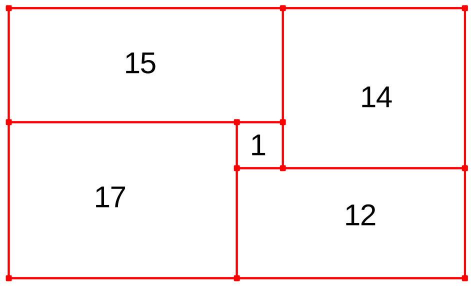
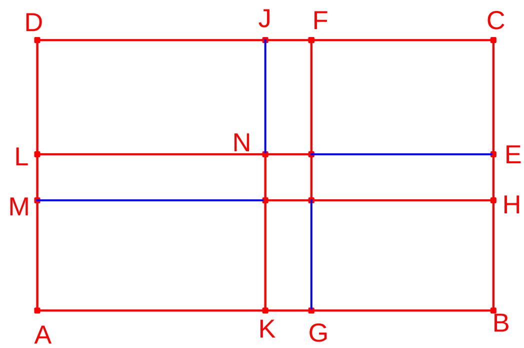


2431.- La figura està formada per quatre rectangles d'àrees $12, 14, 15, 17$ i un quadrat d'àrea 1.

Calculeu les dimensions del rectangle exterior.



Solució:
$\overline{HE} = \overline{FJ} = \overline{LM} = \overline{KG} = 1$

Siga $a = \overline{CE}$
$\overline{CF} = \overline{BG} = \dfrac{14}{1+a}$

$\overline{BK} = 1 + \dfrac{14}{1+a} = \dfrac{15+a}{1+a}$
$\overline{BH} = \overline{AM} = \dfrac{12}{\frac{15+a}{1+a}} = \dfrac{12+12a}{15+a}$

$\overline{AL} = 1 + \dfrac{12+12a}{15+a} = \dfrac{27+13a}{15+a}$

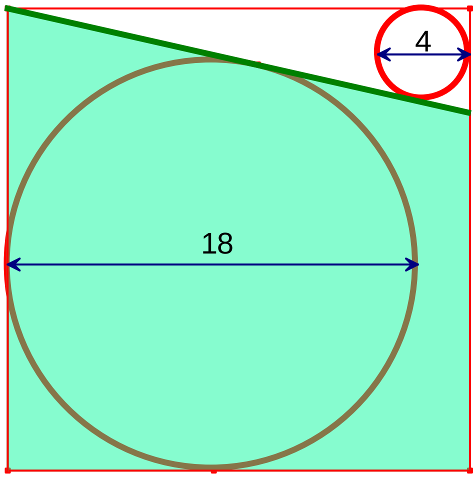
$\overline{AK} = \overline{DJ} = \dfrac{17}{\frac{27+13a}{15+a}} = \dfrac{255+17a}{27+13a}$

$\overline{DF} = 1 + \dfrac{255+17a}{27+13a} = \dfrac{282+30a}{27+13a}$

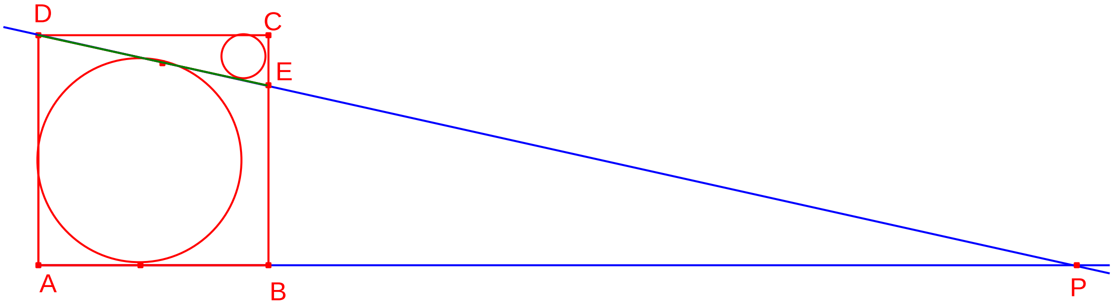
L'àrea del rectangle LNJD és 15:
$a\left(\dfrac{282+30a}{27+13a}\right) = 15$
Simplificant:
$10a^2 + 29a - 135 = 0$
Resolent l'equació:
$a = \dfrac{5}{2}$
$\overline{AB} = \dfrac{14}{1+a} + 1 + \dfrac{255+17a}{27+13a} = 4 + 1 + 5 = 10$
$\overline{BC} = a + 1 + \dfrac{12+12a}{15+a} = \dfrac{5}{2} + 1 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{59}{10}$

