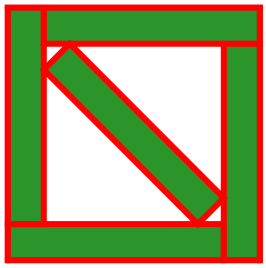
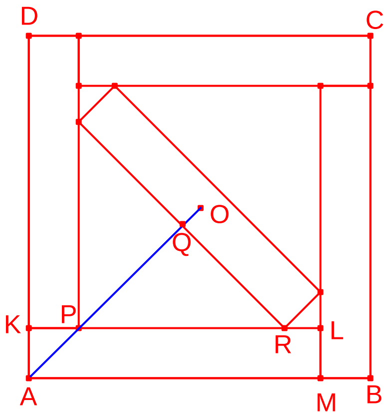
2451.- En un quadrat s'han inscrit cinc rectangles iguals. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels cinc rectangles i l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O i costat $\overline{AB} = c$
Siga el rectangle $AKLM$.
Siga $\overline{AK} = x, \overline{AM} = c - x$



La proporció que cerquem és:

$$k = \frac{5 \cdot x(c-x)}{c^2}$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{c}c$$

$$\overline{OA} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{OQ} = x\sqrt{2} + \frac{1}{2}(c-x) + \frac{1}{2}x$$

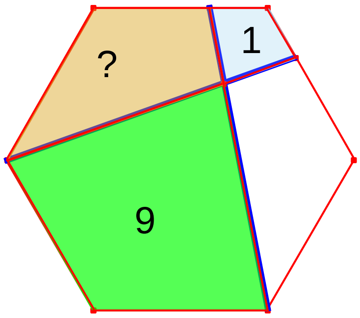
Simplificant:

$$x = \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)c$$

La proporció de les àrees és:

$$k = \frac{5 \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)c(c - \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)c)}{c^2} = \frac{5}{8}$$

2462.- Dos segments d'un hexàgon regular formen dos cometes d'àrees 9 i 1, respectivament,
Calculeu l'àrea de l'altre quadrilàter ombrejat.

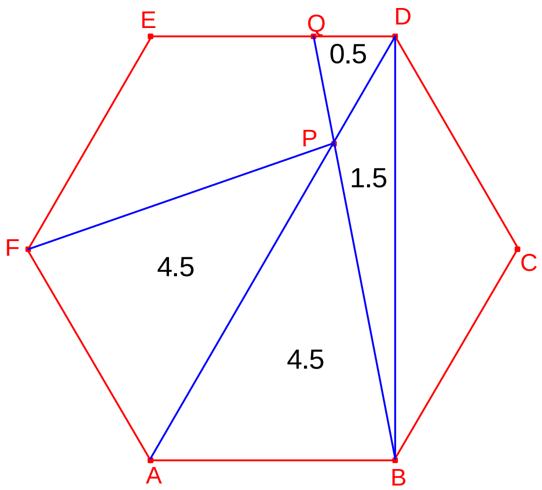


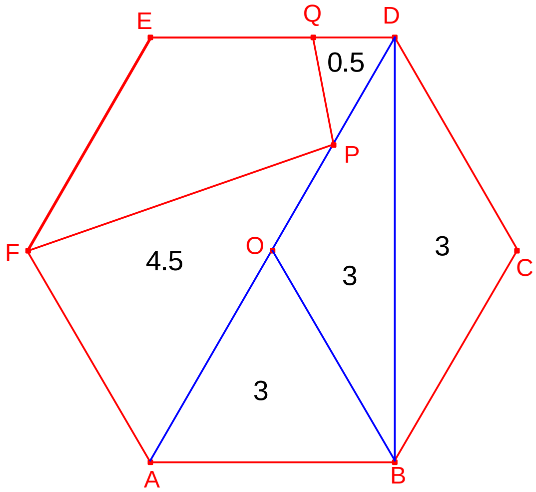
Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de centre O.
La diagonal $\overline{AD}$ divideix els dos cometes, amb triangles d'igual àrea cadascun d'ells.

$S_{ABP} = \frac{9}{2}, S_{DQP} = \frac{1}{2}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{DQP}$ són semblants.
La raó de semblança és l'arrel quadrada de les àrees.

