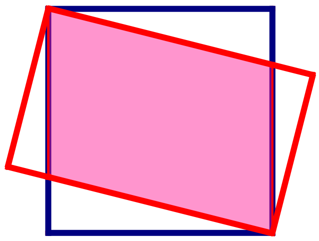
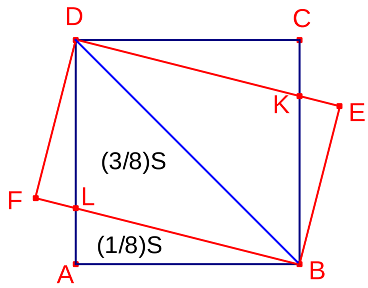
2501.- La regió intersecció del quadrat i del rectangle ocupa el 75% de l'àrea del quadrat.
Quin és el percentatge del rectangle que ocupa la intersecció.



Solució:
Siga S l'àrea del quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
El quadrilàter $BKDL$ és un paral·lelogram.



$$S_{BKDL} = \frac{3}{4}S$$
$$S_{ABL} = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}S_{BKDL} = \frac{1}{8}S$$

Aleshores,
$$\overline{AL} = \frac{1}{4}\overline{AD} = \frac{1}{4}c$$
$$\overline{CL} = \frac{3}{4}c$$

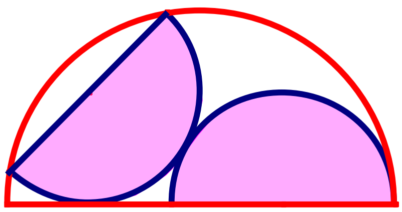
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABL}$
$$\overline{BL} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABL}, \overset{\Delta}{FDL}$ són semblants.
Les àrees són semblants al quadrat del quocient de les hipotenuses:
$$\frac{S_{FDL}}{\frac{1}{8}S} = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{9}{17}$$
$$S_{FDL} = \frac{1}{8}S\frac{9}{17} = \frac{9}{136}S$$

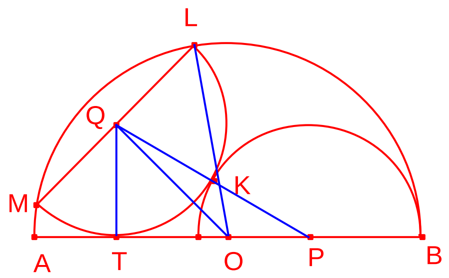
L'àrea del rectangle $BEDF$ és:
$$S_{BEDF} = S_{BKDL} + 2 \cdot S_{FDL} = \frac{3}{4}S + 2 \cdot \frac{9}{136}S = \frac{15}{17}$$

La proporció entre les àrees del paral·lelogram $BKDL$ i $BEDF$ és:
$$\frac{S_{BKDL}}{S_{BEDF}} = \frac{\frac{3}{4}S}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{20}$$
La zona ombrejada $BKDL$ ocupa el 85% de l'àrea del rectangle $BDEF$.

2502.- Els dos semicercles ombrejats són iguals. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels semicercles ombrejats i l'àrea del semicercle exterior.



Solució:



Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB}$, centre O i radi $R = \overline{OA} = \overline{OL}$
Siga $r = \overline{PB} = \overline{QL} = \overline{QT}$ radis dels semicercles ombrejats.
$\overline{PQ} = 2r$
Aleshores:
$\overline{PT} = r\sqrt{3}$

$\overline{OQ}$ és perpendicular a la corda $\overline{LM}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQL}$
$\overline{OQ} = \sqrt{R^2 - r^2}$

$\overline{OP} = R - r$
$\overline{OT} = \overline{PT} - \overline{OP} = \left(1 + \sqrt{3}\right)r - R$

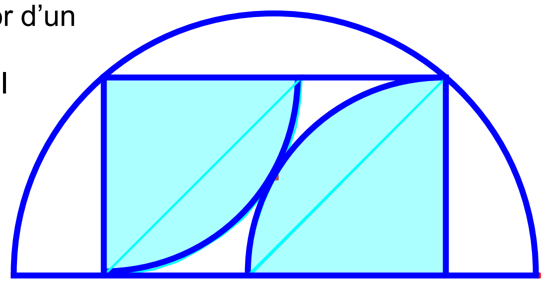
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTQ}$

$R^2 - r^2 = r^2 + \left(\left(1 + \sqrt{3}\right)r - R\right)^2$
Simplificant:
$\left(6 + 2\sqrt{3}\right)r = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)R$

