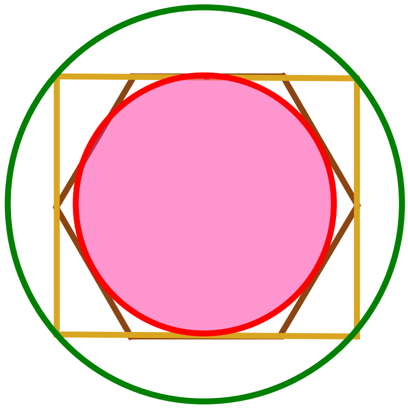
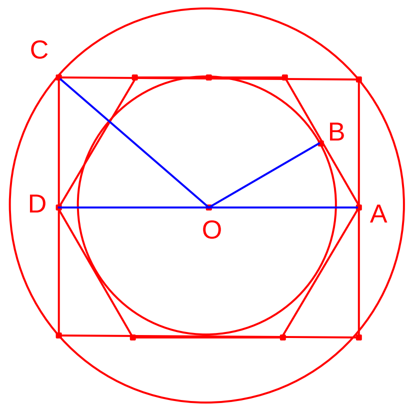
2461.- En la figura, hi ha dues circumferències, un rectangle i un hexàgon regular.
Determineu la proporció entre les àrees del cercle ombrejat i del cercle exterior.



Solució:
Siguen $\overline{OB} = r, \overline{OC} = R$ radis de les circumferències.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$$\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\overline{CD} = r$$

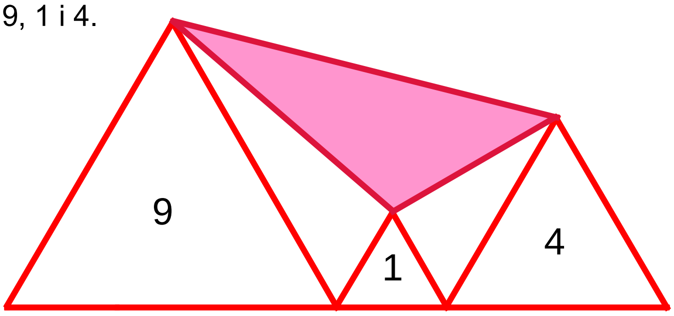
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDO}$:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2 = \frac{7}{3}r^2$$

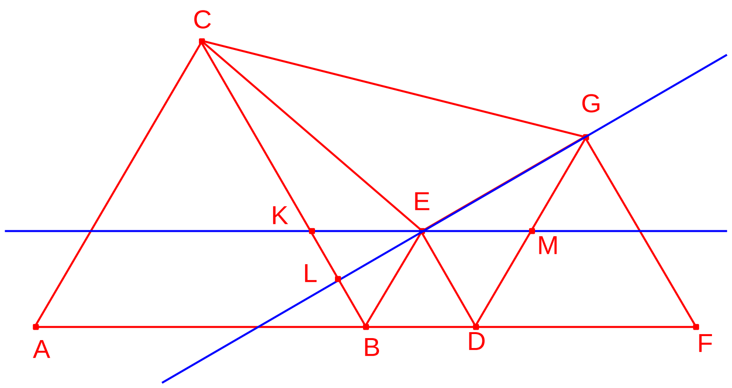
Aleshores, la proporció entre les àrees dels dos cercles és:

$$\frac{S_{int}}{S_{ext}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{3}{7}$$

2462.- Siguen tres triangles equilàters d'àrees 9, 1 i 4.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:



Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}, \overset{\Delta}{DFG}$ d'àrees 9, 1, i 4, respectivament.
Els costats estan en proporció a l'arrel quadrada de les àrees.
Aleshores:
$\overline{AB} = 3 \cdot \overline{BD}, \overline{DFF} = 2 \cdot \overline{BD}$.
$\angle EDG = 60°, \overline{DG} = 2 \cdot \overline{DE}$
Aleshores,
$\angle GED = 90°$

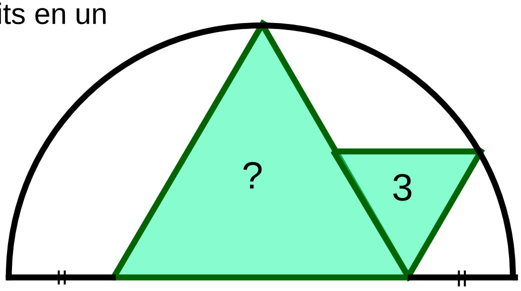
Pel punt E tracem una recta paral·lela a la recta AF que talla $\overline{BC}$ en el punt K i $\overline{DG}$ en el punt M.

