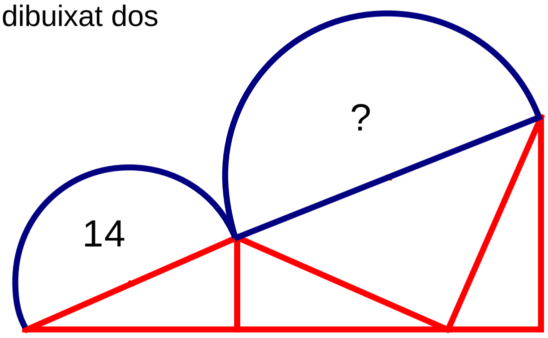
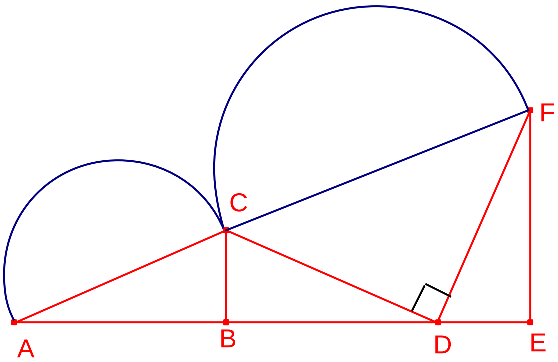
2471.- Sobre tres triangles rectangles iguals s’han dibuixat dos semicircumferències.
Un dels semicercles té àrea 14.
Determineu l’àrea de l’altre semicercle.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de catets $\overline{AB} = x, \overline{BC} = y$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}^2 = x^2 + y^2$

$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 = \overline{AC}^2 = x^2 + y^2, \angle CDF = 90°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDF}$:

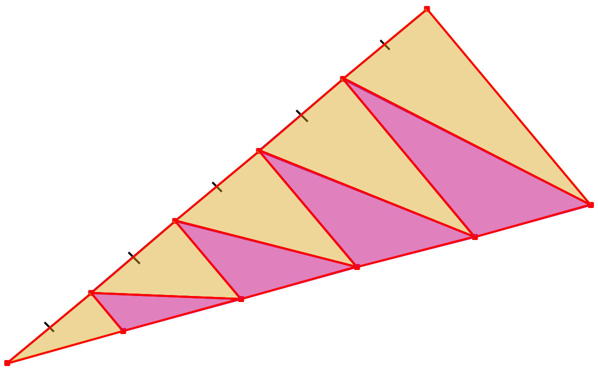
$$\overline{CF}^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Siga S l’àrea del semicercle gran.
Les àrees dels dos semicercles són proporcionals als quadrats dels diàmetres:

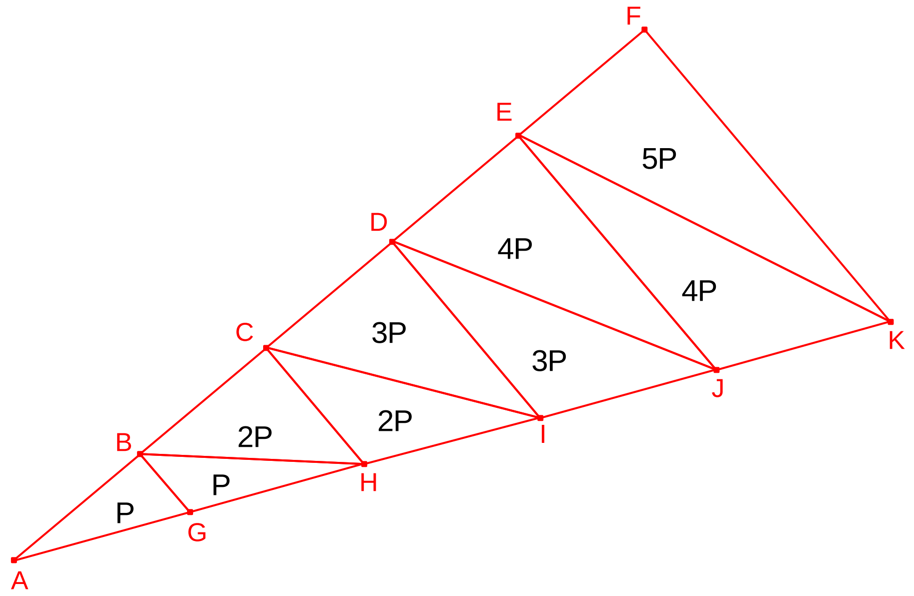
$$\frac{S_{gran}}{14} = \left(\frac{\overline{CF}}{\overline{Ac}}\right)^2 = 2$$