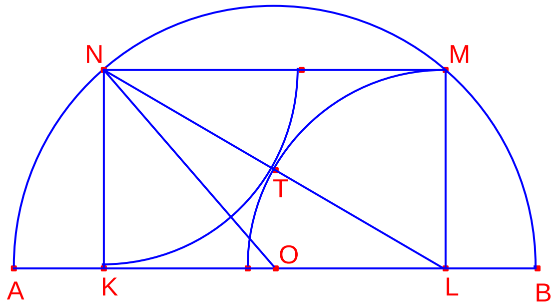
$R = r\sqrt{3}$
La proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del semicercle de radi R és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{r^2}{\frac{1}{2} \cdot 3r^2} = \frac{2}{3}$$

2503.- Dos quadrants de cercle estan en l’interior d’un semicercle.
Calculeu la proporció de l’àrea ombrejada i la del semicercle exterior.



Solució



Siga $r = \overline{NK} = \overline{NT} = r$ radi dels quadrants.
$\overline{LN} = 2r$
$\overline{LK} = r\sqrt{3}$

Siga $R = \overline{ON}$ radi dels semicercle de diàmetre $\overline{AB}$
O és el punt mig de $\overline{KL}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NKO}$

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2$$

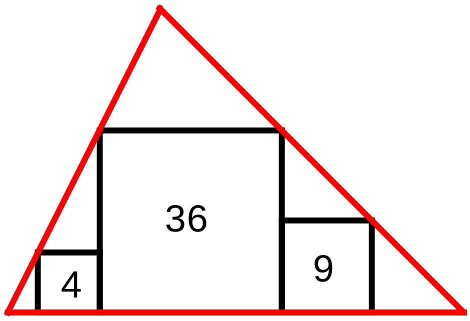
Simplificant:

$$R^2 = \frac{7}{4}r^2$$

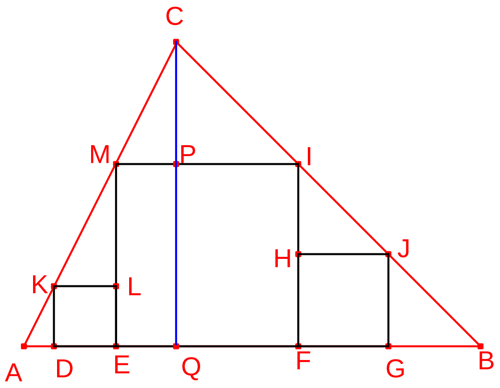
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{semicercle}} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4}{7}$$

2504.- En la figura, les àrees dels quadrats interiors al triangle mesuren 4, 36 i 9. Calculeu l’àrea del triangle exterior.



Solució:



Siga el triangle exterior $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen $\overline{DE} = 2, \overline{EF} = 6, \overline{FG} = 3$ costats dels quadrats.
$\overline{LM} = \overline{EF} - \overline{DE} = 4$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADK}, \overset{\Delta}{KLM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AD} = 1$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HJI}, \overset{\Delta}{GBJ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AD} = 3$

Aleshores:
$\overline{AB} = 15$

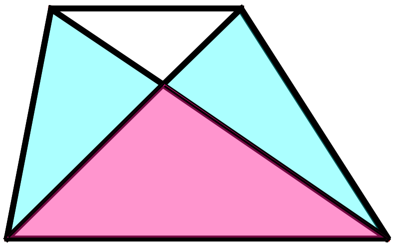
Siga $\overline{CQ} = h$, altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
$\overline{CP} = h - 6$, altura del triangle $\overset{\Delta}{MIC}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{MIC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{h-6} = \frac{15}{6}$$

Resolent l’equació:
$h = 10$

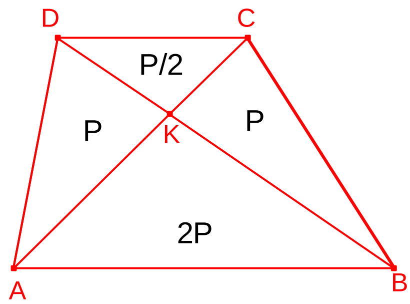
L’àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$$

2505.- El total de l’àrea pintada de blau és igual a l’àrea lila.
Calculeu la proporció entre el total de l’àrea ombrejada (blava i lila) i l’àrea del trapezi.



Solució:
En qualsevol trapezi $ABCD$ de costats paral·lels $\overline{AB}, \overline{CD}$ i K la intersecció de les diagonals, compleix que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{BKC}$ són iguals.

