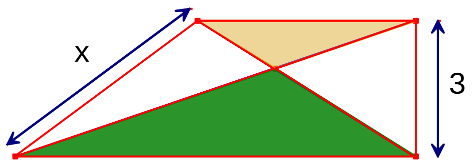
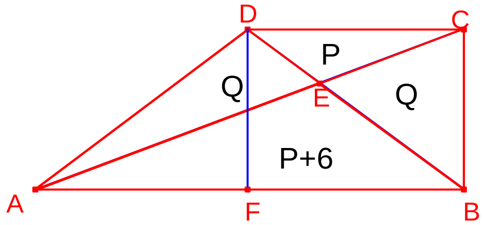
2491.- En la figura6 el triangle verd del trapezi rectangle té 6 unitats quadrades més que el triangle ocre.
L'altura del trapezi és 3.
Determineu la mesura de l'altre costat no paral·lel.



Solució:
Siga el trapezi $ABCD$, $\overline{AB} = b, \overline{CD} = a, \overline{BC} = 3, \overline{AD} = x, B = C = 90°$

Siga $S_{CDE} = P, S_{ABE} = P + 6$
Siga $S_{ADE} = S_{BCE} = Q$



Els triangles $\overset{\Delta}{CDE}, \overset{\Delta}{ABD}$ tenen la mateixa altura.
Les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{P+Q}{a} = \frac{P+Q+6}{b} = \frac{6}{b-a}$$

$$P + Q = \frac{6a}{b-a}$$

L'àrea del trapezi és:

$$2(P+Q) + 6 = \frac{a+b}{2}3$$

$$2\left(\frac{6a}{b-a}\right) + 6 = \frac{a+b}{2}3$$

$$\frac{6(a+b)}{b-a} = \frac{3}{2}(a+b)$$

Simplificant:

$$b - a = 4$$

Siga F la projecció de D sobre la base $\overline{AB}$

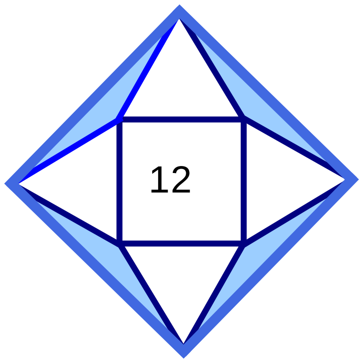
$$\overline{AF} = b - a = 4$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AFD}$

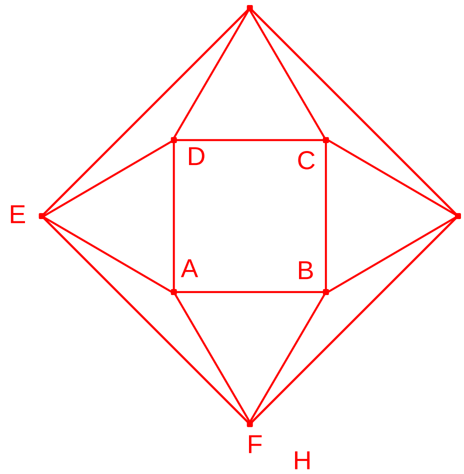
$$x = 5$$

Notem que el resultat no depèn de la llargària de a

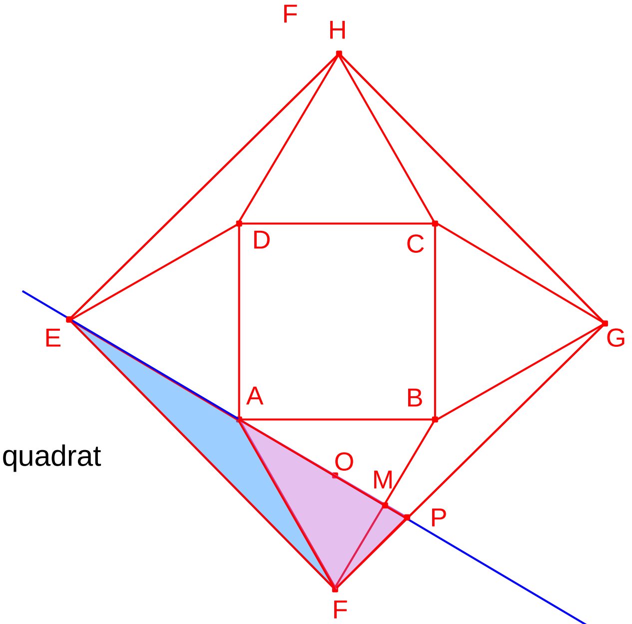
2492.- S’han dibuixat quatre triangle equilàters exteriors a un quadrat d’àrea 12.
Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



