S_M + S_P = \left(2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) S_G = \frac{3}{4} S_G$$

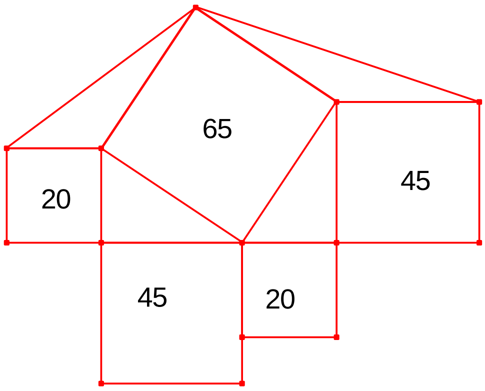
Aleshores:

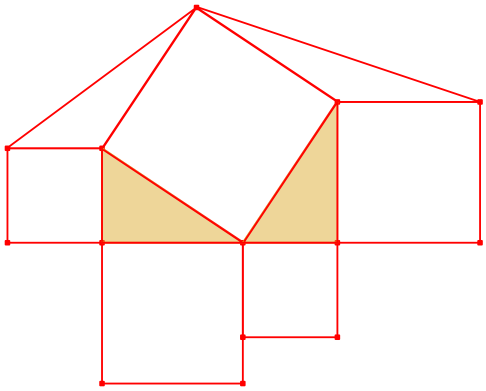
$$\frac{S_o}{S_G} = \frac{3}{4}$$

2423.- En la figura s'han dibuixat tres quadrat d'àrees conegudes 20, 65 i 45. Determineu l'àrea de la zona ombrejada..



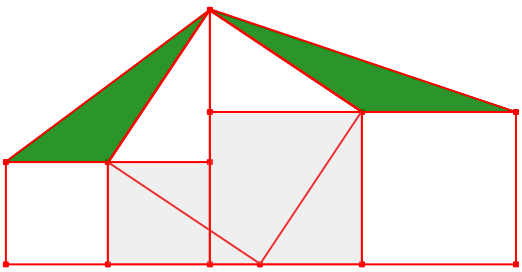
Solució:

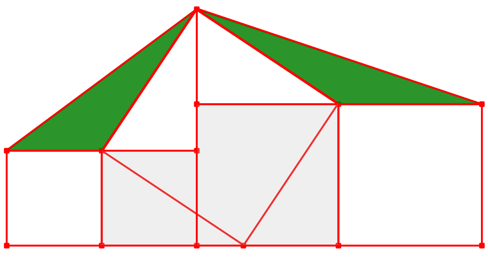


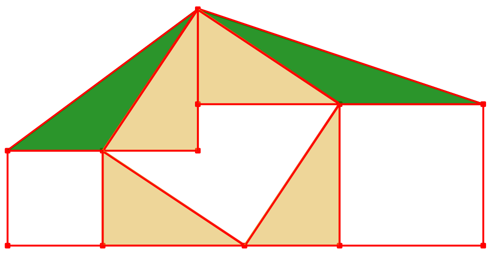


Els dos triangles ombrejats d'ocre són iguals, tenen la mateixa àrea.

Dibuxem dos quadrats d'àrees 20 i 45





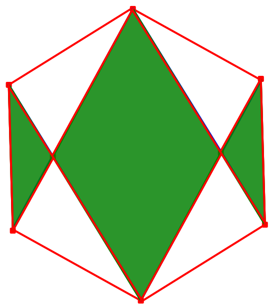


Notem que els triangles verds tenen igual àrea que tots els ocres que són iguals.

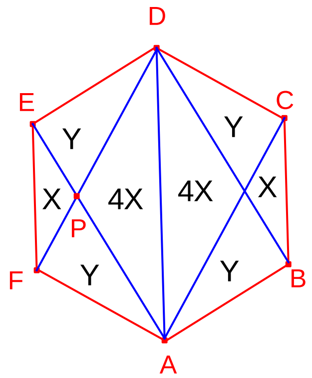
La suma de les àrees cercades és igual a l'àrea d'un rectangle de costats $\sqrt{20}, \sqrt{45}$

$S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 30$

2424.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució 1:
Siga S l'àrea de l'hexàgon regular.$ABCDEF$.