Els triangles $\overset{\Delta}{BEK}, \overset{\Delta}{DME}$ són equilàters i d'àrea 1.
La recta EG talla $\overline{BK}$ en el punt mig L.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEKL}, \overset{\Delta}{DGE}$ són semblants i de raó 1:2.

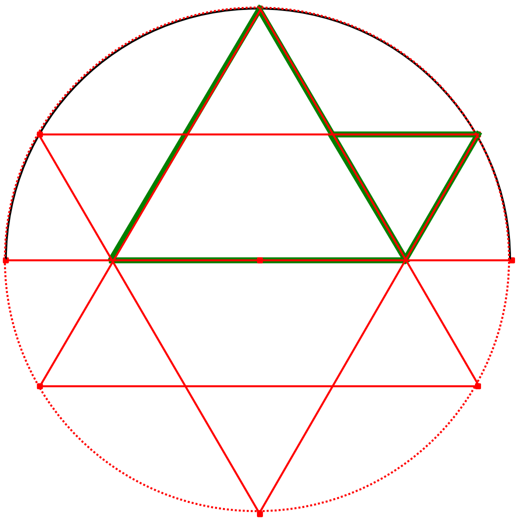
Aleshores:
$\overline{EG} = 2 \cdot \overline{EL}$

$\overline{CK} = 2 \cdot \overline{BQ}$
Aleshores:
$\overline{CL} = 5 \cdot \overline{BL}$
$S_{BLE} = S_{BEK} = \frac{1}{2}$
Per tant,
$S_{CLE} = 5 \cdot S_{BLE} = \frac{5}{2}$
Aleshores:
$S_{CEG} = 2 \cdot S_{CLE} = 5$

2463.- En la figura, dos triangles equilàters estan inscrits en un semicercle.
El triangle menut té àrea 3.
Determineu l'àrea del triangle gran.

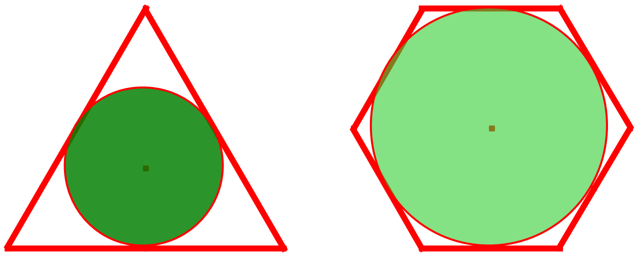


Solució.
Dibuixem la circumferència que conté el semicercle.

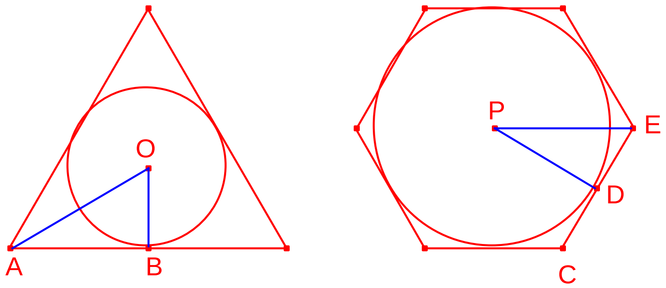


Allargant els costats dels dos triangles, es formen dos triangles equilàters inscrits en la circumferència.
Notem que l'àrea del triangle que cerquem és quatre vegades l'àrea del menut.
És a dir, 12.

2464.- El triangle equilàter i l'hexàgon regular tenen el mateix perímetres.
En quina proporció estan les àrees dels cercles inscrits a les dues figures.