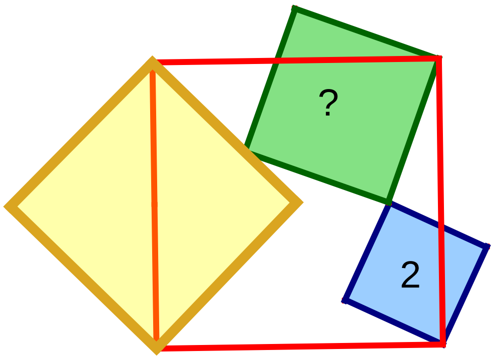
Solució 1:
Siga el quadrat ABCD d’àrea $\overline{AB}^2 = 12$
$\angle EAF = 150°$
L’àrea ombrejada és:
$S = 4 \cdot S_{AEF} = 4 \cdot \frac{1}{2}\overline{AB}^2 \cdot \sin 150° = 12$



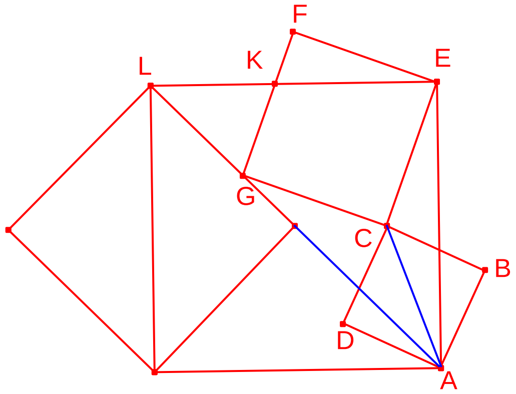
Solució 2:
Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABF}$
$\angle EAF = 150°, \angle OAF = 30°$
Aleshores, els punts E, A, O, estan alineats.
$\angle AFG = 75°$
Siga P la intersecció de la recta EA i $\overline{FG}$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BF}$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AFP}$ és isòsceles.
$\overline{AP} = \overline{AB}$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{EAF}, \overset{\Delta}{APF}$ tenen la mateixa àrea.
$\overline{FM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
Aleshores l’àrea ombrejada és igual a l’àrea del quadrat $ABCD$.



2493.- Calculeu l'àrea del quadrat verd, dels quatre quadrats dibuixats, sabent que el blau té àrea 2.



Solució:



$\overline{AC} = 2$, diagonal del quadrat $ABCD$.

Siga $\overline{CD} = a$, costat del quadrat $CEFG$.
Siguen $\angle CDA = \alpha, CAD = \beta$

Aleshores:
$\angle LEF = \alpha, \angle CGA = 45° - \alpha$
$\angle DAG = \beta, \angle GAC = 45° - \beta$

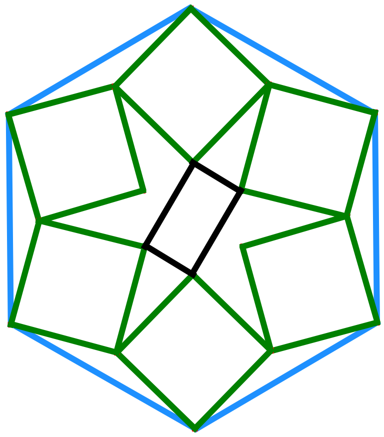
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACE}$:
$$\frac{a}{\sin\beta} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACG}$:
$$\frac{a}{\sin(45° - \beta)} = \frac{2}{\sin(45° - \alpha)}$$
Dividint les dues expressions:
$$\frac{\sin\beta}{\sin\,(45° - \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(45° - \alpha)}$$