Siguen $X = S_{EFP}, Y = S_{DEP}$
Els triangles $\overset{\Delta}{EFP}, \overset{\Delta}{ADP}$ són semblants i de raó 1:2
Aleshores, $S_{ADP} = 4S_{EFP} = 4X$

$10X + 4Y = S$

$S_{DEF} = \frac{1}{6}S$

$X + Y = \frac{1}{6}S$

Considerem el sistema:

$\begin{cases} 10X + 4Y = S \\ X + Y = \frac{1}{6}S \end{cases}, \quad \begin{cases} 10X + 4Y = S \\ 4X + 4Y = \frac{2}{3}S \end{cases}$

Restant ambdues expressions:

$6X = \frac{1}{3}S$

$X = \frac{1}{18}S$

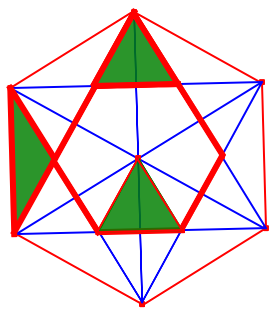
L'àrea ombrejada és:

$S_o = 10X = \frac{5}{9}S$

Aleshores:

$\frac{S_o}{S} = \frac{5}{9}$

Solució 2:
Siga S l'àrea de l'hexàgon exterior.
Siga S_o l'àrea ombrejada.
Els triangles dibuixats tenen igual àrea.. Siga T la seua àrea
L'àrea de l'hexàgon regular exterior



$S = 18\,T$

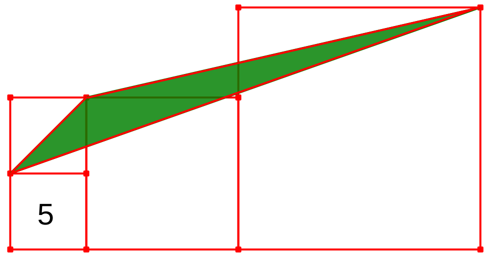
L'àrea ombrejada és:

$S_o = 10T$

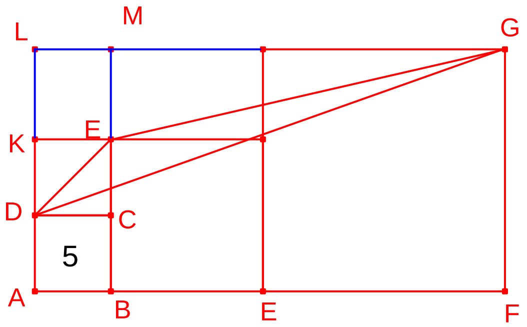
Aleshores:

$$\frac{S_o}{S} = \frac{5}{9}$$

2425.- L'àrea del quadrat menut de l'esquerra és 5.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

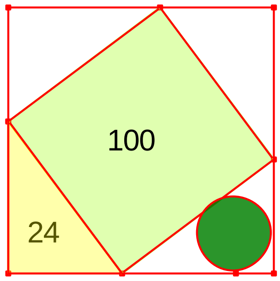


Siga $x = \overline{AB}$ costat del quadrat $ABCD$.
$x^2 = 5$
Aleshores, $\overline{BE} = 2x$

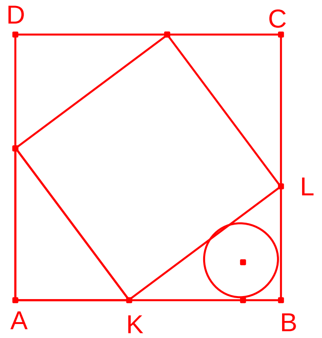
Siga $c = \overline{EF} = c$ costat del quadrat de la dreta.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEG}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DLG}$ menys la suma de les àrees de $\overset{\Delta}{DKE}, KEML, \overset{\Delta}{EGM}$

$$S_{DEG} = \frac{1}{2}(c+3x)(c-x) - \left(\frac{1}{2}\cdot 5 + x(c-2x) + \frac{1}{2}(c+2x)(c-2x)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(-5+5x^2) = 10$$

2426.- En la figura, s'ha inscrit en un quadrat un quadrat d'àrea 100.
El triangle ombrejat té àrea 24.
Calcula l'àrea del cercle inscrit ombrejat.