Aleshores:
$S_{gran} = 28$

2472.- Els cinc triangles ocres són rectangles.
Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels triangles lila i el triangle exterior.



Solució.
Els triangles ocres tenen la mateixa base.
Les àrees són proporcionals a les altures.



Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}G, A\overset{\Delta}{C}H$ són semblants i de raó 1:2.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}G, A\overset{\Delta}{D}I$ són semblants i de raó 1:3.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}G, A\overset{\Delta}{E}J$ són semblants i de raó 1:4.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}G, A\overset{\Delta}{F}K$ són semblants i de raó 1:5.

Siga $P = S_{ABG}$
$S_{BCH} = 2P, S_{CDI} = 3P, S_{DEJ} = 4P, S_{EFK} = 5P$

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}G, B\overset{\Delta}{G}H$ tenen la mateixa àrea.

Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{G}H, C\overset{\Delta}{H}I$ són semblants i de raó 1:2.

Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{G}H, D\overset{\Delta}{I}J$ són semblants i de raó 1:3.

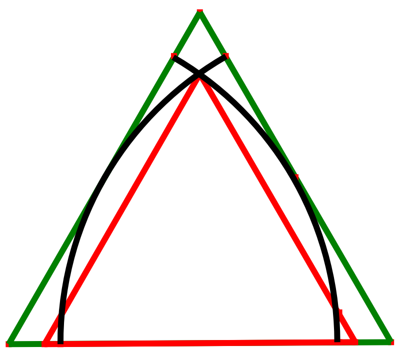
Els triangles rectangles $B\overset{\Delta}{G}H, E\overset{\Delta}{J}K$ són semblants i de raó 1:4.

$S_{BGH} = P, S_{CHI} = 2 \cdot S_{BGH=}2P,\ S_{DEJ} = 3P, S_{EJK} = 4P$

La proporció entre la regió lila i el total és:

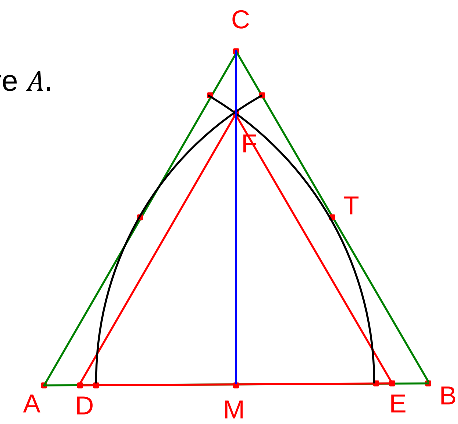
$$\frac{S_{lila}}{S_{Total}} = \frac{P + 2P + 3P + 4P}{P + 2P + 3P + 4P + 5P + P + 2P + 3P + 4P} = \frac{10P}{25P} = \frac{2}{5}$$

2473.- En la figura, dos arcs de circumferència tenen els extrems en un triangle equilàter d’àrea 3. Els arcs són tangents al triangle.
Calculeu l’àrea del triangle equilàter que té un vèrtex en la intersecció dels arcs i els altres dos en el triangle equilàter exterior.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ d’àrea 3.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AC}$
Siga T el punt de tangència amb el costat $\overline{BC}$ de l’arc de centre A.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\overline{CM}^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2$$

