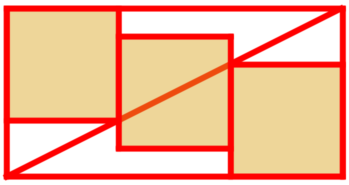
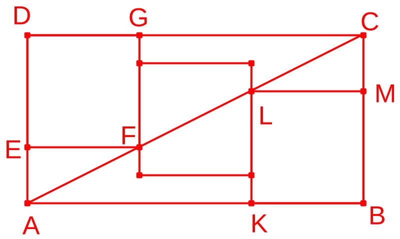
2511.- Determineu la proporció entre les àrees dels tres quadrats iguals ombrejats i l'àrea del rectangle.



Solució:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siguen els quadrats $KLMB, DEFG$ de costat $\overline{EF} = \overline{KB} = x$
$\overline{AB} = 3x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{LMC}, \overset{\Delta}{CGF}$.

$$\frac{\overline{CM}}{x} = \frac{x}{2x}$$

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}x$$

$$\overline{BC} = x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$$

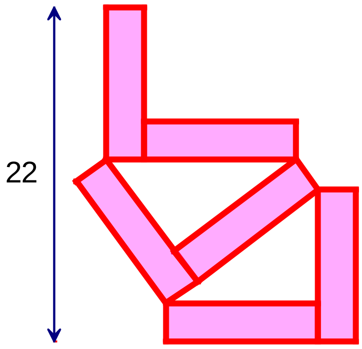
L'àrea del rectangle $ABCD$ és

$$S_{ABCD} = 3x \cdot \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x^2$$

La proporció de les àrees de la suma dels tres quadrats i l'àrea del rectangle $ABCD$ és:

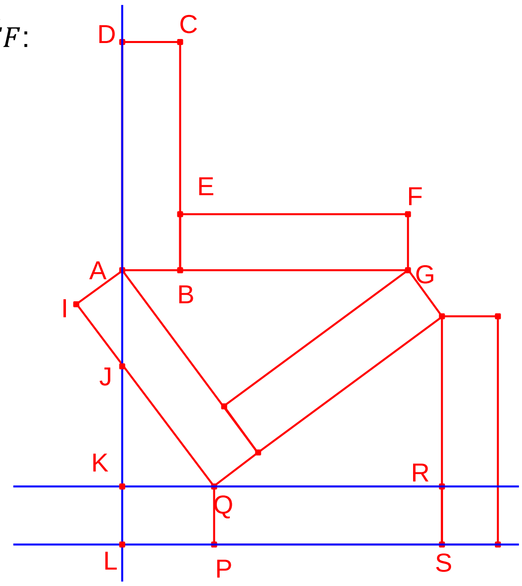
$$\frac{S_{3q}}{S_{ABCD}} = \frac{3x^2}{\frac{9}{2}x^2} = \frac{2}{3}$$

2512.- L'altura de l'apilament és 22.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga els rectangles iguals $ABCD, BEFG$ $\overline{AB} = \overline{BE} = x, \overline{AD} = \overline{BG} = y$
$\overline{CF} = \overline{AG} = x + y$

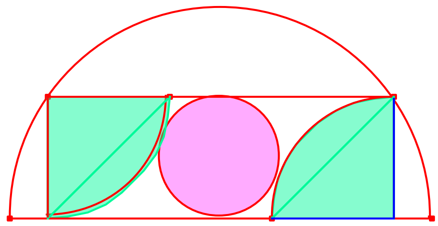
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEF}$:
$(x + y)^2 = y^2 + (y - x)^2$
Simplificant:
$y = 4x$
$\overline{CE} = 3x, \overline{AG} = 5x$
Siga L la projecció de A sobre la base PS.
La recta AL talla $\overline{IQ}$ en el punt J
La recta AL talla la recta QR en K.



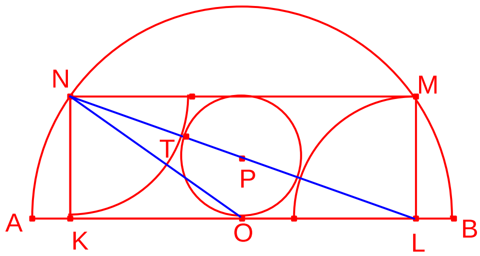
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AIJ}, \overset{\Delta}{CEF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AJ} = \frac{5}{3}x$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{QKJ}, \overset{\Delta}{CEF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{JK} = \frac{32}{15}x$
$\overline{KL} = x, \overline{DL} = 22$, aleshores:
$4x + \frac{5}{3}x + \frac{32}{15}x + x = 22$
Resolent l'equació:
$x = \frac{5}{2}$
L'àrea de tot el apilament és:
$S = 6 \cdot x \cdot 4x = 24x^2 = 24 \cdot \frac{25}{4} = 150$

2513.- Dins d'un semicercle s'ha inscrit un rectangle que conté un cercle i dos quadrants. Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del semicercle.