Solució:



Siga el quadrat exterior ABCD.
Els quatre triangles rectangles exteriors al quadrat d'àrea 100 són iguals.
Siga $\overline{KB} = a, \overline{BL} = \overline{AK} = b$

$\overline{KL} = \sqrt{100} = 10$

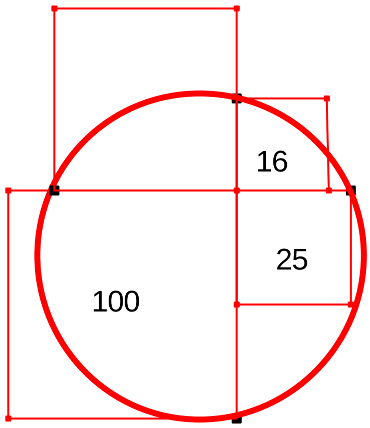
Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBL}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBL}$ és:
$S_{KBL} = \frac{1}{2}ab = \frac{a+b+10}{2}r = 24$

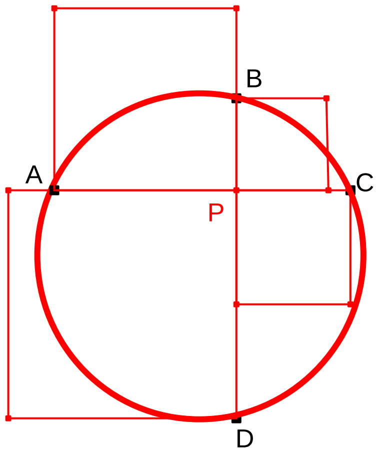
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 10^2 + 4 \cdot 24 = 196$
Aleshores,
$a + b = 14$

$\frac{14+10}{2}r = 24$
Resolent l'equació:
$r = 2$
L'àrea del cercle és:
$S = \pi \cdot r^2 = 4\pi$

2427.- A la figura, hi ha quatre quadrats, dels quals coneguem tres àrees 100, 25, 16.
Determineu l'àrea del cercle que passa per quatre vèrtexs assenyalats (un de cada quadrat).



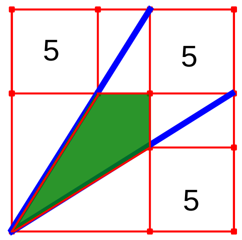
Solució:
Siguen A, B, C, D els quatre punts per on passa la circumferència.
Siga P el punt comú als quatre quadrats.
$\overline{PB} = 4, \overline{PC} = 5, \overline{PD} = 10$
Aplicant la potència del punt P respecte de la circumferència:
$\overline{AP} \cdot \overline{CP} = \overline{BP} \cdot \overline{DP}$
$\overline{AP} \cdot 5 = 4 \cdot 10$
Aleshores,
$\overline{AP} = 8$



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{PB} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{4R}$$
Simplificant:
$$\overline{PB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2R}$$
$$4 = \frac{\sqrt{80}\sqrt{41}}{2R}$$
$$R = \frac{\sqrt{205}}{2}$$
L'àrea del cercle és:
$$S = \pi R^2 = \frac{205}{4}\pi$$

2428.- En la figura hi ha tres quadrats iguals d'àrea 5, dins d'un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ombrejat.



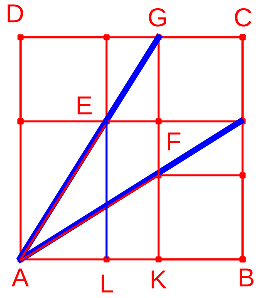
Solució 1:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{ALE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EL}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{FG}+\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}+1}{\frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = 2\overline{EF}\cdot\overline{EL} = 2\cdot\frac{\widetilde{FG}}{\Phi}\cdot\Phi\overline{FG} = \overline{FG}^2 = 5$$

