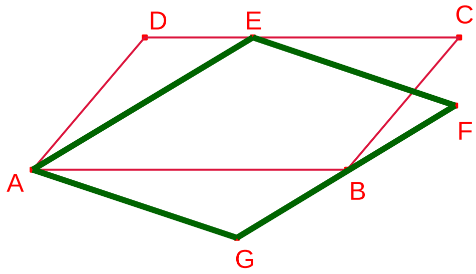
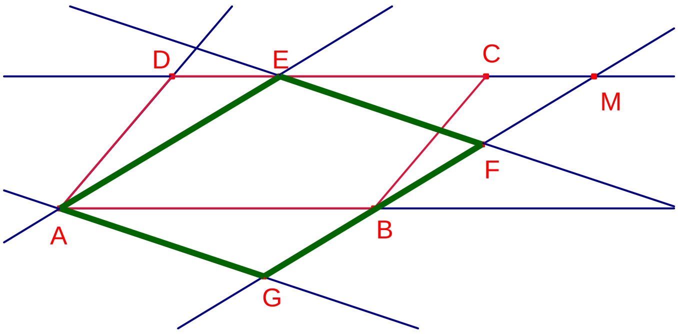
Problemes de Geometria per a l'ESO 25

241.- Siga el paral·lelogram ABCD.
Siga E un punt sobre el costat $\overline{CD}$.
Dibuixem el paral·lelogram AEFG tal que B pertany a $\overline{FG}$.
Proveu que el dos paral·lelograms tenen la mateixa àrea.



Solució:

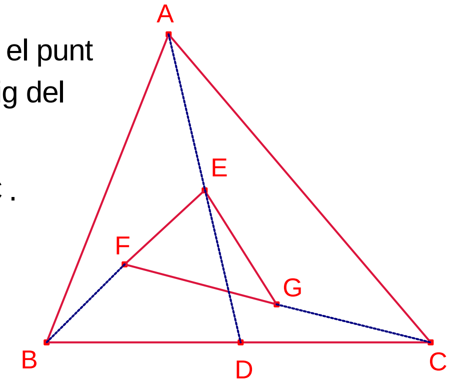


Siga M la intersecció de les rectes DC i GF.

Els paral·lelograms ABCD, ABME tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores tenen la mateixa àrea.

Els paral·lelograms ABME, AGFE tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores tenen la mateixa àrea.

Aleshores, els paral·lelograms ABCD, AGFE tenen la mateixa àrea.



242.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siguen D el punt mig del costat $\overline{BC}$, E el punt mig del segment $\overline{AD}$, F el punt mig del segment $\overline{BE}$ i G el punt mig del segment $\overline{CF}$.

Determineu la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{EFG}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. $S_{ADC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

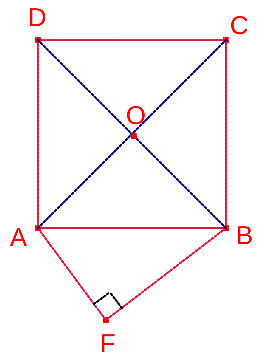
$S_{AECD} = \frac{1}{2} S_{ADC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$. $S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABD} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

$S_{BEC} = S_{ABC} - (S_{ABE} + S_{AEC}) = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

$S_{EFC} = \frac{1}{2} S_{BEC} = \frac{1}{4} S_{ABC}$.

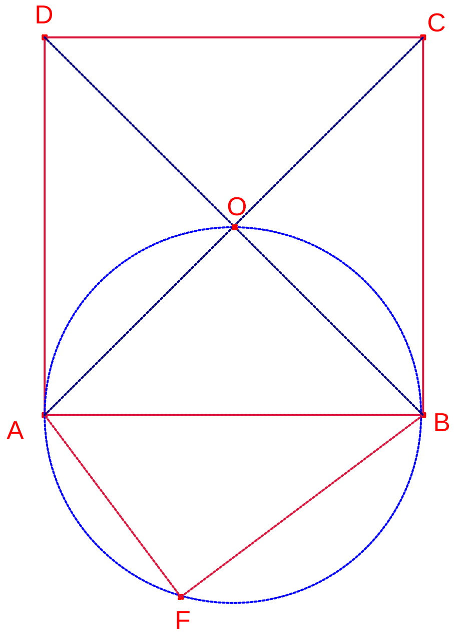
$S_{EFG} = \frac{1}{2} S_{EFC} = \frac{1}{8} S_{ABC}$. Aleshores, $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{1}{8}$.

