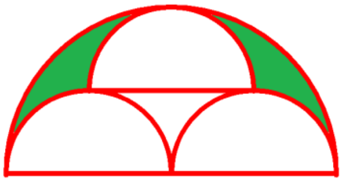
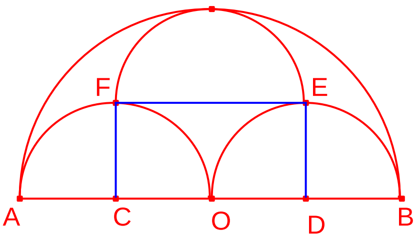
2481.- En la figura, s'han inscrit tres semicercles iguals en un semicercle més gran.
Calculeu la proporció de les àrees de la regió ombrejada i el semicercle gran.



Solució:
Siga $\overline{OA} = R$ el radi del semicercle exterior.
El radi dels semicercles inscrits és:

$$\overline{CA} = \frac{1}{2}R$$



L'àrea del semicercle exterior és:

$$S_e = \frac{1}{2}\pi R^2$$

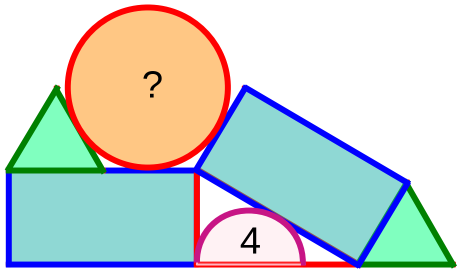
L'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del semicercle exterior menys la suma de una circumferència de radi $\frac{1}{2}R$ i del quadrat $CDEF$.

$$S_o = \frac{1}{2}\pi R^2 - \left(\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}R^2\right) = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)R^2$$

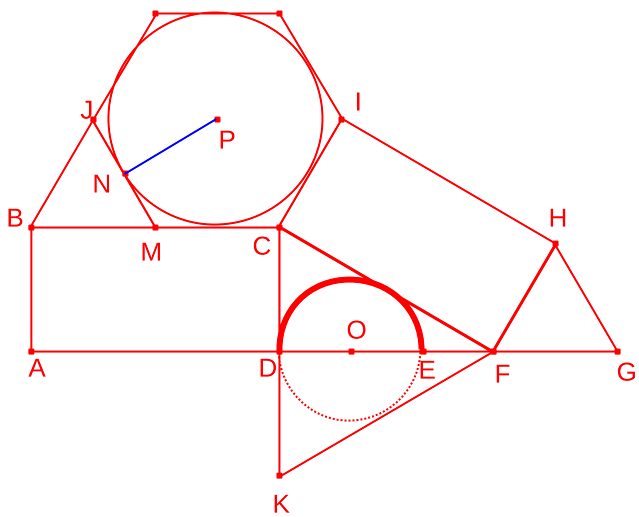
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_o}{S_e} = \frac{\frac{\pi - 2}{4}}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\pi - 2}{2\pi} \approx 0.1817$$

2482.- En la figura, hi ha dos triangles equilàters, dos rectangles tals que la llargada és el doble que l'amplada, un semicercle d'àrea 4 i un cercle. Determineu l'àrea del cercle.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = x, \overline{AD} = 2x$
Notem que:
$\overline{CD} = x, \overline{CF} = 2x, \angle DCF = 60°$

La circumferència de centre O d'àrea 8 està inscrita en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CFK}$ de costat $\overline{CF} = 2x$

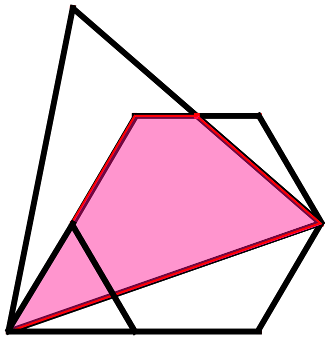
$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{DF} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2x = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, radi del semicercle.