Siga F la intersecció dels dos arcs.

$$\overline{AF}^2 = \overline{CM}^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMF}$:

$$\overline{FM}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

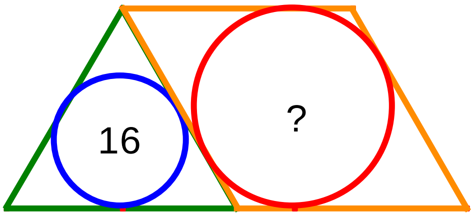
La proporció de les àrees dels dos triangles equilàters és igual a la proporció entre els quadrats de les altures.

$$\frac{S_{DEF}}{3} = \left(\frac{\overline{FM}}{\overline{CM}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

Aleshores:

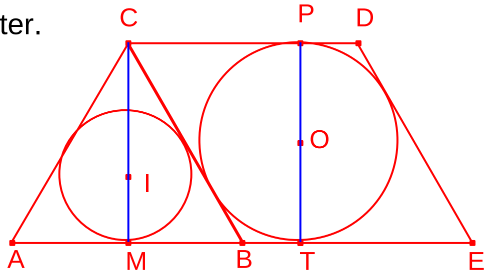
$$S_{DEF} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

2474.- Un cercle d’àrea 16 està inscrit en un triangle equilàter.
Calculeu l’àrea del cercle inscrit en el rombe.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

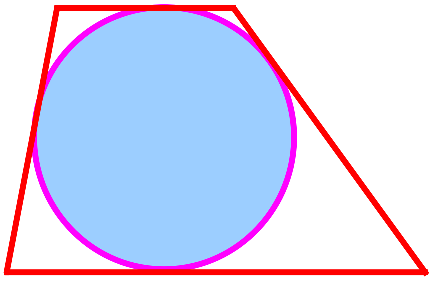


Siga I el centre de la circumferència inscrita al triangle equilàter.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $r = \overline{IM}$ el radi de la circumferència.
Aplicant la propietat del baricentre:
$$r = \frac{1}{3}\overline{CM}$$

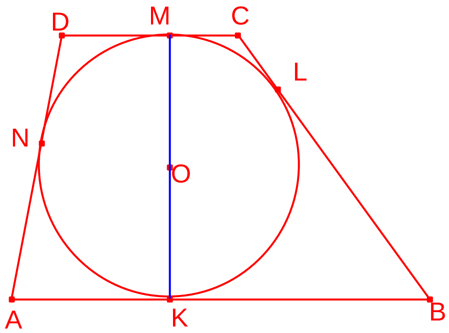
Siga O el centre de la circumferència inscrita en el rombe $BCDE$.
Siguen P, T els punts de tangència de la circumferència inscrita al rombe amb els costats $\overline{CD}, \overline{BE}$, respectivament.

$$\overline{PT} = \overline{CM}$$
Siga $R = \overline{OT}$ el radi de la circumferència.
$$R = \frac{1}{2}\overline{CM}$$
La proporció entre les àrees dels cercles és igual al quadrat de la proporció entre els radis:
$$\frac{S_{gran}}{16} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
Aleshores,
$$S_{gran} = 16 \cdot \frac{9}{4} = 36$$

2475.- En la figura, la longitud de la circumferència inscrita en el trapezi és 10 i el perímetre del trapezi 15. Calculeu la proporció entre les àrees del cercle i del trapezi.



Solució:
Siga el trapezi $ABCD$.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.
Siga O el centre de la circumferència.
Siga $\overline{OK} = r$ el radi.