243.- Sobre l'exterior del costat $\overline{AB}$ del quadrat ABCD com hipotenusa s'ha dibuixat el triangle $\overset{\Delta}{ABF}$. Si $\overline{AF}=6$, $\overline{BF}=8$. Siga O la intersecció de les diagonals del quadrat ABCD. Calculeu la mesura del segment $\overline{OF}$.

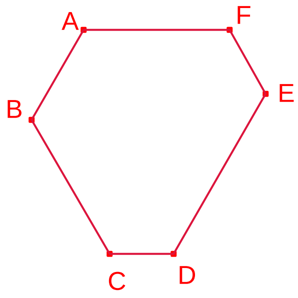


Solució:

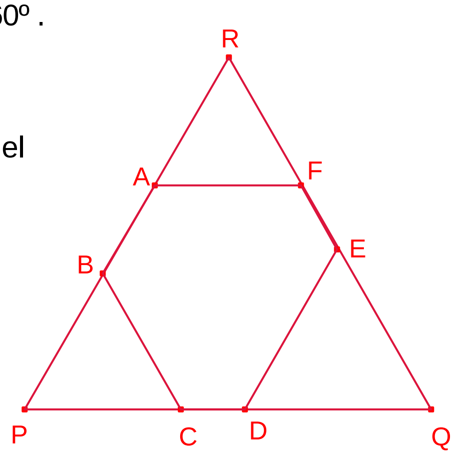
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\overline{AB}=10$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:
$\overline{OA}=\overline{OB}=5\sqrt{2}$.
Notem que el quadrilàter AFBO és inscriptible ja que els angles O i F són suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu:
$\overline{OA}\cdot\overline{BF}+\overline{OB}\cdot\overline{AF}=\overline{AB}\cdot\overline{OF}$.
$5\sqrt{2}\cdot 8+5\sqrt{2}\cdot 6=10\cdot\overline{OF}$. Resolent l'equació:
$\overline{OF}=7\sqrt{2}$.



244.- En l'hexàgon ABCDEF tots els angles són iguals.
Proveu que $\overline{AB}+\overline{AF}=\overline{CD}+\overline{DE}$.

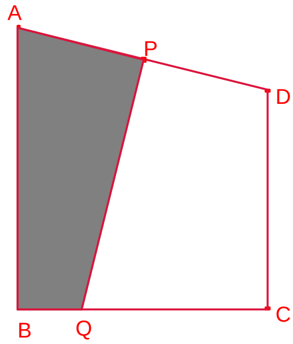


Solució:
Si prolonguem els costats $\overline{AB},\overline{CD}$ s'intersecten en el punt P.
Notem que $\angle PBC=180º-120º=60º$, $\angle PCB=180º-120º=60º$.
Aleshores, el triangle $B\overset{\Delta}{C}P$ és equilàter.



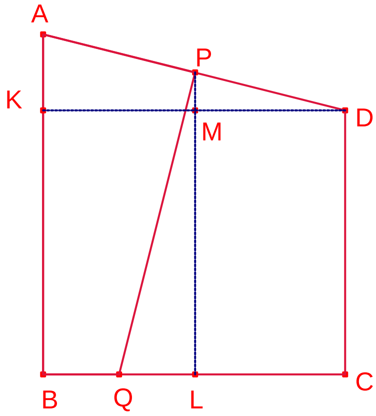
Anàlogament, si prolonguem els costats $\overline{AB},\overline{CD},\overline{EF}$ es forma el triangle equilàters $D\overset{\Delta}{E}Q$, $A\overset{\Delta}{F}R$, $P\overset{\Delta}{Q}R$.

