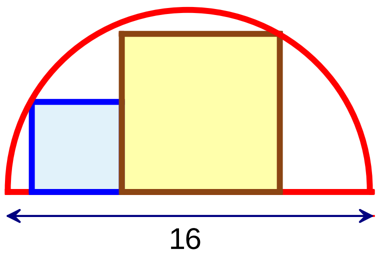
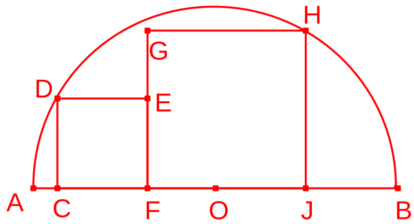
Problemes de Geometria per a l'ESO 245

2441.- Dos quadrats estan inscrits en un semicercle de diàmetre 16.
Calculeu la suma de les seues àrees.



Solució:
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 16$ i centre O.
Siga el quadrat $CDEF$ de costat $\overline{CF} = a$
Siga el quadrat $FGHJ$ de costat $\overline{FJ} = b$



Siga $x = \overline{FO}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCD}$
$(a + x)^2 + a^2 = 8^2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OJH}$
$(b - x)^2 + b^2 = 8^2$

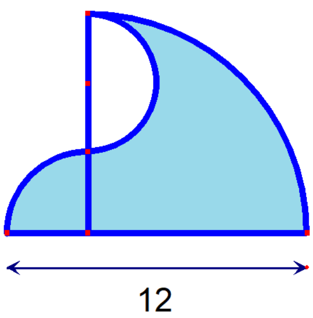
Igualant ambdues equacions:
$(a + x)^2 + a^2 = (b - x)^2 + b^2$
$2x(a + b) = 2(b^2 - a^2)$
$x(a + b) = (a + b)(b - a)$
$x = b - a$

Substituint en la primera equació:
$b^2 + a^2 = 8^2$

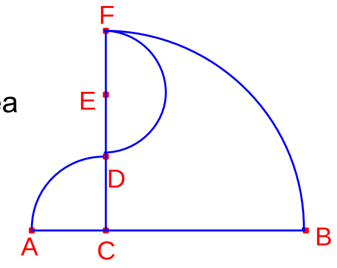
Aleshores, la suma de les àrees és 64.

2442.- A la figura hi ha dos quadrants i un semicercle.

Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



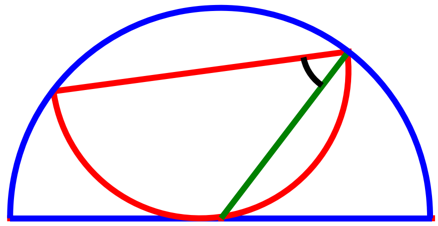
Solució:
Siga $\overline{AC} = x$
$\overline{BC} = 12 - x, \overline{DF} = 12 - 2x$



L'àrea ombrejada és l'àrea del quadrant de radi $\overline{BC}$, més l'àrea del quadrant de radi $\overline{AC}$, menys l'àrea del semicercle de radi $\overline{DE} = 6 - x$.

$$S = \frac{1}{4}\pi(12 - x)^2 + \frac{1}{4}\pi x^2 - \frac{1}{2}\pi(6 - x)^2 = 18\pi$$

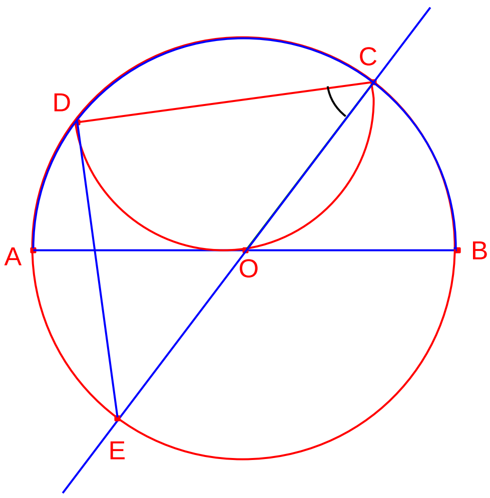
2443.- En la figura, el semicercle gran té el doble d'àrea que el semicercle menut. Determineu l'angle que forma el radi del semicercle gran i el diàmetre de menut.