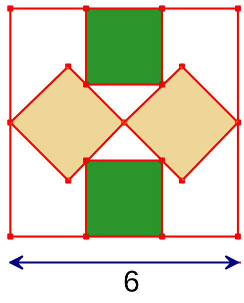


Solució 2:
Siga $\overline{EF} = d$
$\overline{CG} = \overline{FG} = \sqrt{5}$

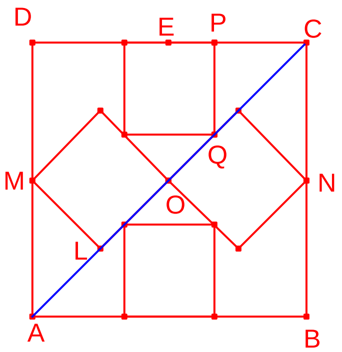
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EFA}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{GCA}$ menys la suma de les àrea dels triangles $\overset{\Delta}{EFG}, \overset{\Delta}{GCF}$
L'àrea ombrejada és:

$$S = 2(S_{EFA}) = 2(S_{GCA} - S_{EFG} - S_{GCF}) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\left(d+2\sqrt{5}\right) - \frac{1}{2}5 - \frac{1}{2}d\sqrt{5}\right) = 5$$

3429.- Calculeu la suma dels quadrats ombrejats que són iguals dos a dos



Solució:

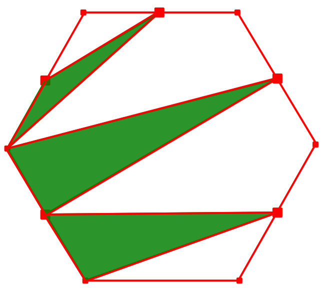


Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = 6$
Siga O el centre del quadrat $ABCD$.
Siguen M, N, E els punts migs dels costats $\overline{AD}, \overline{BC}, \overline{CD}$, respectivament.
$\overline{OM} = 3$, diagonals dels quadrats de vèrtex comú O.
L'àrea del quadrat de costat $\overline{ML}$ és:
$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{OM}^2 = \frac{9}{2}$$

El quadrat de costat $\overline{PQ}$ està inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{CDO}$
Siga $\overline{PQ} = c$ costat del quadrat.
$$\overline{CP} = c, \overline{PE} = \frac{1}{2}c, \overline{CE} = 3$$
Aleshores,
$$c + \frac{1}{2}c = 3$$
Aleshores, $c = 2$
L'àrea del quadrat de costat $\overline{PQ}$ és:
$$S_2 = c^2 = 4$$

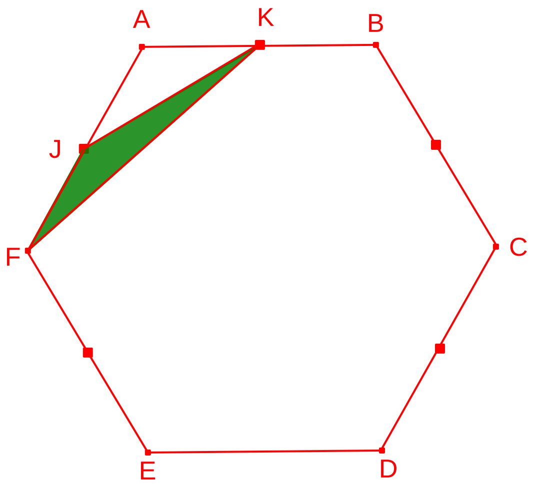
La suma de les àrees dels quadrats és:
$$S = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 = 2 \cdot \frac{9}{2} + 2 \cdot 4 = 17$$

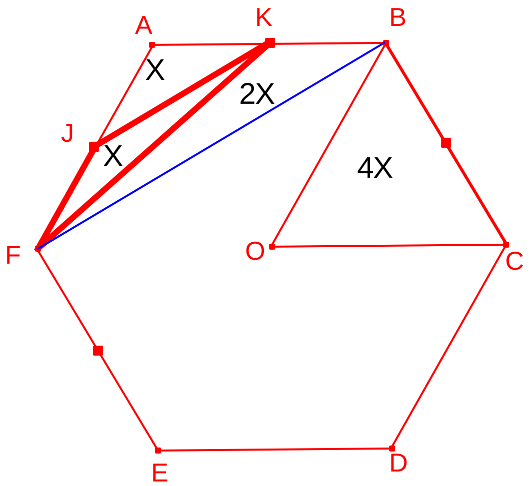
2430.- Quina és la proporció entre les àrees de la zona ombrejada i la de l'hexàgon regular.