Solució:



Siga $\overline{OB} = r$ radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter.
Siga $\overline{PD} = R$ radi de la circumferència inscrita a l'hexàgon regular.
Siga $\overline{CD} = c$ costat de l'hexàgon regular.
$\overline{AB} = \overline{PE} = c$

Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}, \overset{\Delta}{PDC}$

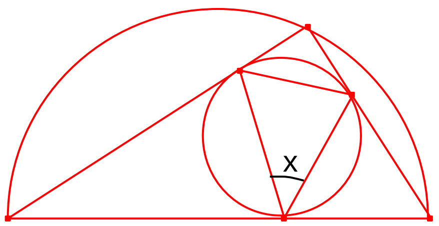
$$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{R}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}c, R = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

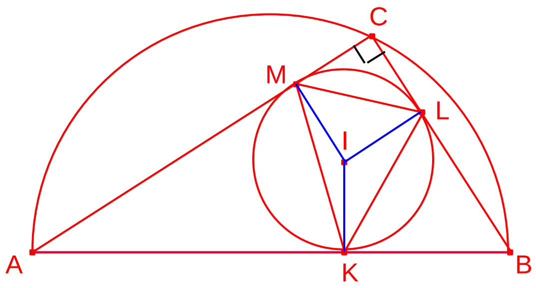
La proporció entre les àrees dels cercles és:

$$\frac{S_r}{S_R} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

2465.- En la figura, el triangle interior està inscrit està format pels punts de tangència de la circumferència inscrita d'un triangle inscrit en un semicercle.
Calculeu la mesura de l'angle x



Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle inscrit en el semicercle.
$\angle ACB = 90°$

Siga $\overset{\Delta}{KLM}$ el triagnle format pels punts de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga I l'incentre.
$\angle IKC = \angle ILC = 90°$
Aleshores, $\angle LIM = 90°$

Siga $\angle MKI = \alpha,\ \angle LKI = \beta$
$x = \angle LKM = \alpha + \beta$

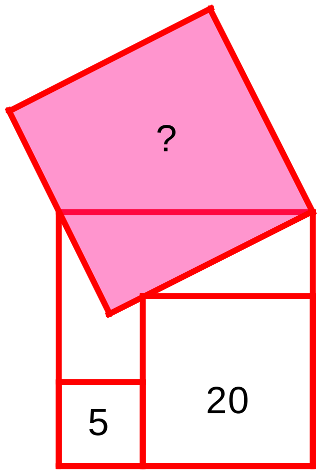
$\angle IMK = \alpha, \angle ILK = \beta$

$\angle MIK = 180° - 2\alpha, \angle LIK = 180° - 2\beta$

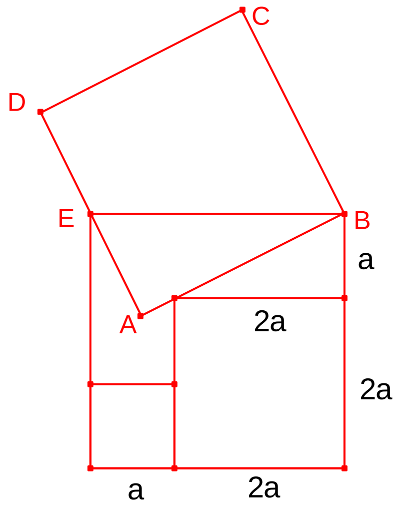
$\angle MIK + \angle LIK = 360° - 2(\alpha + \beta) = 270°$

Aleshores:
$x = \alpha + \beta = 45°$

2466.- Els la figura, hi ha quatre quadrats, dos d'ells d'àrees 5, 20 .
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:



AB=x

AE=x/2

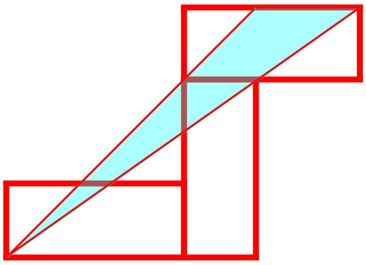
BE=3a

$BE^2=9a^2=45$

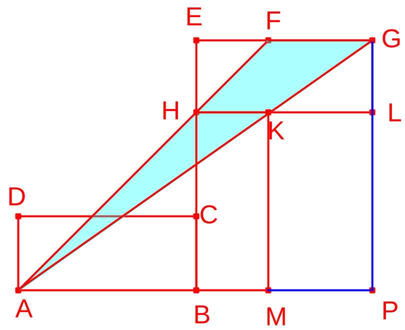
$x^2/4+x^2=45$

$[ABCD]=x^2=36$

2467.- En la figura, els tres rectangles tenen àrea 9.
Calculeu l’àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga $\overline{AD}=x, \overline{AB}=\frac{9}{x}$, costats del rectangle.
$\overline{AM}=\overline{BE}=\overline{MF}$



$$\overline{BE}=\frac{9}{x}+x$$

Aleshores, $\overline{EF}=\overline{AD}=x$

$$\overline{FG}=\frac{9}{x}-x$$

L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{AFG}$ és:

$$S_{AFG}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{x}-x\right)\left(\frac{9}{x}+x\right)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{KLG}, \overset{\Delta}{APG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

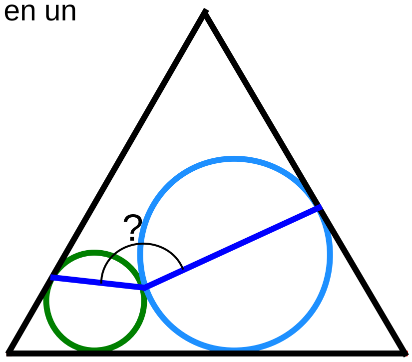
$$\frac{x}{\frac{9}{x}-x}=\frac{\frac{9}{x}+x}{2\cdot\frac{9}{x}}$$

$$\left(\frac{9}{x}-x\right)\left(\frac{9}{x}+x\right)=18$$

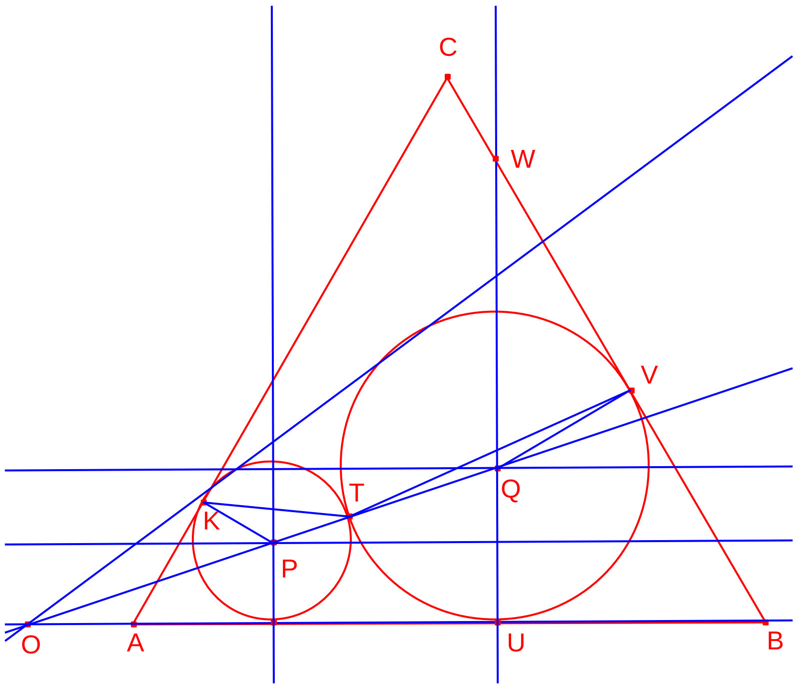
Aleshores,

$$S_{AFG}=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{x}-x\right)\left(\frac{9}{x}+x\right)=\frac{1}{2}\times 18=9$$

2468.- En la figura s'han inscrit dues circumferències tangent en un triangle equilàter.
Calculeu l'angle.