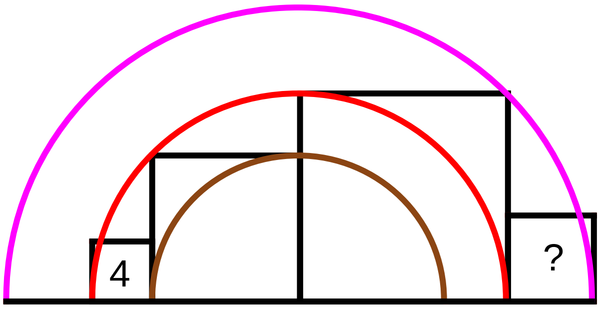
$\overline{AK} = \overline{AN} = x, \overline{BK} = \overline{BL} = y, \overline{CL} = \overline{CM} = z, \overline{DM} = \overline{DN} = t$

El perímetre del trapezi és:
$x + y + z + t = 15$

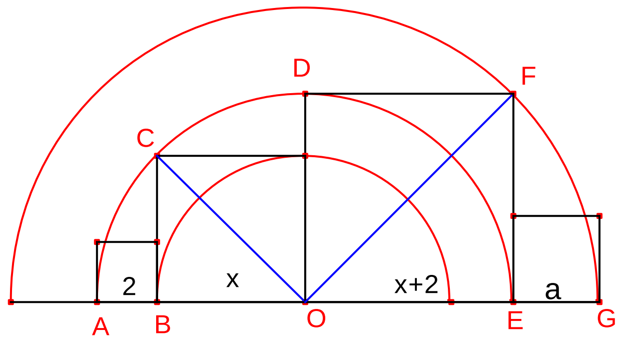
La longitud de la circumferència és:
$2\pi r = 10$
$r = \frac{5}{\pi}$

L'àrea del trapezi és:
$S_{ABCD} = \frac{x + y + z + t}{2} \cdot 2r = \frac{15}{2} r = \frac{75}{2\pi}$
L'àrea del cercle és:
$S_{cercle} = \pi r^2 = \frac{25}{\pi}$
La proporció entre les àrees és:
$\frac{S_{cercle}}{S_{ABCDD}} = \frac{\frac{25}{\pi}}{\frac{75}{2\pi}} = \frac{2}{3}$

2476.- En la figura hi ha quatre quadrats el menut d'àrea 4.
Calculeu l'àrea del quadrat de la dreta.



Solució:



Siga $\overline{AB} = 2$ costat del quadrat d'àrea 4.
Siga $\overline{OB} = \overline{BC} = x$.
$\overline{OC} = \overline{OE} = \overline{OD} = x + 2$

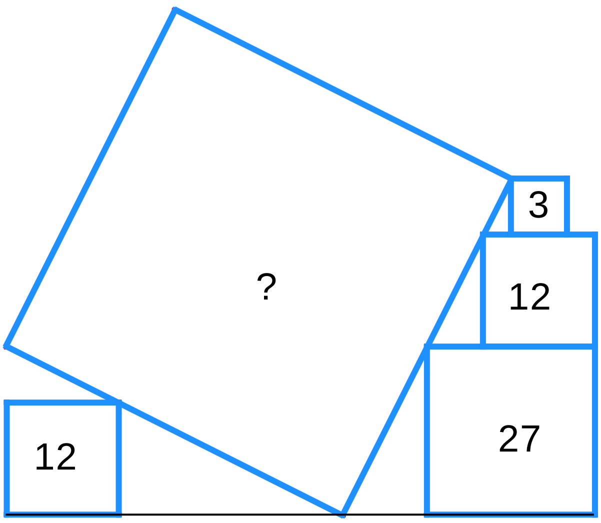
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:
$x + 2 = x\sqrt{2}$
$x = 2(1 + \sqrt{2})$

Siga $a = \overline{EG}$
$\overline{OF} = \overline{OG} = x + 2 + a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:
$x + 2 + a = (x + 2)\sqrt{2}$
$a = (\sqrt{2} - 1)(x + 2)$
$a = (\sqrt{2} - 1)2(2 + \sqrt{2})$
$a = 2\sqrt{2}$