Soluciió:
Siga $\overline{AB} = 2R$ el diàmetre del semicercle de centre O.
Siga $KLMN$ el rectangle inscrit en el semicercles.



Siga $\overline{KN} = r$ radi del quadrant.
El radi del cercle és:
$\overline{PO} = \frac{1}{2}r$
Aleshores:
$\overline{NL} = 3r$

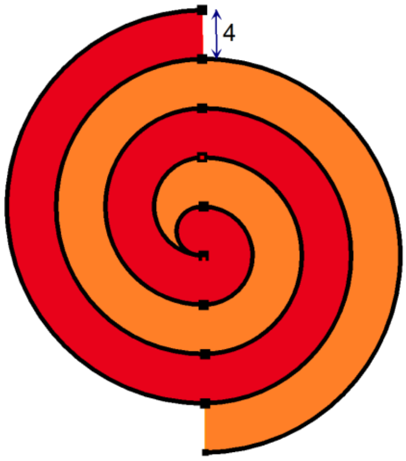
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLN}$:
$\overline{KL} = 2r\sqrt{2}$

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{KL} = r\sqrt{2}$$

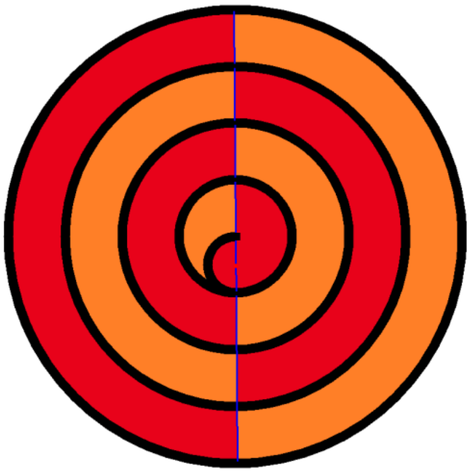
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KON}$:
$R^2 = r^2 + 2r^2 = 3r^2$
La proporció entre l'àrea de la zona ombrejada i l'àrea del semicercle és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_o} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{\frac{3}{4}r^2}{\frac{1}{2}\cdot 3r^2} = \frac{1}{2}$$

2514.- En la figura s'ha dibuixat 10 punts igualment separats (una distància 4) i s'ha dibuixat una espiral.
Quina part és més gran l'ombrejada de roig o l'ombrejada de taronja?
Quina és la diferència?

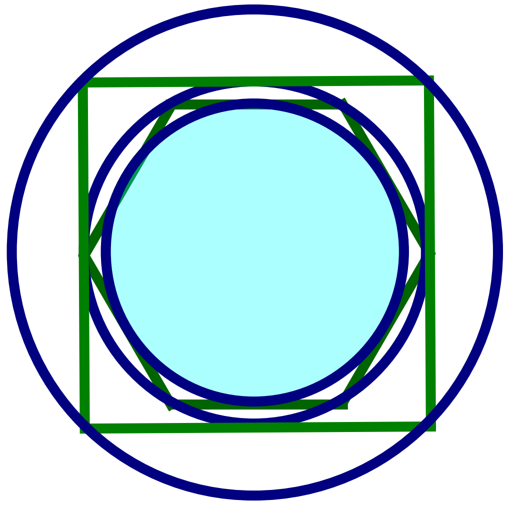


Solució:
Efectuem trasllat vertical de 4 unitats de la meitat de la dreta.
La figura quedaria:

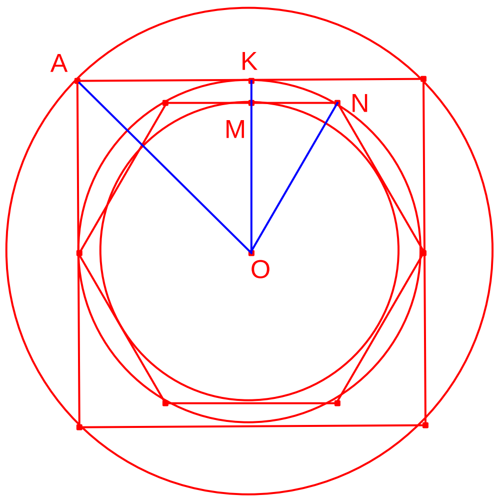


La part roja és més gran de la taronja.
És major que un cercle de diàmetre 4.
$S_{deferència} = \pi 2^2 = 4\pi$

2515.- Els polígons de la figura, són regulars. Calculeu la proporció entre les àrees dels cercle inscrit a l’hexàgon regular i el cercle circumscrit al quadrat.