Notem que l'àrea és:
$S_{ABCD} = 10 \cdot \dfrac{59}{10} = 12 + 14 + 15 + 17 + 1 = 59$

2432.- Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter ombrejat i el quadrat exterior.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga $x = \overline{CE}$
La recta DE talla el costat AB en el punt P.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCE}, \overset{\Delta}{PAD}$ són semblants i de raó 4:18
Aplicant el teorema de tales:

$$\frac{x}{c} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

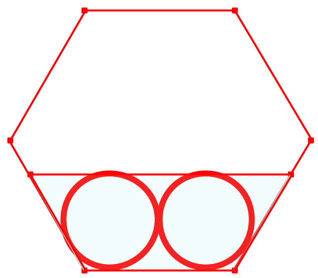
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DCE}$ és:

$$S_{DCE} = \frac{1}{2}xc = \frac{1}{9}c^2$$

La proporció d'àrees entre el quadrilàter $ABED$ i el quadrat $ABCD$ és:

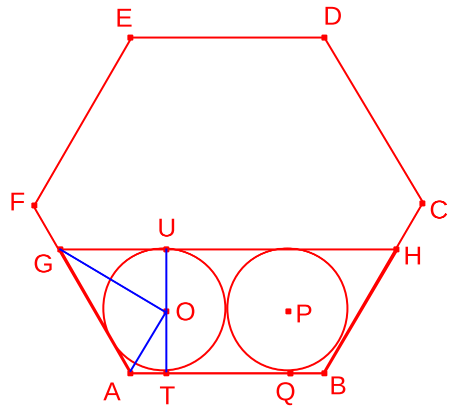
$$\frac{S_{ABED}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{DCE}}{S_{ABCD}} = \frac{c^2 - \frac{1}{9}c^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

2433.- En la figura, dins d'un hexàgon regular s'han dibuixat dues circumferències tangents i iguals i a la vegada cadascuna tangent a dos costats.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter ombrejat i l'hexàgon.



Solució:
Siga $ABCDEF$ l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$
L'àrea de l'hexàgon regular és igual a l'àrea de sis triangles equilàters de costat $\overline{AB} = c$

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} c^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2$$



Siga $r = \overline{OT}$ radi de les circumferències.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATO}$

$$\overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{3} r$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AT} + 2r = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r = c$$

Aleshores,

$$r = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} c$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GUO}$

$$\overline{GU} = \sqrt{3} r$$

$$\overline{GH} = 2\overline{GU} + 2r = 2\left(1 + \sqrt{3}\right) r$$

L'àrea del trapezi $ABHG$ és:

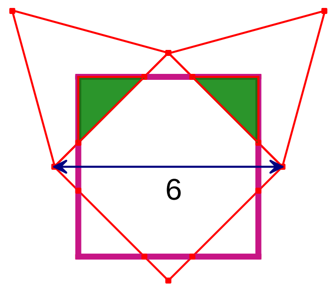
$$S_{ABHG} = \frac{\overline{AB} + \overline{GH}}{2} \cdot 2r = \frac{2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r + 2\left(1 + \sqrt{3}\right) r}{2} 2r = 4 + \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot r^2$$

$$S_{ABHG} = \left(4 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right)^2 c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2$$