$\frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$





Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{BP} = 3 \cdot \overline{PQ}$
Aleshores,

$S_{BDP} = 3 \cdot S_{DQP} = \frac{3}{2}$

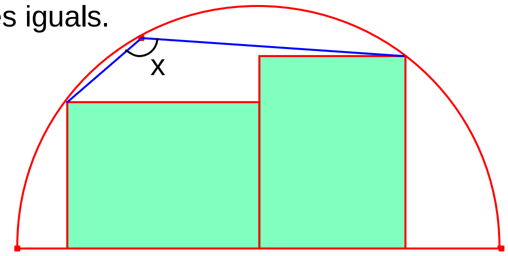
$S_{ABD} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$

$S_{BOD} = S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABD} = 3$

$S_{ADEF} = S_{ABCD} = 9$

$S_{PQEF} = S_{ADEF} - S_{APF} - S_{PDQ} = 9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

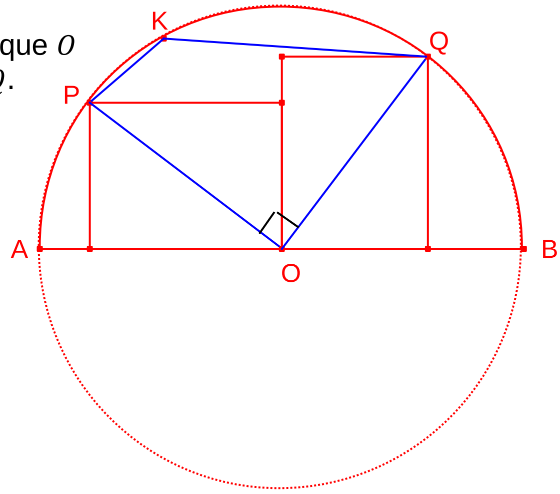
2453.- Dins del semicercle hi ha inscrits dos rectangles iguals.
Calculeu la mesura de l'angle x



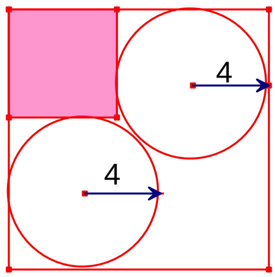
Solució:
Siga O el vèrtex comú als dos rectangles.
El punt O és el centre de la semicircumferència ja que O pertany al diàmetre i està a igual distància de P i Q.
$\angle POQ = 90°$

$\angle PKQ$ és inscrit a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$ i abraça 270º

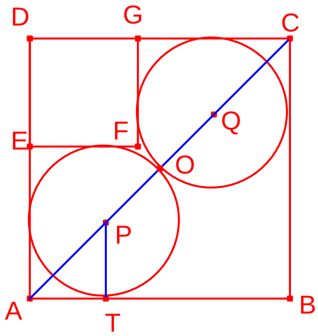
Aleshores, $\angle PKQ = \frac{270°}{2} = 135°$



2454.- Dues circumferències tangents de radi 4 són tangents a un quadrat.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat exterior de centre O.
Siga $DEFG$ el quadrat interior.
Siguen P, Q els centres de les dues circumferències.
$\overline{PQ} = 2 \cdot 4 = 8$
Siga T el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AB}$

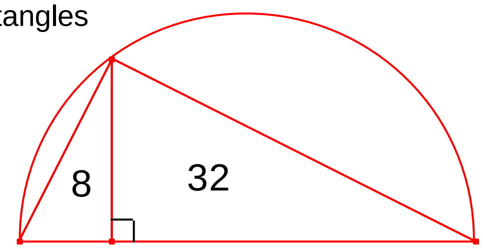


Aplicant el teorema de Pitàgores triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$
$\overline{AP} = \overline{CQ} = 4\sqrt{2}$
$\overline{AC} = 2\overline{AP} + \overline{PQ} = 8 + 8\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC} = 8 + 4\sqrt{2}$
$\overline{DE} = \overline{AB} - \overline{AE} = 4\sqrt{2}$

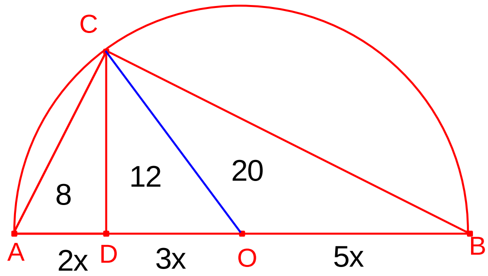
L'àrea del quadrat $DEFG$ és:

$S_{DEFG} = \overline{DE}^2 = 32$

2455.- En un semicercles s'han dibuixat dos triangles rectangles d'àrees 8 i 32.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga $\overline{AB}$ el diàmetre del semicercle i O el seu centre.
Siguem $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{BDC}$ els triangles rectangles d'àrees 8 i 32, respectivament.
Per ser angle inscrit i abraçar el diàmetre:
$\angle ACB = 90°$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AOC}, \overset{\Delta}{OBC}$ tenen la mateixa àrea aleshores:
$S_{CDO} = 12, S_{OBC} = 20$



Aleshores, les bases dels triangles $\overset{\Delta}{ADC}, \overset{\Delta}{DOC}\ \overset{\Delta}{OBC}$ estan en proporció $8:12:20$

Siguen $\overline{AD} = 2x, \overline{DO} = 3x, \overline{OB} = 5x$.