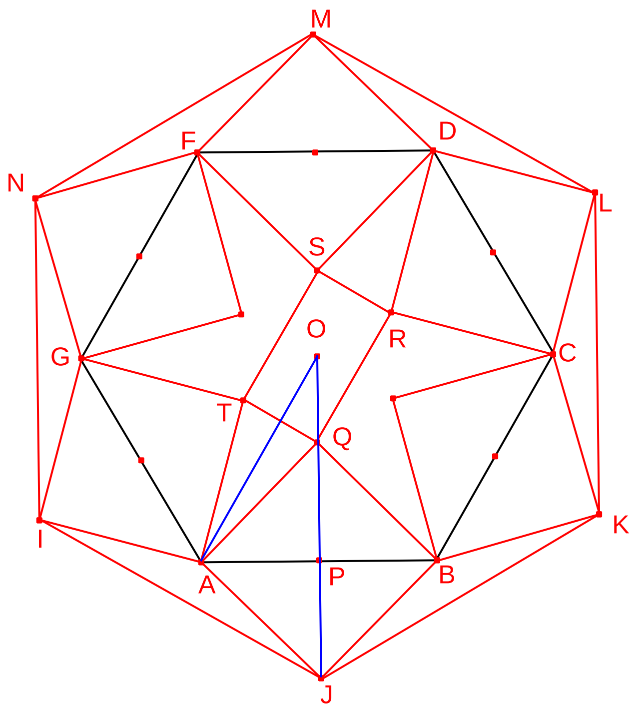
$$\frac{\sin\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\beta + \sin\ \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\ \alpha)}$$
Simplificant:
$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta + \sin\ \beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\ \alpha}$$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha = 0$
$\sin(\alpha - \beta) = 0$
Aleshores, $\alpha = \beta$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACE}$ és isòsceles:
$\overline{CE} = \overline{AC} = 2$
L'àrea del quadrat $CEFG$ és:
$S_{CEFG} = 2^2 = 4$

2494.- En la figura, dins d'un hexàgon regular s'han dibuixat sis quadrats iguals i un rectangle. Determineu la proporció entre la suma de les àrees dels quadrats i el rectangle i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:



Siga $x = \overline{AJ}$ costat del quadrat $AJBQ$.

$\overline{AB} = x\sqrt{2}$

Siga P el centre del quadrat $AJBQ$.

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$\overline{TQ} = \overline{OQ} = \overline{OP} - \overline{PQ} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x, \overline{QR} = \sqrt{3}\cdot\overline{OQ} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}x$$

$$\overline{OJ} = \overline{OP} + \overline{PJ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}x$$

L'àrea de l'hexàgon exterior $IJKLMN$ és:

$$S_{IJKLMN} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{OJ}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 x^2 = \frac{3}{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)x^2$$

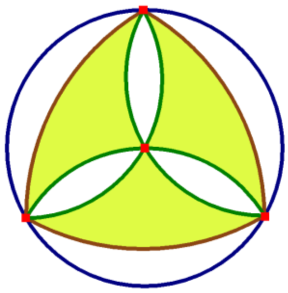
L'àrea de la suma dels sis quadrats i del rectangle $QRST$ és:

$$S = 6x^2 + \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}x}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}x\right) = \left(3+2\sqrt{3}\right)x^2$$

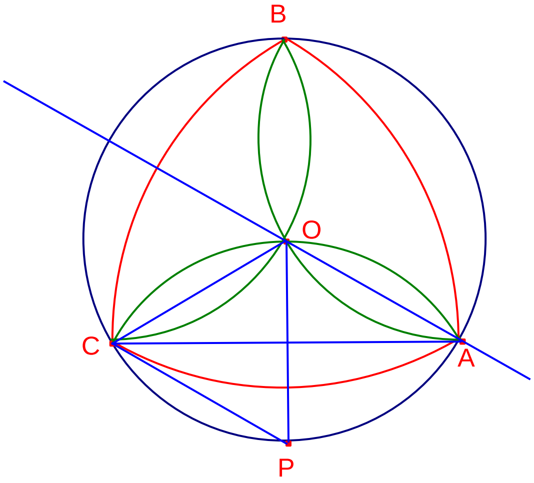
La proporció entre els volums és:

$$\frac{S}{S_{IJKLMN}} = \frac{2}{3}$$

2495.- Quina proporció de cercle té la regió ombrejada. Els tres punts de la circumferència estan igualment separats al voltant de la circumferència. Aquest punts són centres de tres arcs. Els altres arcs passen pel centre de la circumferència.