La circumferència de centre P està inscrita en un hexàgon regular de costat $\overline{CM} = x$

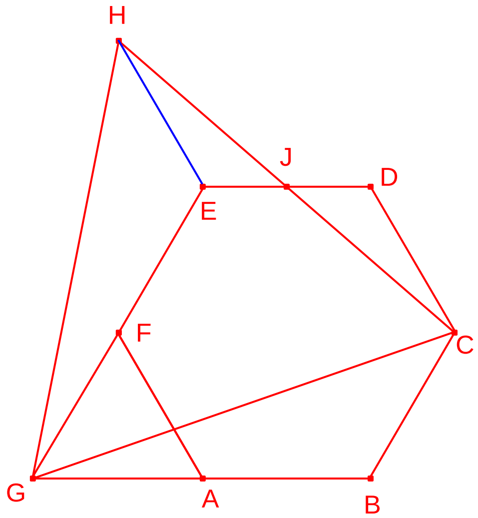
El radi és:
$$\overline{PN} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

La proporció entre les àrees de dues circumferències és proporcional al quadrat dels radis:
$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{S_P}{8} = \left(\frac{\overline{PN}}{\overline{OD}}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
Aleshores, l'àrea de la circumferència que cerquem és:
$$S_P = 8 \cdot \frac{9}{4} = 18$$

2483.- La figura conté dos triangles equilàters i un hexàgon regular.
Calculeu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 1$.
L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}1^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{GBC}$:

$$\overline{GC}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot cos120°$$

$$\overline{GC} = \sqrt{7}$$

$$\angle CGB = \angle EGH$$

$$\overline{GB} = \overline{GE} = 2, \overline{GC} = \overline{GH}$$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{GBC}, \overset{\Delta}{GEH}$ són iguals (CAC)
Aleshores,

$$\overline{HE} = 1, \angle GGH = \angle GBC = 120°$$

$$\angle HED = 120°, \angle EHJ = \angle EGH$$

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{HEJ}, \overset{\Delta}{GEH}$ són semblants i de raó 1:2

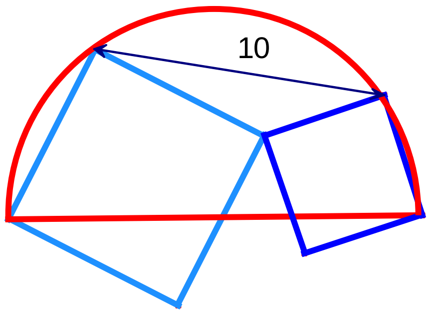
L'àrea del quadrilàter $GCJE$ és igual a l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{GBH}$ menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{GEH}, \overset{\Delta}{HEJ}$.

$$S_{GCJE} = S_{GBH} - \frac{5}{4}S_{GEH} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{7}\right)^2 - \frac{5}{4}1 \cdot 2 \cdot \sin 120° = \frac{9\sqrt{3}}{8}$$

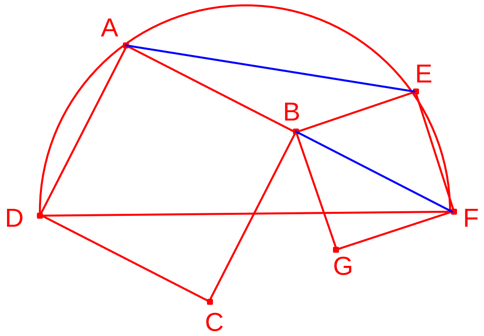
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{GCJE}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{8}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4}$$

2484.- Calculeu l'àrea del semicercle de la figura sabem que la distància entre els dos dels vèrtex dels quadrats és 10.



Solució:

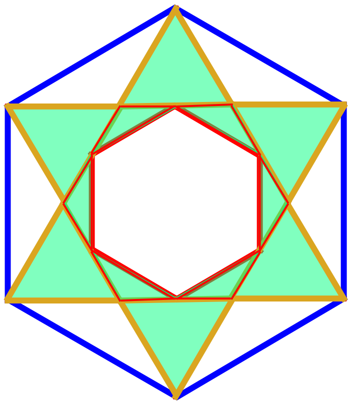


Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = a$
Siga BEFG el quadrat de costat $\overline{BE} = b$
La recta AB passa pel punt F ja que $\angle DAB = 90°$ (angle inscrit que abraça el diàmetre)
$\angle ABE = 135°$