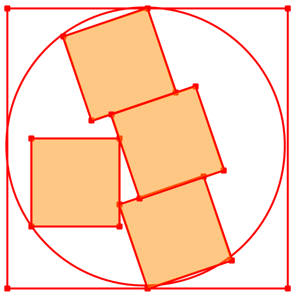
Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$

$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD} = 2x \cdot 8x = 16x^2$
$\overline{CD} = 4x$

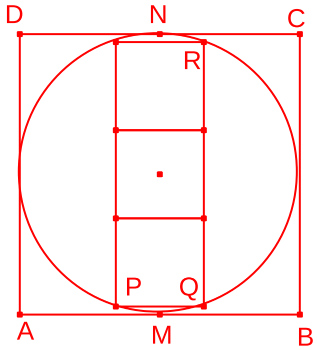
Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$\frac{1}{2} 2x \cdot 4x = 8$
Simplificant:
$x^2 = 2$

L'àrea del semicercle de radi $\overline{OA} = 5x$ és:
$S = \frac{1}{2}\pi(5x)^2 = 25\pi$

2456.- En quina proporció estan les àrees dels quatre quadrats iguals interiors a la circumferència i el quadrat exterior circumscrit a la circumferència.



Solució:
Efectuem un gir i la figura quedaria:
$ABCD$ el quadrat exterior
Tres quadrats alineats de costat $\overline{PQ}$



Siga $\overline{AB} = \overline{MN} = c, \overline{PQ} = x$

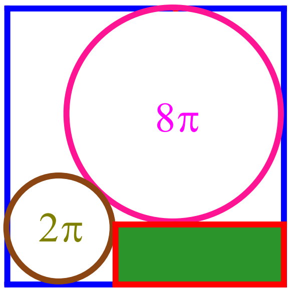
Aleshores, $\overline{PR} = \overline{MN} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$:
$x^2 + (3x)^2 = c^2$

Simplificant:
$x^2 = \frac{1}{10}c^2$

La proporció entre les àrees és:
$\frac{4S_q}{S_{ABCD}} = \frac{4 \cdot x^2}{c^2} = \frac{2}{5}$

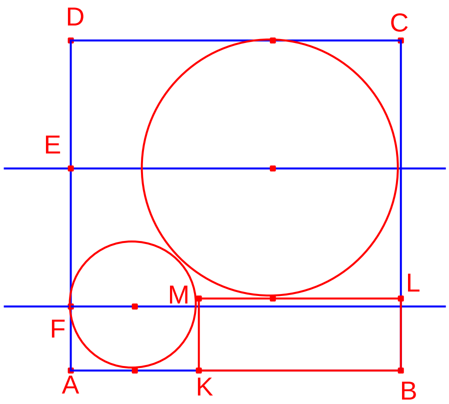
2457.- En la figura, dos cercles tangents d'àrees $2\pi, 8\pi$ són tangents a un quadrat.
El rectangle ombrejat és tangent al cercles.
Determineu la seua àrea.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga R el radi del cercle d'àrea 8π
Siga r el radi del cercle d'àrea 2π
$R = 2\sqrt{2}, r = \sqrt{2}$

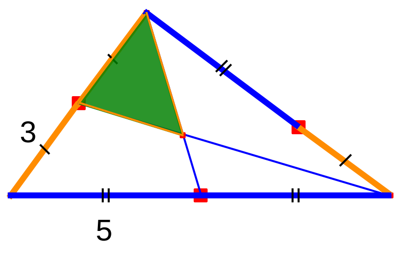
Siga E la projecció del centre del cercle d'àrea 8π sobre el costat $\overline{AD}$
Siga F la projecció del centre del cercle d'àrea 2π sobre el costat $\overline{AD}$

$$\overline{AF} = r, \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}(R+r), \overline{DE} = R$$
$$c = \overline{AD} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(R+r)$$
$$c = 3\left(1+\sqrt{2}\right)$$