Solució:



Siga en cercle exterior de centre O i radi $\overline{OA} = 1$

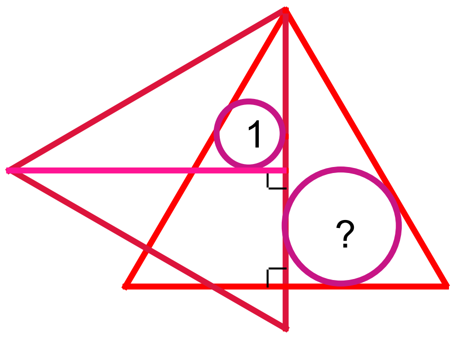
L'àrea ombrejada és igual a 6 vegades un sector de 30º i radi $\overline{AC} = \sqrt{3}$, menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$, més 6 vegades un sector de 60º i radi $\overline{PC} = 1$, més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOC}$.
Per tant l'àrea ombrejada és 6 vegades un sector de 30º i radi $\overline{AC} = \sqrt{3}$ menys 6 vegades un sector de 60º i radi $\overline{PC} = 1$

$$S_{ombrejada} = 6\left(\frac{1}{12}\pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2\right) - 6\left(\frac{1}{6}\pi \cdot 1^2\right) = \frac{1}{2}\pi$$

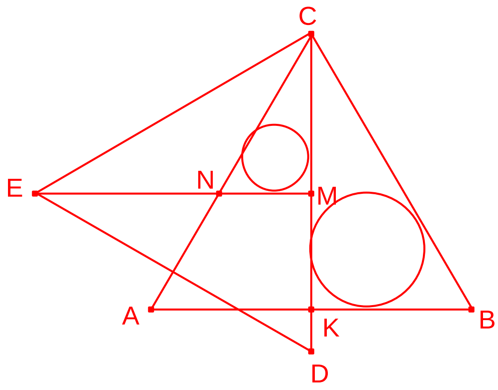
L'àrea del cercle és:
$S = \pi \cdot 1^2 = \pi$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S}{S_{ombrejada}} = \frac{1}{2}$$

2496.- En la figura, hi ha dos triangles equilàters iguals
Un cercle té àrea 1.
Calculeu l'àrea del cercle gran.



Solució:



Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{CDE}$ de costat $\overline{AB} = \overline{CD} = c$
Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga M el punt mig de costat $\overline{CD}$

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}c, \overline{CK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

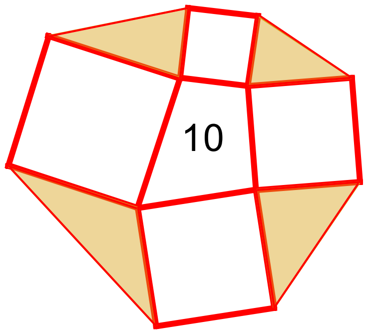
Els triangles $\overset{\Delta}{CMN}, \overset{\Delta}{CKB}$ són semblants.
Aleshores, les àrees de les circumferències inscrites són semblants al quadrat dels cotats corresponents.

Siga S l'àrea de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CKB}$

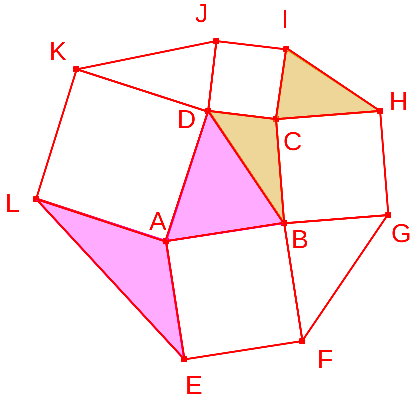
$$\frac{S}{1} = \left(\frac{\overline{CK}}{\overline{CM}}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Aleshores:
$S = 3$

2497.- Sobre els costats d'un quadrilàter d'àrea 10 i cap a l'exterior s'han dibuixat quatre quadrats.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:

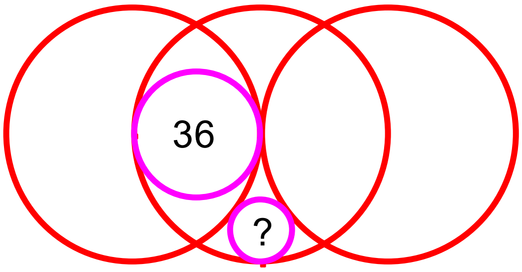


$\overline{BC} = \overline{CH}, \overline{CD} = \overline{CI}, \angle BCD = 180° - \angle ICH$
Aleshores:
$S_{ICH} = S_{BCD}$
Anàlogament:
$S_{EAL} = S_{ABC}$
Sumant les dues expressions:

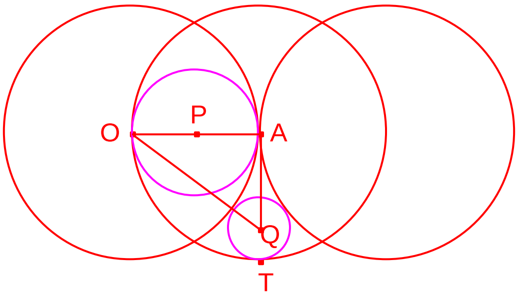
$S_{ICH} + S_{EAL} = S_{BCD} + S_{ABC} = S_{ABCD} = 10$
Anàlogament:
$S_{FBG} + S_{JDK} = 10$

Sumant les dues darreres expressions:
$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{ABCD} = 20$

2498.- En la figura hi ha tres cercles iguals.
Un cercle d'àrea 36.
Calculeu l'àrea del cercle menut.