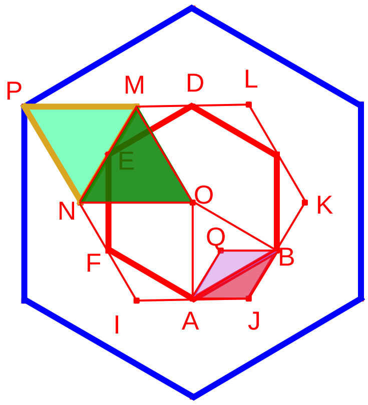
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$
$10^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 135°$
$100 = a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAF}$
$\overline{DF}^2 = a^2 + \left(a + b\sqrt{2}\right)^2$
El radi al quadrat del semicercle és:
$$\left(\frac{\overline{DF}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + \left(a + b\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}\right) = 50$$
L'àrea del semicercles és:
$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\overline{DF}}{2}\right)^2 = 25\pi$$

2485.- Els hexàgons regulars interior i exterior tenen el mateix centre i els costats paral·lels.
L'àrea de l'hexàgon interior és 18.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga O el centre dels hexàgons interior i exterior.
Siga l'hexàgon interior $ABCDEF$ d'àrea 18.
Siga l'Hexàgon $IJKLMN$ circumscrit a l'hexàgon $ABCDEF$.



$$S_{PMN} = S_{OMN} = \frac{1}{6} S_{IJKLMN}$$

$$S_{AJB} = S_{AQB} = \frac{1}{3} S_{AOB} = \frac{1}{18} S_{ABCDEF}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 6 \cdot S_{PMN} + 6 \cdot S_{AJB} = S_{IJKLMN} + \frac{1}{3} S_{ABCDEF}$$

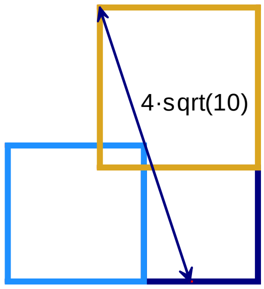
La proporció entre les àrees dels hexàgons $ABCDEF, IJKLMN$ és igual a la proporció entre els quadrats dels costats

$$\frac{S_{IJKLMN}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{\overline{JK}}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{OJ}}{\overline{OA}}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

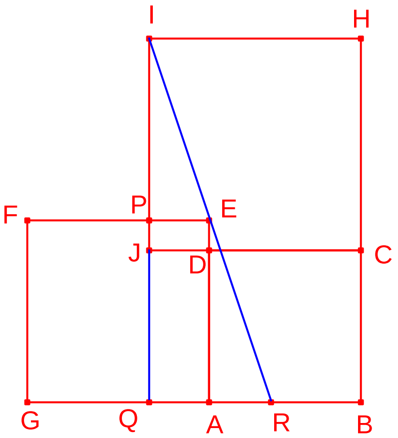
$$S_{IJKLMN} = 18 \cdot \frac{4}{3} = 24$$

$$S_{ombrejada} = S_{IJKLMN} + \frac{1}{3} S_{ABCDEF} = 24 + 6 = 30$$

2486.- La figura està formada per tres quadrats els costats dels quals són 3 naturals consecutius. Calculeu l'àrea total de la figura.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = a$
Siga $AEFG$ el quadrat de costat $\overline{AE} = a + 1$
Siga $CHIJ$ el quadrat de costat $\overline{CH} = a + 2$



$\overline{DE} = \overline{JP} = 1, \overline{JD} = \overline{PE} = 2$
$\overline{QI} = 2a + 2, \overline{IR} = 4\sqrt{10}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{IQR}$:
$\overline{QR} = \sqrt{160 - 4(a+1)^2}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IPE}, \overset{\Delta}{IQR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

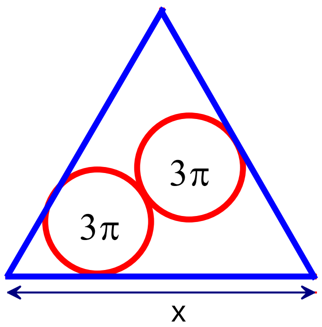
$$\frac{a+1}{2(a+1)} = \frac{2}{\sqrt{160 - 4(a+1)^2}}$$

Simplificant:
$(a+1)^2 = 36$
$a = 5$

L'àrea de la figura és la suma de les àrees dels tres quadrats menys l'àrea del rectangle $DEPJ$.