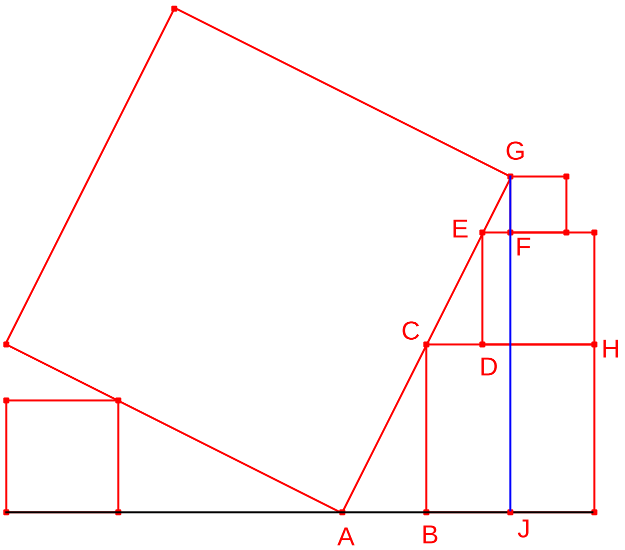
L'àrea del quadrat de costat $\overline{EG}$ és:
$S = a^2 = 8$

2477.- Calculeu l’àrea del quadrat desconegut.



Solució:
Els costats d’un quadrat són proporcionals a l’arrel quadrada de les àrees.
Siga $\overline{FG} = x, x^2 = 3$
Aleshores:
$\overline{DE} = \overline{DH} = 2x, \overline{BC} = \overline{CH} = 3x$
$\overline{CD} = \overline{CH} - \overline{DH} = x$

Siga J la projecció de G sobre la recta AB.
$\overline{JG} = 6x$

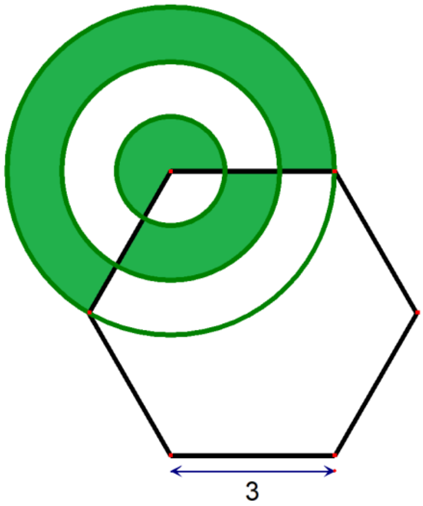


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{AJG}$ són semblants.
La proporció entre els catets és:
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{2x}{x} = 2$$
$$\overline{AJ} = \frac{1}{2}\overline{JG} = 3x$$

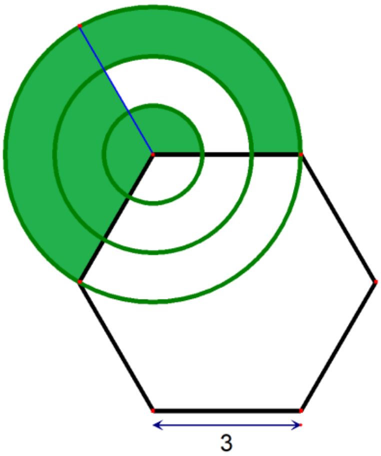
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJG}$:
$\overline{AG}^2 = (3x)^2 + (6x)^2 = 45x^2 = 45 \cdot 3 = 135$

L’àrea del quadrat desconegut és:
$S = \overline{AG}^2 = 135$

2478.- En un hexàgon regular de costat 3, amb un vèrtex com centre, s’han dibuixat tres circumferència igualment separades. Determineu l’àrea de la regió ombrejada.