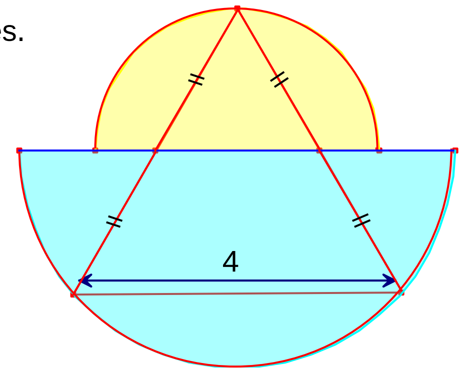
Solució:
Siga $\overline{AB}$ el diàmetre del semicercle gran.
Siga $\overline{CD}$ el diàmetre del semicercle menut.

El semicercle gran té el doble d'àrea que el semicercle menut, aleshores:
$$\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\right)^2 = 2$$
Per tant,
$\overline{CE} = \overline{AB} = \overline{CD}\sqrt{2}$

$\angle EDC = 90°$
Aleshores, $\angle DCE = 45°$



2444.- El costat del triangle equilàter és 4.
Calculeu la suma de les àrees dels dos semicercles.



Solució:

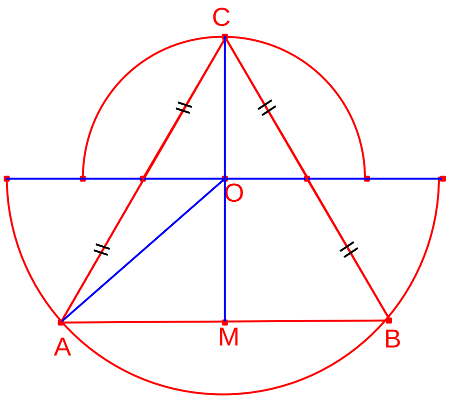
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = 4$
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$
$\overline{MC} = 2\sqrt{3}$

Siga O el centre de les dues semicircumferències.

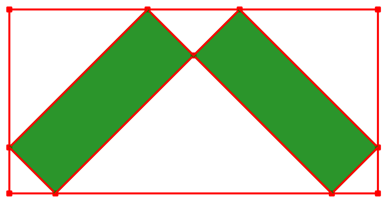
$$\overline{OM} = \overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{MC} = \sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMO}$
$\overline{OA} = \sqrt{7}$

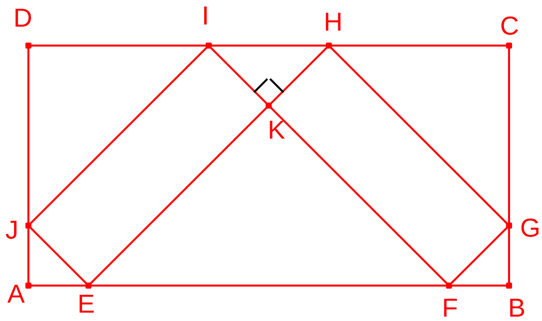


La suma de les àrees dels dos semicercles és:
$S = \frac{1}{2}\pi\sqrt{3}^2 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{7}^2 = 5\pi$

2445.- En la figura hi ha dos rectangles ombrejats iguals de costats en proporció 1:3.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle exterior.



Solució:



Siga $ABCD$ el rectangle exterior.
Siga el rectangle $EKIJ, \overline{JE} = x, \overline{JI} = 3x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ICJ}$

$$\overline{CD} = \overline{CH} = \overline{JD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IKH}$

$$\overline{HI} = x\sqrt{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JAE}$

$$\overline{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{CD} = 4x\sqrt{2}, \overline{AD} = 2x\sqrt{2}$$

L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2S_{EKIJ} = 2 \cdot x \cdot 3x = 6x^2$$