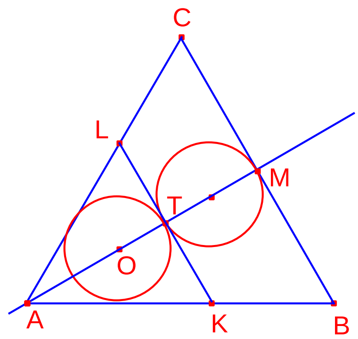
$S = 5^2 + 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 1 = 108$

2487.- Determineu la mesura del costat del triangle equilàter si els dos cercles tangents tenen cadascú, àrea 3π.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = x$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$
Siga $\overline{OT} = r$ radi de la circumferència.



Considerant el equilàter $\overset{\Delta}{AKL}$
El centre O de la circumferència és el baricentre.
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{OA} = 2 \cdot \overline{OT} = 2r$

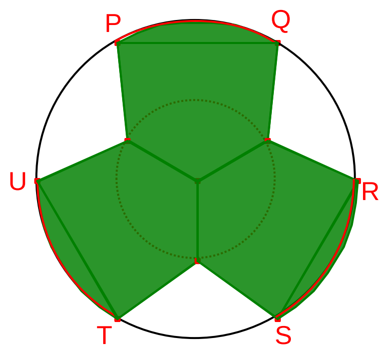
$\overline{AM} = 5r = \frac{\sqrt{3}}{2}c$

L'àrea del cercle de centre O és 3π, aleshores:
$\pi r^2 = 3\pi$
Per tant, $r = \sqrt{3}$

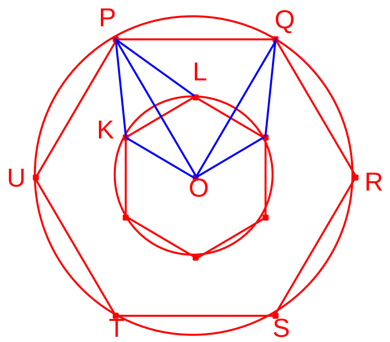
$$c = \frac{10\sqrt{3}}{3}r = 10$$

2488.- En la figura, els sis punt P, Q, R, S, T i U estan igualment separats al voltant d'una circumferència de radi 2 cm.
La circumferència interior té radi 1 cm.
La imatge ombrejada té tres eixos de simetries.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

UKMT, intemediate, 2020



Solució:

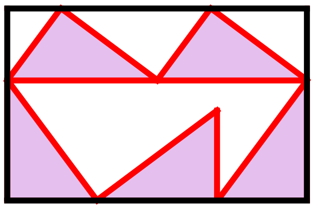


Els punts formen l'hexàgon regular PQRSTU inscrit en la circumferència de radi 2.
La figura està formada per 3 sectors de 60º i radi 2 i tres cometes PKOL de diagonals $\overline{KL} = 1, \overline{OP} = 2$

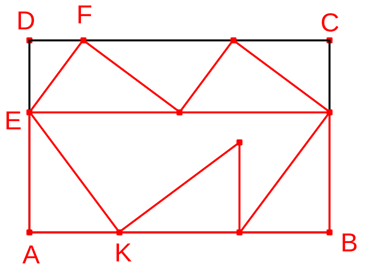
L'àrea és:

$$S = 3\left(\frac{1}{6}\pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\right) = 2\pi + 3 \approx 9.28\ cm^2$$

2489.- En la figura, cinc triangles iguals s'han inscrit en un rectangle.
Determineu la proporció entre les àrees de la zona ombrejada pels triangles i el rectangle.



Solució:



Els cinc triangles són rectangles
Siga el rectangle exterior $ABCD$.
Siga $\overline{AK} = a, \overline{AE} = b$ catets dels triangles.