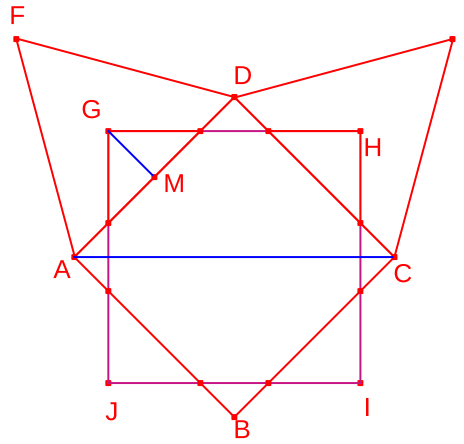
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABHG}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} c^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} c^2} = \frac{1}{3}$$

2434.- Sobre l'exterior de dos costats d'un quadrat de diagonal 6, s'ha dibuixat dos triangles equilàters. Amb vèrtexs els baricentres d'aquests dos triangles s'ha dibuixat un quadrat.
Determineu l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de diagonal $\overline{AC} = 6$



El costat del quadrat mesura:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}6 = 3\sqrt{2}$$

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$

Siga G el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADF}$

$$\overline{FM} = \frac{\sqrt{3}}{2}3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

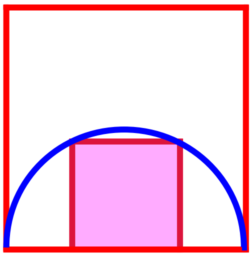
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

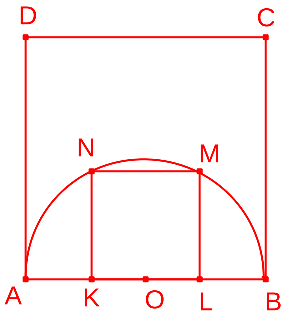
L'àrea ombrejada és:

$$S = 2 \cdot \overline{GM}^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 3$$

2435.- Determineu la proporció entre les àrees del quadrat inscrit en el semicercle i el quadrat exterior.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat exterior.
Siga $KLMN$ el quadrat inscrit en el semicercle.
Siga O el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre de la semicircumferència.
Siga $c = \overline{KL}$ costat del quadrat $KLMN$.
Siga $r = \overline{OA} = \overline{ON}$ radi de la semicircumferència.



$\overline{OK} = \frac{1}{2}c, \overline{AB} = 2r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$:

$c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 = r^2$

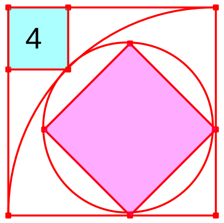
Simplificant:

$4r^2 = 5c^2$

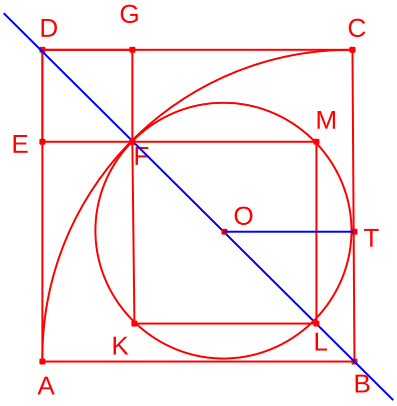
La proporció entre les àrees dels quadrats és:

$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{c^2}{4r^2} = \frac{c^2}{5c^2} = \frac{1}{5}$

2436.- En la figura el quadrat menut té àrea 4. Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:



Siga $ABCD$ el quadrat exterior de costat $c = \overline{AB}$
Siga $DEFG$ el quadrat d'àrea 4, $\overline{DE} = 2, \overline{DF} = 2\sqrt{2}$

Siga $\overline{OF} = r$ el radi de la circumferència tangent al quadrant de centre B i radi $\overline{AB} = c$

L'àrea del quadrat ombrejat és igual a l'àrea del quadrat $FLMN$.
$S_{KLMN} = 2r^2$