Solució:



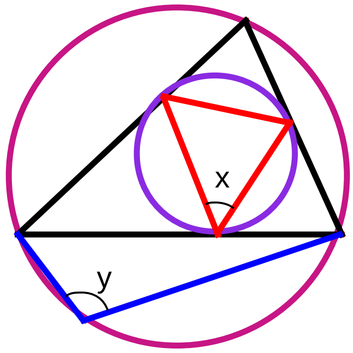
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga O el centre d'homotècies de les dues circumferències tangents.
Siga $\angle POB = \alpha$
Siga K el punt de tangència de la circumferència de centre P i el costat $\overline{AC}$
Siga V el punt de tangència de la circumferència de centre Q i el costat $\overline{BC}$

$$\angle KPT = 360° - (210° + \alpha) = 150° - \alpha$$
$$\angle PTK = \frac{30° + \alpha}{2}$$

$$\angle WQV = 60°$$
$$\angle TQV = \angle WQV + 180° - \angle OQU = 150° + \alpha$$
$$\angle QTV = \frac{30° + \alpha}{2}$$

$$\angle KTV = 180° - (\angle PTK + \angle QTV) = 180° - \left(\frac{30° + \alpha}{2} + \frac{30° - \alpha}{2}\right) = 150°$$

2469.- Determineu la relació entre els angles x, y

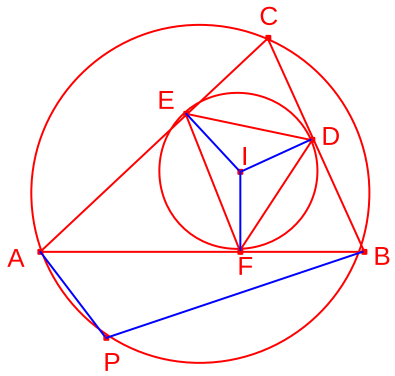


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle exterior.

Siga $\overset{\Delta}{DEF}$ el triangle amb els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\angle EFD = x$, $\angle APB = y$.

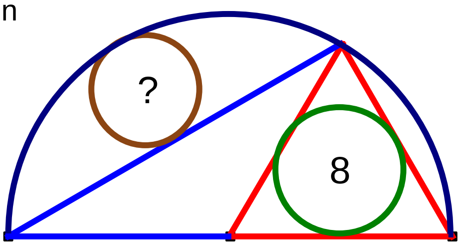


Per ser angle inscrit en la circumferència:
$y = \angle APB = A + B$

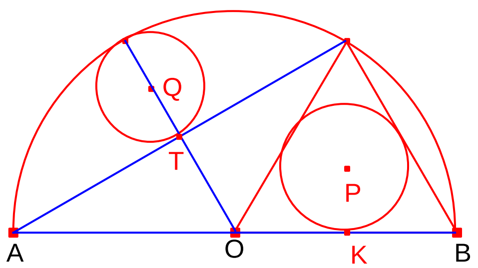
Siga I el centre de la circumferència interior
Siga $\angle EFI = \alpha, \angle IFB = \beta$
$\angle EID = 180° - C = A + B$

Per ser angle inscrit en la circumferència interior:
$$x = \angle EFD = \frac{1}{2}\angle EID = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}y$$
Aleshores, $y = 2x$

2470.- En la figura, un cercle d'àrea 8 està inscrit en un triangle equilàter.
Calculeu l'àrea de l'altre cercle.



Solució:



Siga O el centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$
Siga $\overline{OA} = R$ el radi del semicercle.
Siga $\overline{PK} = r$ el radi de la circumferència inscrita al triangle equilàter.

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}R$$

$$r^2 = \frac{1}{12}R^2$$

Siga $\overline{QT} = s$ radi de la segona circumferència.

$$2s = \frac{1}{2}R$$

$$s^2 = \frac{1}{16}R^2$$

La proporció de les àrees dels dos cercles és igual al quadrat de la proporció dels radis:

$$\frac{S_s}{8} = \left(\frac{s}{r}\right)^2 = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{12}} = \frac{3}{4}$$

Aleshores:

$$S_s = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$