Apliant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$:

$\overline{EK} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{AB} = 2a + b = 2\sqrt{a^2 + b^2}$

Simplificant:

$b = \frac{4}{3}a$

Aleshores,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EK}} = \frac{4}{5}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKE}, \overset{\Delta}{DFE}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{DE} = \frac{4}{5}a$$

$$\overline{AB} = 2a + b = 2a + \frac{4}{3}a = \frac{10}{3}a$$

$$\overline{AD} = b + \overline{DE} = \frac{4}{3}a + \frac{4}{5}a = \frac{32}{15}a$$

L'àrea del rectangle $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{10}{3}a \cdot \frac{32}{15}a = \frac{64}{9}a^2$$

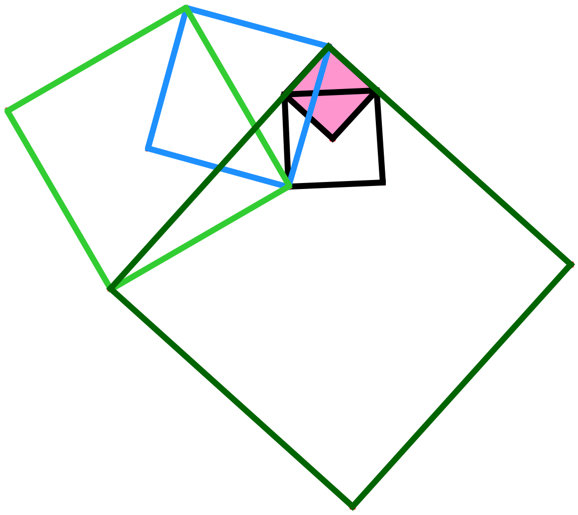
L'àrea de la regió ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 5 \cdot S_{AKE} = 5 \cdot \frac{1}{2}ab = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3}a^2 = \frac{10}{3}a^2$$

La proporció entre les àrees és:

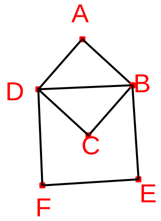
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{10}{3}a^2}{\frac{64}{9}a^2} = \frac{15}{32}$$

2490.- Determineu la proporció entre el quadrat menut ombrejat i el quadrat gran.



Solució

Siga 1 l'àrea del quadrat menut $ABCD$.



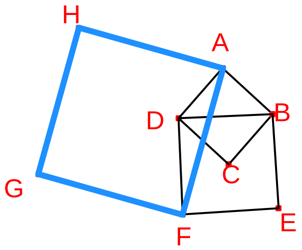
[ABCD]=1

[BEFD]=2

$\angle ACF = 135°$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACF}$

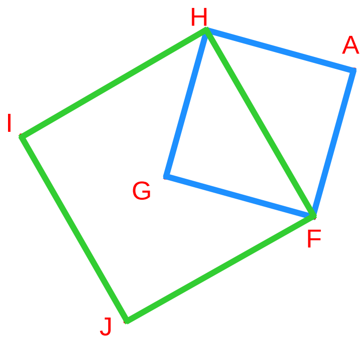
$$\overline{AF}^2 = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 5$$



[ABCD]=1

[BEFD]=2

[AFGH]=5

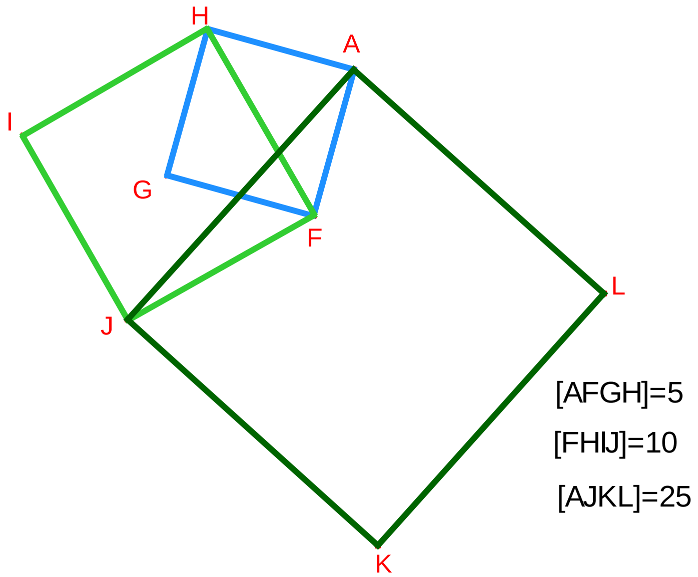


[AFGH]=5

[FHIJ]=10

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AFJ}$

$$\overline{AJ}^2 = 5 + 10 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 25$$



L'àrea del rectangle gran és 25.

La proporció entre les àrees és $\frac{1}{25}$