Aleshores:
$\overline{AB}+\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{AR}=\overline{PR}-\overline{PB}$.
$\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{DQ}=\overline{PQ}-\overline{PC}=\overline{PR}-\overline{PB}$.
Aleshores, $\overline{AB}+\overline{AF}=\overline{CD}+\overline{DE}$.



245.- En la figura $\overline{PQ}$ és la mediatriu del segment $\overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ i $\overline{DC} \perp \overline{BC}$.
Si $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 8$ i $\overline{CD} = 7$, calculeu l'àrea del quadrilàter APQB.

Solució:
ABCD és un trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}, \overline{CD}$.



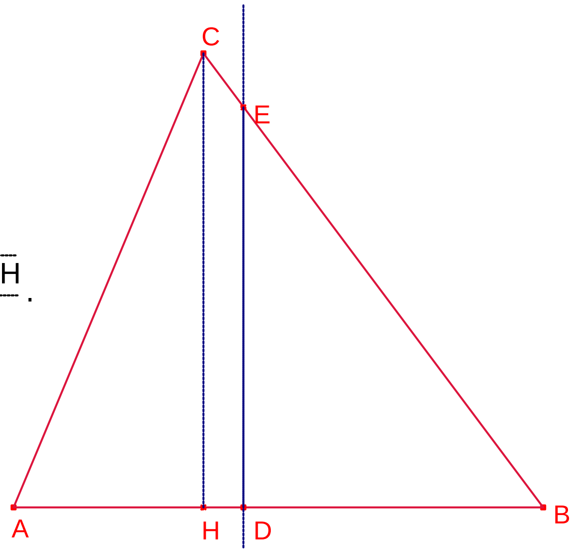
Siga K la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$.
$\overline{PL}$ és la paral·lela mitjana a les bases, aleshores:
$\overline{PL} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = 8$, $\overline{BL} = \overline{LC} = \frac{\overline{BC}}{2} = 4$.
Per tant, $\overline{KM} = \overline{MD} = 4$.
$\overline{AK} = \overline{AB} - \overline{CD} = 2$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}$, $\overset{\Delta}{PMD}$ són semblants i de raó 2:1. Aleshores:
$\overline{PM} = 1$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QLP}$, $\overset{\Delta}{PMD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{PM}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{QL}}{\overline{PL}}$, $\frac{1}{4} = \frac{\overline{QL}}{8}$. Aleshores, $\overline{QL} = 2$.

$$S_{QCDP} = S_{QLP} + S_{LCDP} = \frac{2 \cdot 8}{2} + \frac{(8+7)4}{2} = 38.$$

$$S_{ABCD} = \frac{(9+7)8}{2} = 64.$$

$$S_{APQB} = S_{ABCD} - S_{QCDP} = 64 - 38 = 26.$$

246.- Siga el triangle de costats 13, 14, 15. Una recta perpendicular al costat que mesura 14 divideix el triangle en dues regions d'igual àrea.
Calculeu la mesura del segment interior al triangle, de la perpendicular anterior.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = 13, \overline{AB} = 14, \overline{BC} = 15$.

Siga $\overline{DE} = x$ el segment que cerquem.

Siga $\overline{BD} = y$.

Siga $\overline{CH}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
Aplicant l'àrea del triangle:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} = \frac{c \cdot \overline{CH}}{2}.$$

$\frac{\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}}{4} = \frac{14 \cdot \overline{CH}}{2}$. Aleshores, $\overline{CH} = 12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHB}$:

$\overline{BH} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CHB}$, $\overset{\Delta}{EDB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{12}{9} = \frac{x}{y} \qquad (1)$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EDB}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{xy}{2} = \frac{84}{2} \qquad (2)$$

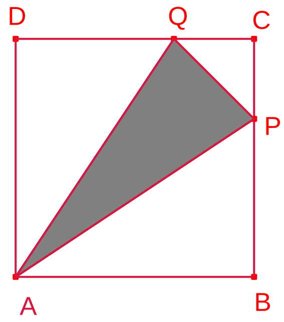
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} \frac{12}{9} = \frac{x}{y} \\ \frac{xy}{2} = \frac{84}{2} \end{cases}$ la solució del qual és, $\begin{cases} x = 4\sqrt{7} \\ y = 3\sqrt{7} \end{cases}$. Aleshores, $\overline{DE} = 4\sqrt{7}$.