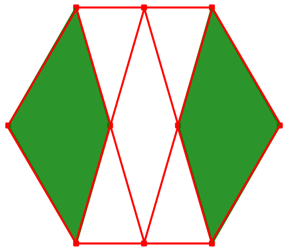
$\overline{BD} = c\sqrt{2} = c + \overline{DF} = c + 2\sqrt{2}$
$$c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2\left(2+\sqrt{2}\right)$$

$\overline{BT} = \overline{OT} = r$
$\overline{OB} = r\sqrt{2}$

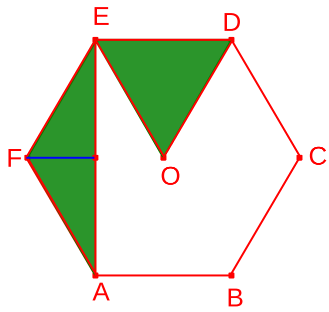
$\overline{BF} = c = \overline{OF} + \overline{OB} = \left(1+\sqrt{2}\right)r$
$r = \left(\sqrt{2}-1\right)c$

$S_{KLMN} = 2r^2 = 2\left(3-2\sqrt{2}\right)c^2 = 2\left(3-2\sqrt{2}\right)4\left(6+4\sqrt{2}\right) = 16$

2437.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga S l'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O.

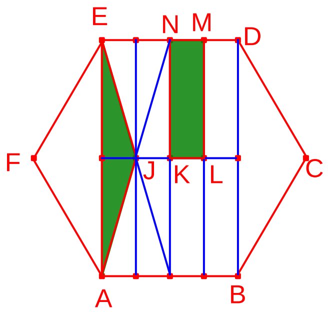


L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és igual a l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEO}$
Aleshores,

$$S_{AEF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S$$

L'àrea del rectangle ABDE és:

$$S_{ABDE} = \frac{2}{3}S$$



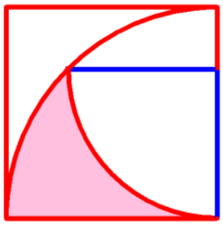
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AJE}$ és igual a l'àrea del rectangle $KLMN$.
L'àrea del rectangle $KLMN$ és igual a la vuitena part del rectangle $ABDE$.
Aleshores,

$$S_{AJE} = S_{KLMN} = \frac{1}{8}S_{ABDE} = \frac{1}{8}\frac{2}{3}S = \frac{1}{12}S$$

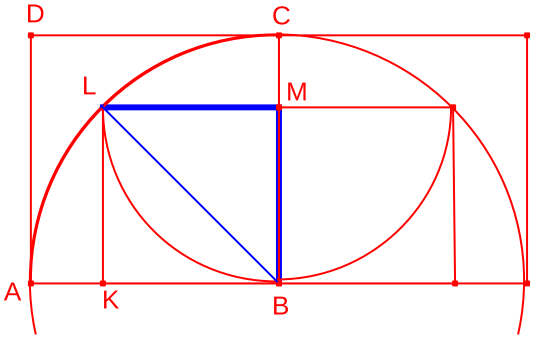
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{AEF} + 2 \cdot S_{AJE} = 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

2438.- Dos quadrants de circumferència estan inscrits en un quadrat.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i la del quadrat.



Solució:



Siag el quadrat exterior $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c.$, radi del quadrant més gran.
Siga M el centre del quadrant menor de radi $\overline{BM}$

$$\overline{BM} = \overline{ML} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\angle ABJ = 45°$$

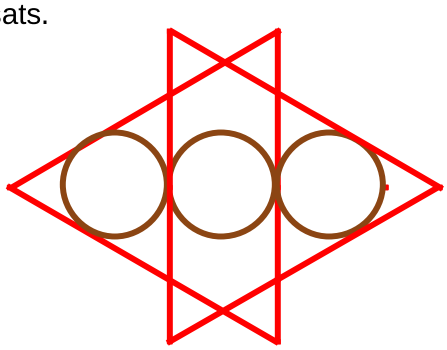
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un sector circular de radi $\overline{AB} = c$ d'angle $\angle ABJ = 45°$ menys l'àrea d'un segment circular de radi $\overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ d'angle $\angle BML = 90°$

$$S = \frac{1}{8}\pi c^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2\right) = \frac{1}{4}c^2$$