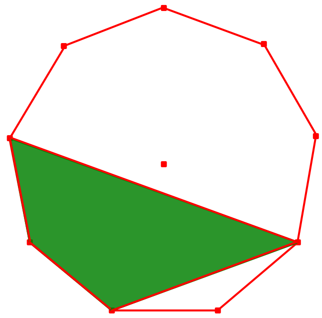
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = 4x\sqrt{2} \cdot 2x\sqrt{2} = 16x^3$$

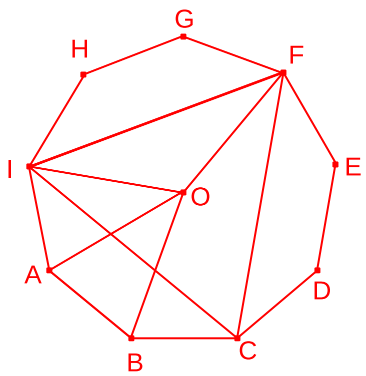
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{6x^2}{16x^2} = \frac{3}{8}$$

2446.- En la figura, dins d’un enneàgon regular s’ha inscrit un quadrilàter.
Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter i el polígon regular.



Solució:
Siga el polígon regular $ABCDEFGHI$ de 9 costats.
Siga O el centre del polígon regular.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència circumscrita al polígon regular.
El triangle $\overset{\Delta}{CFI}$ és equilàter.
Siga $\overline{AB} = c, \overline{FI} = d, \angle AOB = 40°, \angle FOI = 120°$



Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABO}$

$$\frac{c}{\sin 40°} = \frac{R}{\sin 70°}$$

Aleshores:

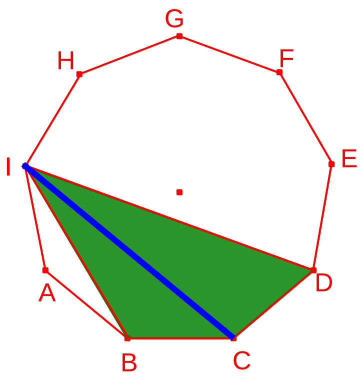
$$c = \frac{\sin 40°}{\sin 70°} R$$

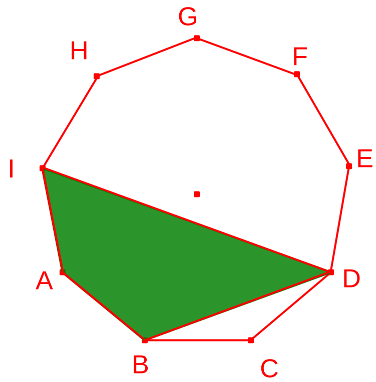
Aplicant el teorema dels sinus al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{FIO}$

$$\frac{d}{\sin 120°} = \frac{R}{\sin 30°}$$

Aleshores:

$$c = \frac{\sin 120°}{\sin 30°} R = R\sqrt{3}$$





L’àrea del quadrilàter $BCDI$ és igual a l’àrea del quadrilàter $ABDI$.

$$S_{ABDI} = S_{BCDI} = S_{ICB} + S_{CDI}$$

$$\angle BCI = 40°, \angle DCI = 100°$$

$$S_{ABDI} = S_{ICB} + S_{CDI} = \frac{1}{2} cd \cdot \sin 40° + \frac{1}{2} cd \cdot \sin 100° = cd \cdot \sin 70° \cdot \cos 30°$$

$$S_{ABDI} = \frac{\sin 40°}{\sin 70°} R \cdot R\sqrt{3} \cdot \sin 70° \cdot \cos 30° = \frac{3}{2} \sin 40° \, R^2$$

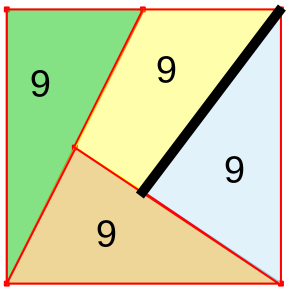
L’àrea del enneàgon regular és:

$$S_9 = 9 \cdot S_{ABO} = 9 \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin 40°$$