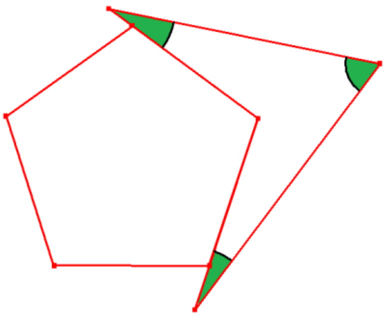
Solució:



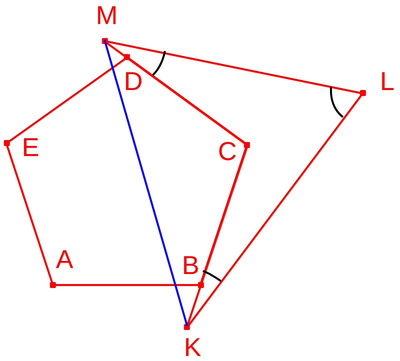
L’àrea ombrejada és igual a la suma de les àrees de:
Un sector circular de radi 3 i 240º, menys un sector circular de radi 2 i 120º, més l’àrea d’un sector circular de radi 1 i 120º.

$$S = \frac{2}{3}\pi 3^2 - \frac{1}{3}\pi 2^2 + \frac{1}{3}\pi 1^2 = 5\pi$$

2479.- En la figura hi ha dibuixat un pentàgon regular i un quadrilàter irregular.
Calculeu la suma dels angles marcats.



Solució:



Siga el pentàgon regular $ABCDE$.
L'angle interior és:
$\angle BCD = 108°$

Siguen $\alpha = \angle CKL, \beta = \angle KLM, \gamma = \angle LMC$

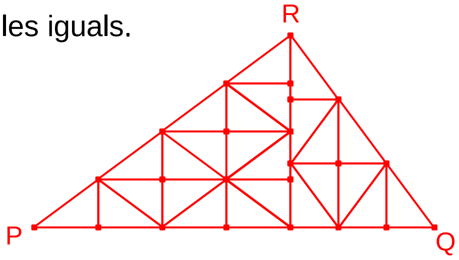
Siguen $\mu = \angle MKC, \theta = \angle KMC$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{KCM}$ és 180º
$\mu + \theta + 108° = 180°$

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és 180º
$\mu + \theta + \alpha + \beta + \gamma = 180°$

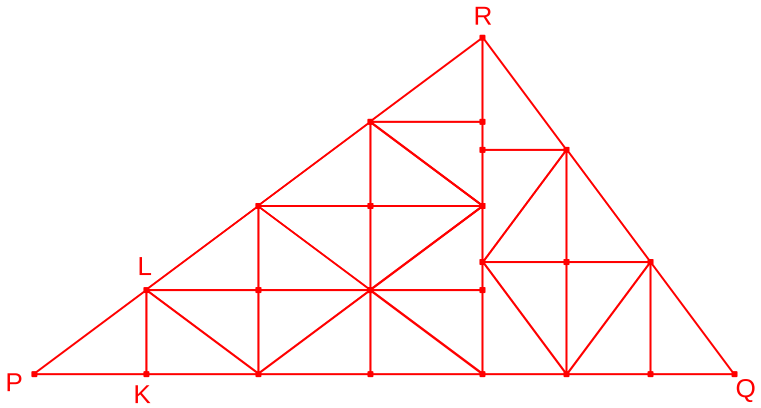
Aleshores:
$\alpha + \beta + \gamma = 108°$

2480.- El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ s'ha dividit en 35 triangles rectangles iguals.
Si la longitud de $\overline{RP} = 2.4\ cm$, calculeu la mesura de $\overline{PQ}$



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és rectangle $R = 90°$



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKL}$
Siga $\overline{PK} = x, \overline{KL} = y$
$\overline{PL} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{PQ} = 4x + 3y.$
$\overline{PR} = 4\sqrt{x^2 + y^2}, \overline{RQ} = 3\sqrt{x^2 + y^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQR}, \overset{\Delta}{PLK}$ són semblants.
La proporció entre els catets dels triangles és:

$$\frac{x}{y} = \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{3\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{3}$$

Aleshores:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{4}{5}$$

Aleshores,

$$\overline{PQ} = \frac{5}{4}\overline{PR} = \frac{5}{4} \cdot 2.4 = 3\ cm$$