Solució:



Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència inscrita a l’hexàgon regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMN}$.
El radi de la circumferència circumscrita a l’hexàgon regular és:

$$\overline{ON} = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

$$\overline{OK} = \overline{AK} = \overline{ON} = \frac{2}{\sqrt{3}} r$$

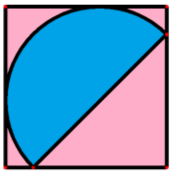
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKA}$.
El radi de la circumferència circumscrita al quadrat és:

$$R = \overline{OA} = \sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{3}} r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r$$

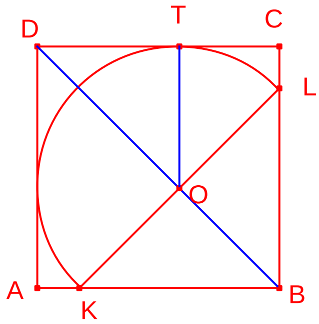
La proporció entre les àrees dels cercles és igual a quadrat de la proporció dels diàmetres:

$$\frac{S_r}{S_R} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

2516.- En un quadrat s'ha inscrit un semicercle que és tangent a dos costats consecutius.
Quina proporció d'àrees és més gran la del semicercle (blava) o la exterior al semicercle (lila).



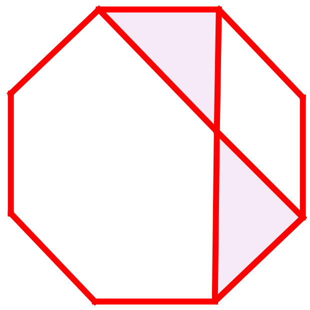
Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{KL} = 2r$ i centre O.
El centre O pertany a la diagonal $\overline{BD}$
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{CD}$



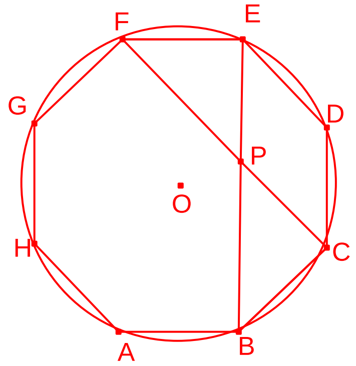
$\overline{OT} = \overline{DT} = \overline{OB} = r$
$\overline{BD} = c\sqrt{2}$
$\overline{DO} = r\sqrt{2}$

$\overline{BD} = (1+\sqrt{2})r$
Aleshores,
$c\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})r$
Elevant al quadrat:
$2c^2 = (3+2\sqrt{2})r^2$
L'àrea del semicercle és:
$$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{2}{3+2\sqrt{2}}c^2 = \frac{\pi}{3+2\sqrt{2}}c^2 > \frac{\pi}{3+3}c^2 > \frac{3}{3+3}c^2 = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$
Aleshores, l'àrea del semicercle és major que l'àrea de la part del quadrat exterior al semicercle.

2517.- L'àrea ombrejada té el mateix valor numèric que el perímetre de l'octògon regular.
Calculeu el perímetre de l'octògon regular.

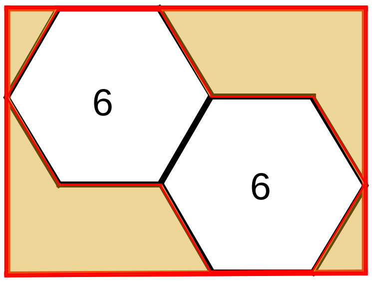


Solució:
Siga $ABCDEFGH$ l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$ inscrit en la circumferència de centre O.
El perímetre de l'octògon regular és:
$P_{ABCDEFGH} = 8c$