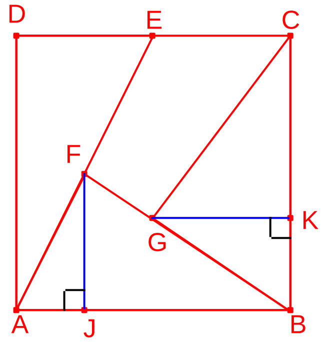
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ABDI}}{S_9} = \frac{\frac{3}{2} \sin 40° \, R^2}{\frac{9}{2} \sin 40° \, R^2} = \frac{1}{3}$$

2447.- El quadrat de la figura s'ha dividit en quatre parts d'igual àrea i igual a 9.
Calculeu la mesura del costat comú al quadrilàter i al triangle.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat exterior.
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = 4 \cdot 9 = 36$



Aleshores els costat del quadrat és:
$\overline{AB} = 6$

$S_{ADE} = 9 = \frac{1}{2} 6 \cdot \overline{DE}$
Aleshores, $\overline{DE} = 3$

Siga J la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$
Siga K la projecció de G sobre el costat $\overline{BE}$

$S_{ABF} = 9 = \frac{1}{2} 6 \cdot \overline{FJ}$
Aleshores, $\overline{FJ} = 3$

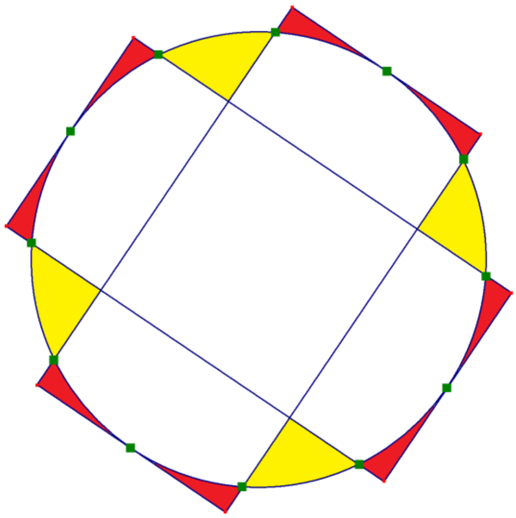
$S_{BCG} = 9 = \frac{1}{2} 6 \cdot \overline{GK}$
Aleshores, $\overline{GK} = 3$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{FJA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{6}{3} = \frac{3}{\overline{AJ}}$
Aleshores, $\overline{AJ} = \frac{3}{2}, \overline{JB} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

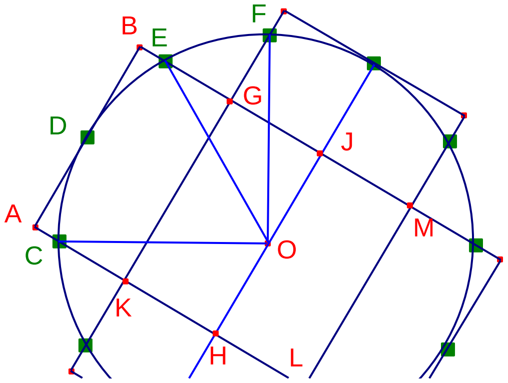
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BJF}, \overset{\Delta}{GKB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{\overline{BK}}$
Aleshores, $\overline{BK} = 2, \overline{KC} = 6 - 2 = 4$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{GKC}$
$\overline{CG} = 5$

2448.- Els punts de la circumferència estan a la mateixa distància.
Quina és més gran, la zona ombrejada de roig o la zona ombrejada de groc?



Solució:



Els punts de la circumferència són els vèrtexs d'un dodecàgon regular.
Siga O el centre de la circumferència.
Siga $\overline{OC} = 1$ el radi.
$\overset{\Delta}{COE}$ és un triangle equilàter.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{OD} = 1$

$$\overline{HO} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}, \overline{CH} = \overline{EJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'àrea de dues zones roges és igual a l'àrea del quadra $AHJB$, menys la suma de les àrees d'un sector circular de 60º i radi 1 i un rectangle de costat, $\overline{CH} \times \overline{OH}$

$$S_{2roges} = 1^2 - \left(\frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1\right) = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$KLMG$ és un quadrat de costat 1.