247.- Siga el quadra ABCD de costat c.
Siga P en el costat $\overline{BC}$ i Q en el costat $\overline{CD}$ tal que les rectes AP i AQ divideixen el quadrat en tres figures d'igual àrea.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.
OMA. Fase regional 2010.

Solució:
Notem que P i Q són simètrics respecte de la recta AC.



Siga $x = \overline{BP} = \overline{DQ}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és la tercera part del quadrat ABCD, aleshores:

$$\frac{cx}{2} = \frac{1}{3}c^2$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{2}{3}c.$$

Aleshores, $\overline{CP} = \overline{CQ} = \frac{1}{3}c$.

L'àrea del quadrilàter APCQ és la tercera part del quadrat ABCD, aleshores:

$$S_{APCQ} = \frac{1}{3}c^2.$$

$$S_{PCQ} = \frac{\frac{1}{3}c \cdot \frac{1}{3}c}{2} = \frac{1}{18}c^2.$$

$$S_{APQ} = S_{APCQ} - S_{PCQ} = \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{18}c^2 = \frac{5}{18}c^2.$$

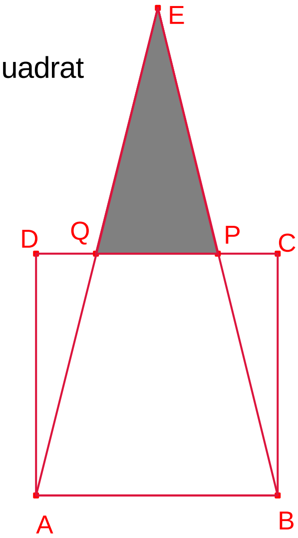
248.- Siguen el quadrat ABCD de costat c i el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overline{AE} = \overline{BE}$ superposat al quadrat.

La intersecció de les àrees del quadrat i del triangle és igual a $\frac{3}{4}$ de l'àrea del quadrat.

Calculeu l'àrea de la porció de triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ exterior al quadrat.
OMA fase regional 2010.

Solució:

Siguen P i Q la intersecció del quadrat ABCD i el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.
Siga $x = \overline{CP} = \overline{DQ}$.



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$ és la vuitena part de l'àrea del quadrat ABCD, aleshores:

$$\frac{cx}{2} = \frac{1}{8}c^2.$$

Resolent l'equació en la incògnita x:

$$x = \frac{1}{4}c.$$

Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{QPE}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1, aleshores la raó entre les àrees és 4:1.

$$S_{ABE} = 4S_{QPE}.$$

$$S_{ABE} = S_{ABPQ} + S_{QPE}.$$

Igualant les àrees:

$$4S_{QPE} = S_{ABPQ} + S_{QPE}.$$

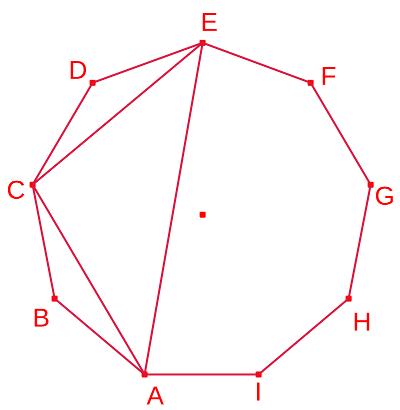
$$4S_{QPE} = \frac{3}{4}c^2 + S_{QPE}.$$

$$3S_{QPE} = \frac{3}{4}c^2.$$

$$S_{QPE} = \frac{1}{4}c^2.$$

249.- En un polígon regular de 9 costats, de costat c, calculeu la diferència entre la diagonal major i la diagonal menor del polígon.
OMA 26 regional.

Solució:
Siga ABCDEFGHI el polígon regular de 9 costats de costat $c=\overline{AB}$.
Una de les diagonals majors és $D=\overline{AE}$.
Una de les diagonals menors és $d=\overline{AC}$.