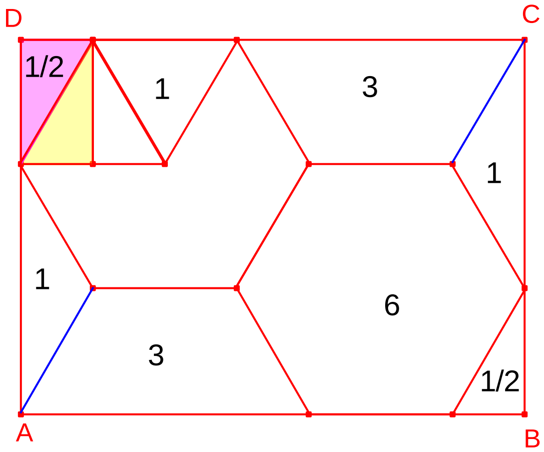


Siga P la intersecció de les diagonals $\overline{BE}, \overline{CF}$
Per ser angles inscrits en la circumferència:
$\angle FEP = 90°, \angle EFP = 45°$
$\overline{EP} = c$
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un quadrat de costat c.
$S_{ombrejada} = c^2$
El valor numèric de la regió ombrejada és igual al perímetre de l'octògon regular:
$c^2 = 8c$
Resolent l'equació:
$c = 8$
El perímetre de l'octògon regular és:
$P_{ABCDEFGH} = 8c = 64$

2518.- En la figura, dins d'un rectangle hi ha dos hexàgons regulars d'àrea 6.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



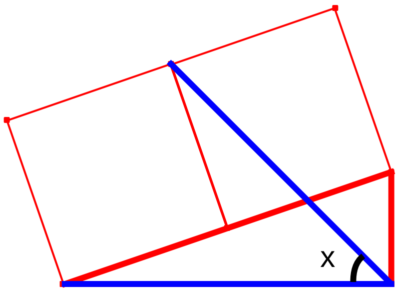
Solució:



L'àrea ombrejada és:

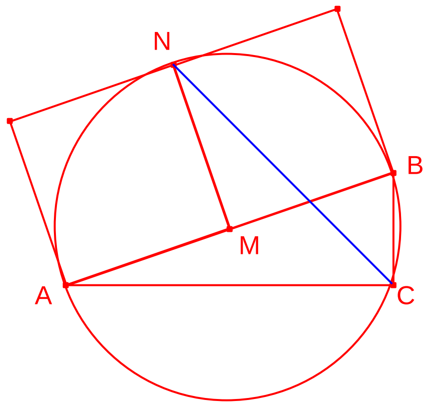
$$S = 2\left(\frac{1}{2} + 1 + 3\right) = 9$$

2519.- En la figura, dos quadrats iguals s'han dibuixar sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle.
Determineu l'angle x.



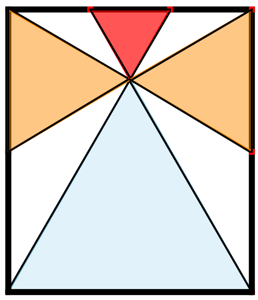
Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
El punt mig M de la hipotenusa $\overline{AB}$ és el centre de la circumferència circumscrita.
$\overline{MC} = \overline{MA} = \overline{MN}$

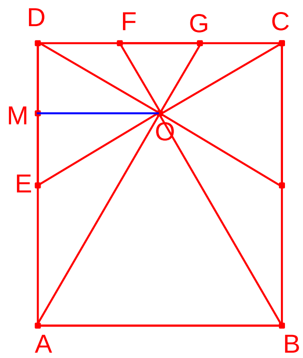


L'angle $x = \angle ACN$ és inscrit en la circumferència i abraça un quadrant de circumferència.
Aleshores, $x = \angle ACN = \frac{1}{2} 90° = 45°$

2520.- En la figura, quatre triangles equilàters s'han dibuixat en un rectangle.
En quina proporció estan la suma de les àrees dels quatre triangles i l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Siga O el punt comú als quatre triangles equilàters.
Siga $P = S_{ABO} = P$



$\angle ODF = \angle FOD = 30°$
Aleshores:
$\overline{DF} = \overline{OD} = \overline{FG} = \overline{CG}$
Aleshores,
$$S_{FOG} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABO} = \frac{1}{9}P$$
$$S_{DFO} = S_{CGO} = S_{FOG} = \frac{1}{9}P$$

$\angle OAE = \angle AOE = 30°$
Aleshores
$\overline{AE} = \overline{OE} = \overline{ED} = \overline{OD}$
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{DE}$$
$$S_{DEO} = \left(\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}\right)^2 S_{ABO} = \frac{1}{3}P$$
La suma de les àrees dels quatre triangles és:
$$S_{ombrejada} = P + 2 \cdot \frac{1}{3}P + \frac{1}{9}P = \frac{16}{9}P$$
L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$$S_{ABCD} = P + 4 \cdot \frac{1}{3}P + 3 \cdot \frac{1}{9}P = \frac{8}{3}P$$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{16}{9}P}{\frac{8}{3}P} = \frac{2}{3}$$