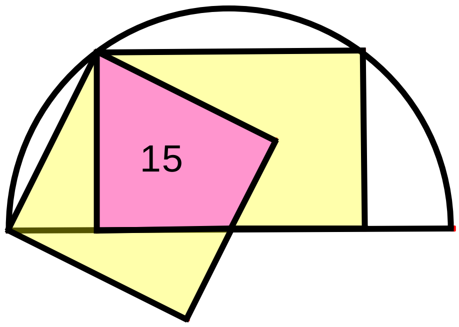
Siga $P = S_{AKD}$
$S_{ABK} = 2P$



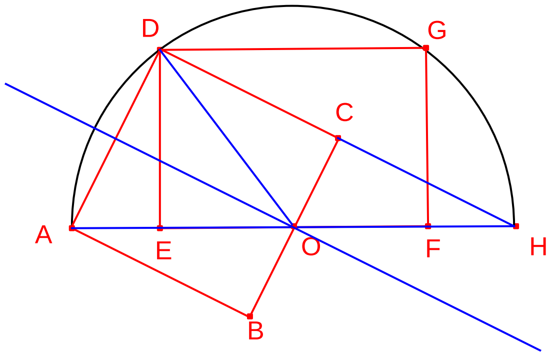
$S_{CKD} = \frac{1}{2} S_{BKC} = \frac{1}{2} P$
L’àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 4P$
L’àrea del trapezi $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = \frac{9}{2} P$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{4P}{\frac{9}{2}P} = \frac{8}{9}$$

2506.- Un quadrat i un rectangle s'intersecten en el centre dels semicercle.
L'àrea de la intersecció dels quadrat i del rectangle és 15.
Calculeu l'àrea del rectangle i del quadrat fora de la intersecció (groga).



Solució:



Siguen el quadrat $ABCD$ i el rectangle $DEFG$ que s'intersecten en el centre O del semicercle.
Siga $\overline{BC} = 2x$ costat del quadrat.
O és el punt mig del costat $\overline{BC}$ del quadrat
$\overline{OA} = x\sqrt{5}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}, \overset{\Delta}{DEA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2x}{x\sqrt{5}} = \frac{\overline{AE}}{x}$$

Aleshores:

$$\overline{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x, \overline{OE} = \frac{3\sqrt{5}}{5}x, \overline{DE} = \frac{4\sqrt{5}}{5}x$$

L'àrea del quadrilàter $DEOC$ és 15:

$$S_{DEOC} = S_{DOC} + S_{DEO} = \frac{1}{2}x \cdot 2x + \frac{1}{2}\frac{3\sqrt{5}}{5}x \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}x = 15$$

Simplificant:

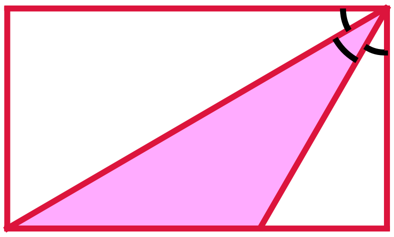
$$x^2 = \frac{75}{11}$$

L'àrea ombrejada de groc és:

$$S_{ombrejada} = S_{DEFG} - 15 + S_{ABD} + S_{AED} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}x^2 - 15 + \frac{1}{2}2x^2 + \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5}x^2$$

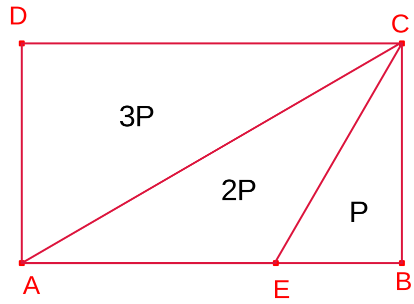
$$S_{ombrejada} = \frac{33}{5}x^2 - 15 = \frac{33}{5} \cdot \frac{75}{11} - 15 = 30$$

2507.- Els tres angles senyalats són iguals. Calculeu la proporció entre les àrees del triangle ombrejat i el rectangle.



Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Els angles $\angle DCA = \angle ACE = \angle ECB = 30°$
En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{EEC}$
$\overline{CE} = 2 \cdot \overline{EB}$

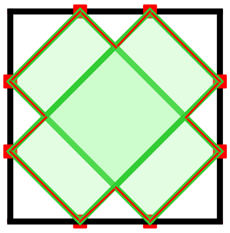
$\angle ACE = \angle CAE = 30°$
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és isòsceles.
$\overline{AE} = \overline{CE} = 2 \cdot \overline{EB}$

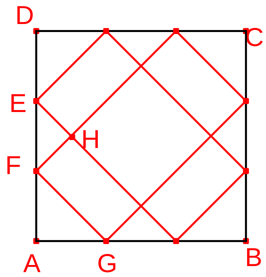


Siga $S_{EBC} = P$
Aleshores:
$S_{AEC} = 2 \cdot S_{EBC} = 2P, S_{ABC} = 3 \cdot S_{EBC} = 3P$
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 6P$

La proporció entre les àrees és:
$$\frac{S_{AEC}}{S_{ABCD}} = \frac{32}{6P} = \frac{1}{3}$$

2508.- Cada costat d'un quadrat s'ha dividit en tres parts iguals i s'han dibuixat dos rectangles.
Determineu la proporció entre les àrees de la regió ombrejada i el quadrat.





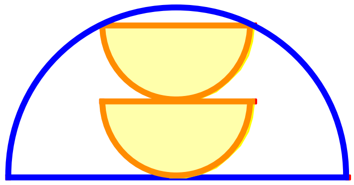
Solució;
Siga $x = \overline{AG} = \overline{AF} = \overline{DE} = \overline{EF}$.
L'àrea del quadrat $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = (3x)^2 = 9x^2$

$S_{AGF} = \dfrac{1}{2}x^2, S_{EFH} = \dfrac{1}{2}S_{AGF} = \dfrac{1}{4}x^2$

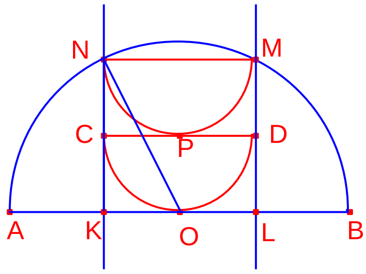
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = S_{ABCD} - 4 \cdot S_{AGF} - 4 \cdot S_{EFH} = 9x^2 - 2x^2 - x^2 = 6x^2$

La proporció entre les àrees és:
$\dfrac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \dfrac{6x^2}{9x^2} = \dfrac{2}{3}$

2509.- Calculeu la proporció entre la regió ombrejada per dos semicercles i el semicercle exterior.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre del semicercle exterior
Siga O el seu centre.
Siga $\overline{PD} = r$ radi d'un dels semicercles interior.
$KLMN$ és un quadrat de costat $2r$

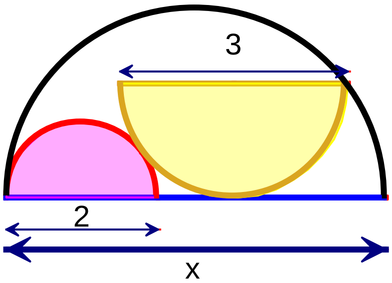


Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKN}$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$R^2 = 5r^2$

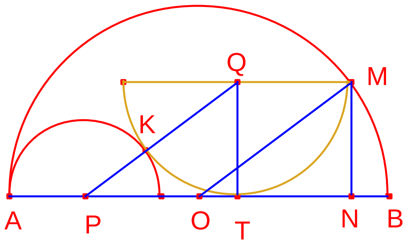
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_O} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2r^2}{5r^2} = \frac{2}{5}$$

2510.- Dos semicercles tangents de diàmetres 2 i 3 estan en l'interior d'un semicercle.
Calculeu el diàmetre del semicercle exterior.



Solució:



Siga $\overline{AB} = 2R$ el diàmetre del semicercle exterior de centre O.

Siga P el centre del semicercle de diàmetre 2.
$\overline{PA} = 1$
Siga Q el centre del semicercle de diàmetre 3.
$\overline{QM} = \overline{QT} = \frac{3}{2}$
Siga K la intersecció dels semicercles de diàmetres 2 i 3.
$\overline{PQ} = \frac{5}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTQ}$
$\overline{PT} = 2$

Siga N la projecció de M sobre el diàmetre $\overline{AB}$
$\overline{AN} = \overline{AP} + \overline{PT} + \overline{QM} = 1 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$
$\overline{ON} = \overline{AN} - R = \frac{9}{2} - R$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTQ}$
$R^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - R\right)^2$
Resolent l'equació:
$R = \frac{5}{2}$
El diàmetre del semicercle exterior és:
$\overline{AB} = 2R = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$