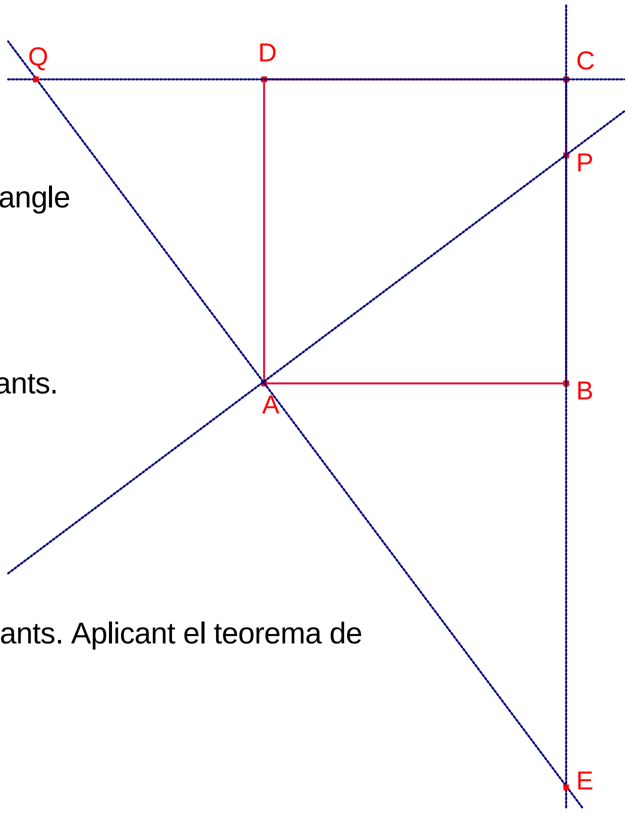


$$\angle BAC=\frac{\frac{360^\circ}{9}}{2}=20^\circ,\ \angle ABC=180^\circ-2\angle BAC=140^\circ.$$
$\angle CAE=2\angle BAC=40^\circ$.
$\angle ECA=5\angle BAC=100^\circ$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACE}$:
$$\frac{d}{\sin 40^\circ}=\frac{D}{\sin 100^\circ}=\frac{D-d}{\sin 100^\circ-\sin 40^\circ}.$$
$$\frac{d}{\sin 40^\circ}=\frac{D-d}{2\cdot\cos 70^\circ\cdot\sin 30^\circ}.$$
$$\frac{d}{\sin 40^\circ}=\frac{D-d}{\cos 70^\circ}.$$
$$\frac{d}{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}=\frac{D-d}{\sin 20^\circ}.$$
$$D-d=\frac{d}{2\cdot\cos 20^\circ} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$$\frac{c}{\sin 20^\circ}=\frac{d}{\sin 140^\circ}.$$
$$\frac{c}{\sin 20^\circ}=\frac{d}{\sin 40^\circ}.$$
$$\frac{c}{\sin 20^\circ}=\frac{d}{2\cdot\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ}.$$
$$d=2\cdot\cos 20^\circ\cdot c \qquad (2)$$
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):
$$D-d=\frac{2\cdot\cos 20^\circ\cdot c}{2\cdot\cos 20^\circ}.$$
$D-d=c$.

250.- Siga el quadrat ABCD de costat 16.
Siga P un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{AP}=20$.
La recta perpendicular al segment $\overline{AP}$ que passa per A, talla la prolongació del costat $\overline{CD}$ en el punt Q.
Calculeu la mesura del segment $\overline{DQ}$.
OMA 26 intercolegial.



Solució:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{BP}=12$.
Les rectes AQ, BC es tallen en el punt E.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{EBA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}$, $\frac{12}{16}=\frac{16}{\overline{BE}}$. Aleshores:
$\overline{BE}=\frac{64}{3}$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QDA}$, $\overset{\Delta}{QCE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{DQ}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{CQ}}{\overline{EC}}$.
$\frac{\overline{DQ}}{16}=\frac{16+\overline{DQ}}{16+\frac{64}{3}}$. Resolent l'equació:
$\overline{DQ}=12$.