Solució:



Siga $r = \overline{OA}$ el radi dels tres cercles.
El radi del cercle d'àrea 36 és:

$\overline{PA} = \frac{1}{2}r$

Siga $s = \overline{QT}$ radi de la circumferència menuda.
$\overline{OQ} = r + s, \overline{OA} = r - s$

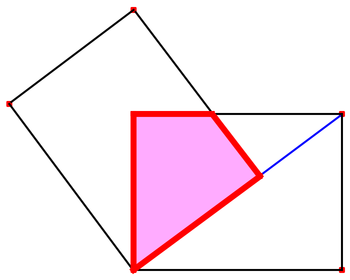
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAQ}$:
$(r + s)^2 = r^2 + (r - s)^2$
Simplificant:
$4s = r$
$s = \frac{1}{4}r$

Siga S_Q l'àrea del cercla de centre Q.
La proporció entre les àrees dels dos cercles és igual al quadrat del quocient dels radis:

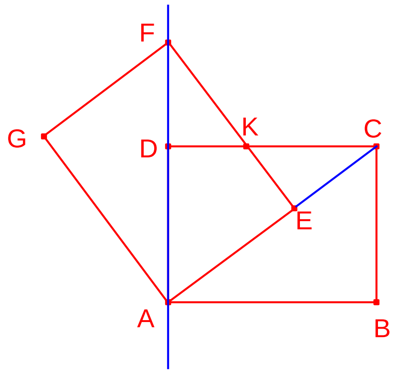
$$\frac{S_Q}{36} = \left(\frac{\frac{1}{4}r}{\frac{1}{2}r}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Aleshores:
$S_Q = 36 \cdot \frac{1}{4} = 9$

2499.- Els dos rectangles de la figura són iguals i els costats de cadascun dels dos rectangles de la figura estan en proporció 4:3.
Calculeu la proporció entre l’àrea de la zona ombrejada i l’àrea d’un rectangle.



Solució:



Siga K la intersecció dels segment $\overline{CD}, \overline{EF}$
Siga el rectangle $ABCD, \overline{AB} = 4k, \overline{AD} = 3k$
$\overline{AC} = 5k$

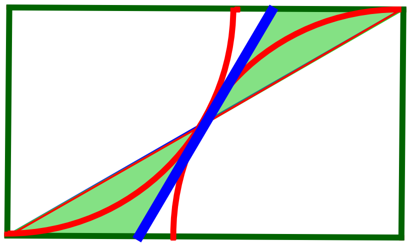
$\overline{AE} = 3k$
Els punts A, D, F estan alineats.

Els triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}C, A\overset{\Delta}{E}F$ són iguals.
$\overline{AF} = 5k$

$\overline{DF} = 2k$

Els triangles $F\overset{\Delta}{D}K, F\overset{\Delta}{E}A$ són semblants i de raó 1:2.
$S_{FDK} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD}$
L’àrea del quadrilàter $AEKD$ és igual a l’àrea del triangle , $F\overset{\Delta}{E}A$ menys l’àrea del triangle $F\overset{\Delta}{D}K$
$S_{AEKD} = S_{ABC} - S_{FEA} = \frac{1}{2} S_{ABCD} - \frac{1}{8} S_{ABCD} = \frac{3}{8} S_{ABCD}$
Aleshores, la proporció de les àrees és:
$\frac{S_{AEKD}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{8}$

2500.- El segment blau és tangent al dos quadrant. Determineu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i la del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle $ABCD$, de centre O.

$\overline{AD} = \overline{DO}$
Siga $\overline{AD} = 1$
Aleshores, $\overline{BD} = \overline{AC} = 2$
Aleshores,
$\overline{AB} = \sqrt{3}$
La recta tangent als quadrants OP és perpendicular al diàmetre $\overline{BD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DOP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{DP} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{PC} = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{OPC} = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$$