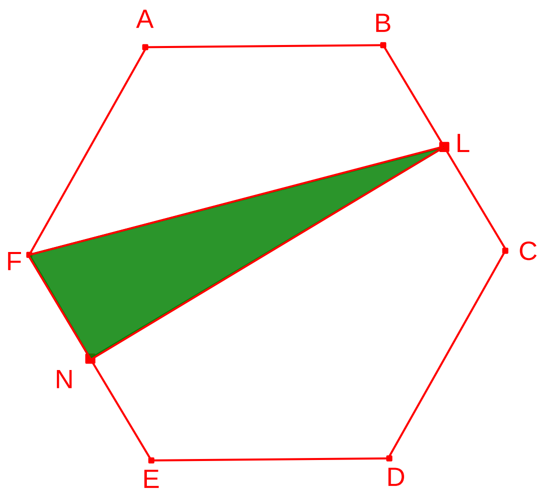
Solució:

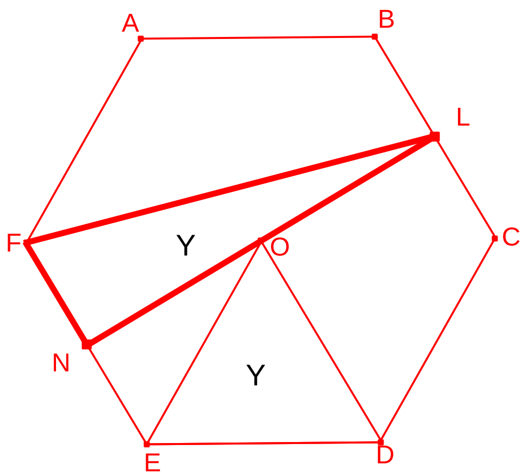
Siga S l'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$



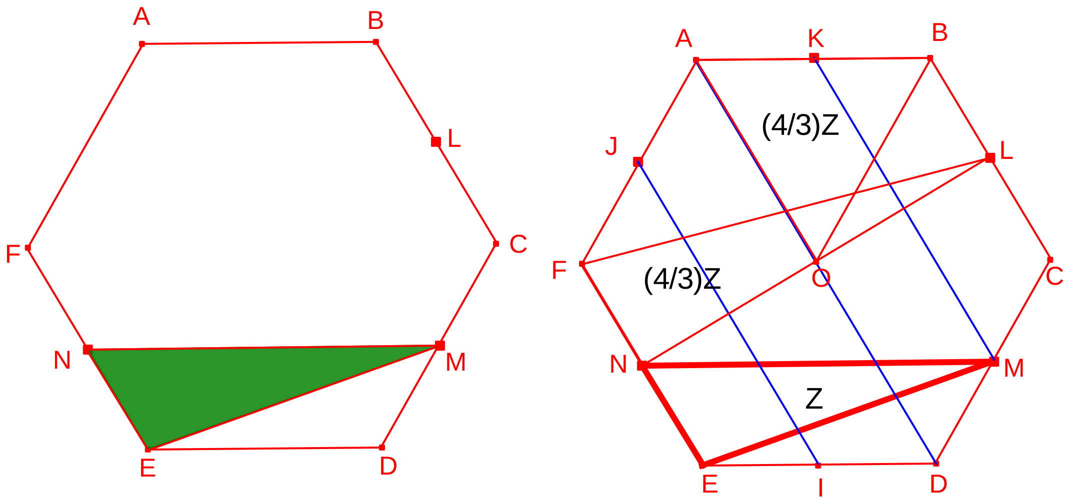


$$S_{FJK} = X = \frac{1}{4}S_{BCO} = \frac{1}{4}\frac{1}{6}S = \frac{1}{24}S$$





$$S_{FNL} = Y = S_{EDO} = \frac{1}{6}S$$



$$S_{EMN} = Z = \frac{3}{4} S_{FNL} = \frac{3}{4}\frac{1}{6} S = \frac{1}{8} S$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombreja} = S_{FJK} + S_{FNL} + S_{EMN} = \frac{1}{24} S + \frac{1}{6} S + \frac{1}{8} S = \frac{1}{3} S$$