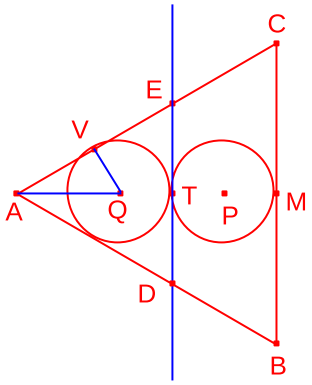
Aleshores, la proporció entre les àrees és:

$$\frac{S}{ABCD} = \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

2439.- En la figura, dos triangles equilàter estan sobreposats.
Cadascun dels triangles equilàters té àrea 100.
Les tres circumferències són iguals.
Calculeu l'àrea total de la figura.



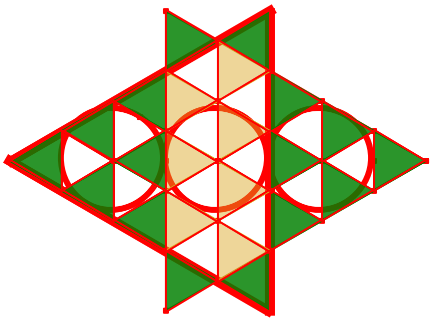
Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de l'esquerra.
El triangle equilàter de la dreta tall el de l'esquerra en els punts D, E.
Siga r el radi de les tres circumferències.

$\overline{AM} = 5r, \overline{AT} = 3r$

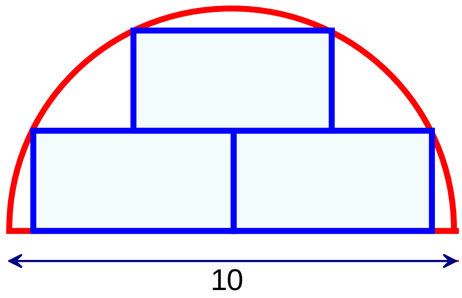
Podem dividir cada costat del triangle en cinc parts iguals.
La figura es pot dividir amb triangles equilàters de costat la cinquena part del costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

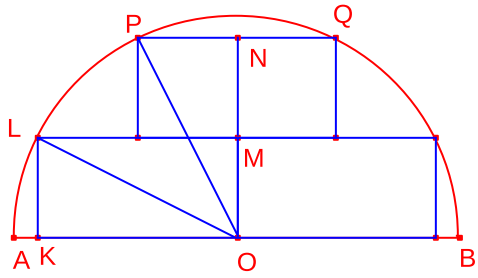


El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ conté:
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ triangles.
Aleshores,
Cadascun dels triangles menuts mesura:
$\frac{100}{25} = 4$

La figura conté:
$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + (1 + 3 + 5) + 2 = 36$
L'àrea de la figura és:
$S = 36 \cdot 4 = 144$

2440.- En una circumferència de diàmetre 10
s'han inscrit 3 rectangles iguals.
Calculeu la suma de les àrees dels tres triangles.





Solució:
Siga el diàmetre $\overline{AB} = 10$
Siga $\overline{OK} = a, \overline{OM} = b$ costats dels rectangle, $KLMO$.
Siga N el punt mig del costat $\overline{PQ}$
$\overline{PN} = \frac{1}{2}a, \overline{ON} = 2b$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LKO}$
$a^2 + b^2 = 5^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNO}$
$\frac{1}{4}a^2 + 4b^2 = 5^2$
Restant ambdues expressions:
$\frac{3}{4}a^2 = 3b^2$
Aleshores:
$\frac{a}{b} = 2$

Aleshores, els tres rectangles es poden dividir en 6 quadrats de costat b

$(2b)^2 + b^2 = 5^2$
Aleshores, $b^2 = 5$
L'àrea ombrejada és:
$S = 6b^2 = 30$