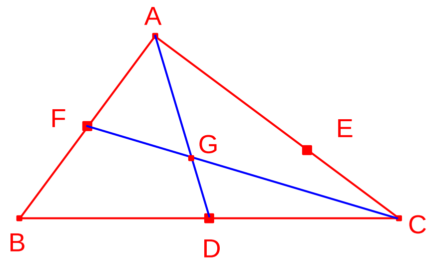


Siga el rectangle $KBLM$.
$\overline{KB} = c - 2r, \overline{KM} = c - 2R$
L'àrea del rectangle $KBLM$ és:
$$S_{KBLM} = (c-2r)(c-2R) = c^2 - 2(R+r)c + 4Rr =$$
$$= 9\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\left(1+\sqrt{2}\right) + 16 = 7$$

2458.- Els costats d'un triangle s'ha dividit en segments uns de mesura 3 i altres de mesura 5. Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle exterior.

D, F són punts migs dels costats $\overline{BC}, \overline{AB}$, respectivament.

Aleshores, el punt G, intersecció de les mitjanes $\overline{AD}, \overline{CF}$ és el baricentre.

$\overline{AB} = 6, \overline{BC} = 10, \overline{AC} = 8$

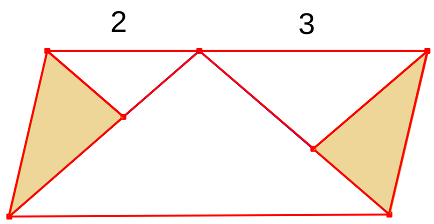
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $A = 90°$

Com que G és el baricentre, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ és la sisena part de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

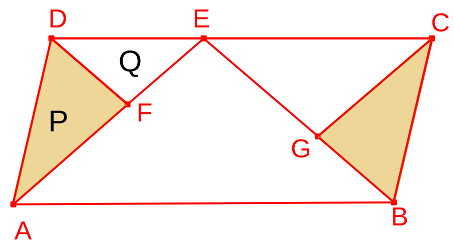
$$S_{AFG} = \frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

2459.- En la figura, els triangles no ombrejats són isòsceles.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del paral·lelogram.



Solució:
Siga $ABCD$ el paral·lelogram.

Per ser els tres triangles no ombrejats $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{CEG}, \overset{\Delta}{ABE}$ isòsceles, els triangles ombrejats són iguals.



Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADF}$

Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$
Siga S l'àrea del paral·lelogram $ABCD$

El triangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{CEG}, \overset{\Delta}{ABE}$ són semblants.
Aleshores, les àrees són proporcionals als quadrats des costats.

$$S_{ABE} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 S_{EDF} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\frac{25}{4} Q = \frac{1}{2} S$$

$$Q = \frac{2}{25} S$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és la cinquena part de l'àrea del paral·lelogram $ABCD$.

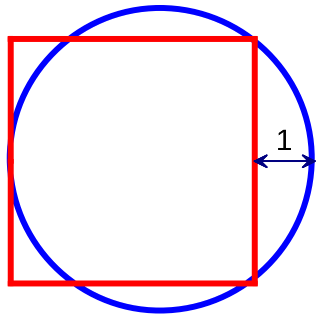
$$P + Q = \frac{1}{5} S$$

$$P = \frac{1}{5} S - Q = \frac{1}{5} S - \frac{2}{25} S = \frac{3}{25} S$$

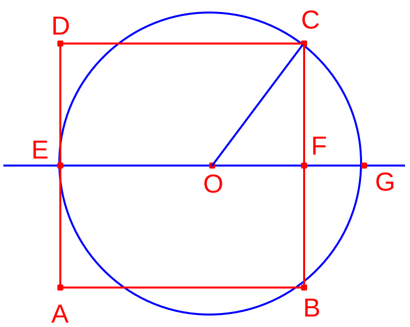
La proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del triangle és:

$$\frac{2P}{S} = \frac{6}{25}$$

2460.- Calculeu l’àrea del quadrat.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$

Siga $\overline{EG} = c + 1$ diàmetre de la circumferència de centre O.

$\overline{OC} = \frac{c+1}{2}, \overline{OF} = \frac{c-1}{2}, \overline{CF} = \frac{c}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFC}$

$\left(\frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Simplificant:

$c^2 - 4c = 0$

Resolent l’equació:

$c = 4$

L’àrea del quadrat és:

$S_{ABCD} = c^2 = 16$