$$\overline{GJ} = \frac{1}{2}\overline{KL} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{EG} = \overline{EJ} - \overline{GJ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

L'àrea d'una zona groga és igual a l'àrea d'un sector circular de 60º i radi 1. Menys l'àrea de dos triangles $\overset{\Delta}{EGO}$

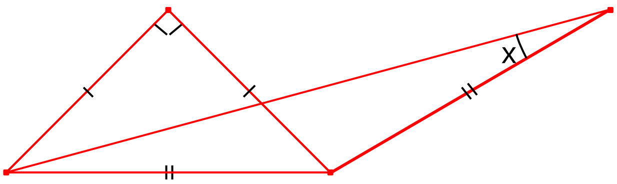
$$S_{1\ groga} = \frac{1}{12}\pi \cdot 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

La zona roja és menor que la zona groga ja que

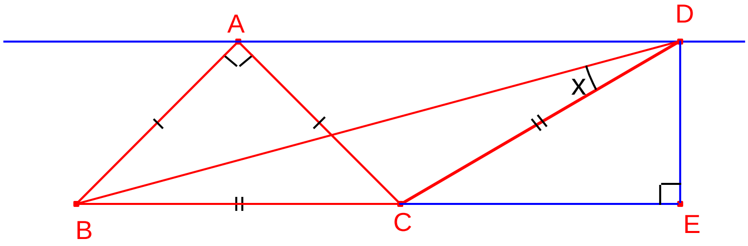
$$1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

Perquè $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2449.- En la figura els dos triangles isòsceles tenen la mateixa àrea.
Un d'ells és rectangle.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, A = 90°, \overline{AB} = \overline{AC} = 1$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{BC} = \overline{BD} = \sqrt{2}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC},\ \overset{\Delta}{BCD}$ tenen la mateixa àrea i la mateixa base.
Aleshores, la recta AD és paral·lela a la base comuna $\overline{BC}$

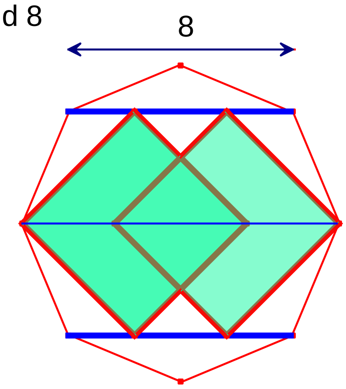
El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle DBC = x$

$\angle ADB = \angle DBC = x$

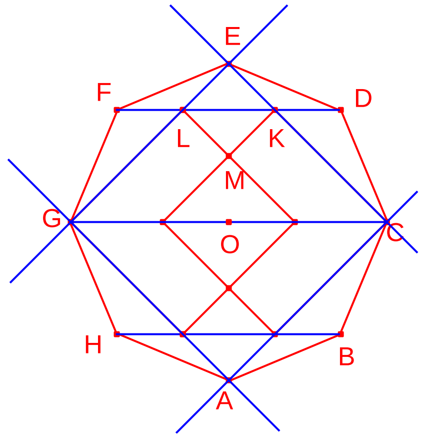
Siga E la projecció de D sobre la recta BC.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
$\overline{AM} = \overline{DE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$
Aleshores, $\angle CDE = 60°$

$90° = \angle ADE = 2x + 60°$
Aleshores, $x = 15°$

2450.- En la figura, entre dues diagonals paral·leles de longitud 8 s'ha dibuixat dos quadrats,
Calculeu el perímetre de la regió ombrejada.



Solució:



$\angle ECD = \frac{1}{2}45°$

$\angle GCD = \frac{135°}{2}$

$\angle KCD = \angle GCE - 45° = \frac{1}{2}45°$
Aleshores, C, K, E estan alineats.
$\angle GED = 90°$
Aleshores, $KELM$ és un quadrat.
Aleshores el perímetre de la regió ombrejada és igual al perímetre del quadrat $ACEG$ de costat 8.
El perímetre és:
$P_{ombrejada} = 4 \cdot 8 = 32$