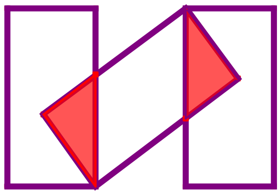
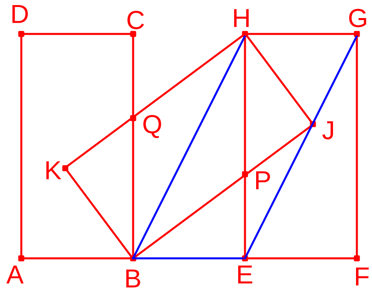
Problemes de Geometria per a l'ESO 253

3521.- En la figura, hi ha tres rectangles de costats en proporció 1:2.
Determineu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i la suma de les àrees dels tres rectangles.



Solució:
Siguen els rectangles iguals $ABCD, EFGH, BJHK$ de costats $\overline{AB} = c, \overline{BC} = 2c$

Siga P la intersecció dels segments $\overline{EH}, \overline{BJ}$
Siga Q la intersecció dels segments $\overline{BC}, \overline{HK}$
Els triangles $\overset{\Delta}{PJH}, \overset{\Delta}{QKB}$ són iguals.



Les diagonals $\overline{BH}, \overline{EG}$ són iguals.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEH}, \overset{\Delta}{GHE}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{BE} = \overline{GH}$

Siga $x = \overline{PJ}$
$\overline{BE} = \overline{HI}$

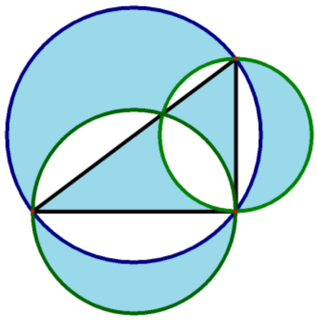
Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEP}, \overset{\Delta}{HJP}$ són iguals.
Per tant, $\overline{PE} = \overline{PJ} = x$

$\overline{HE} = 2c = \overline{PH} + \overline{PE}$
$2c = \sqrt{c^2 + x^2} + x$
$2x - x = \sqrt{c^2 + x^2}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$3c = 4x$

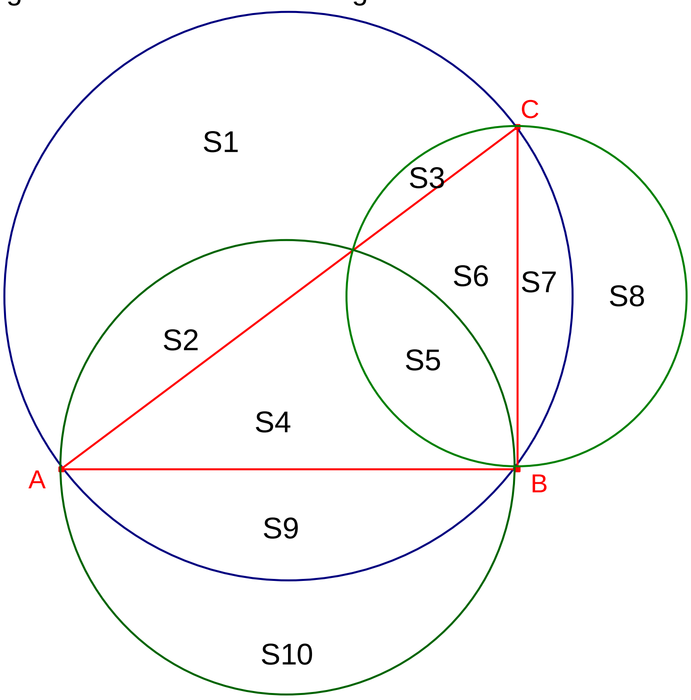
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = cx = \frac{3}{4}c^2$
L'àrea dels tres rectangles és:
$S_3 = 3 \cdot 2c^2 = 6c^2$

La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_3} = \frac{\frac{3}{4}c^2}{6c^2} = \frac{1}{8}$$

2522.- En la figura tres diàmetres de cercles formen un triangle 3-4-5.
Calculeu l’àrea ombrejada.



Solució:
La figura està dividida en 10 regions.



Siga T l’àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga C_3 l’àrea de la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC} = 3$
Siga C_4 l’àrea de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 4$
Siga C_5 l’àrea de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AC} = 5$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

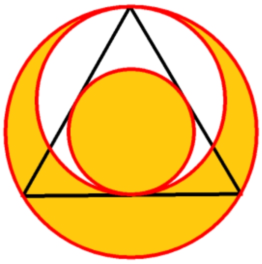
$C_5 = C_3 + C_4$ (1)
$S_1 + S_2 + S_3 = C_5$ (2)
$S_2 + S_4 + S_4 = C_4$ (3)
$S_3 + S_5 + S_5 = C_3$ (4)
$S_7 + S_8 = C_3$ (5)
$S_9 + S_{10} = C_4$ (6)
$S_4 + S_5 + S_6 = T$ (7)
$T + S_7 + S_9 = C_5$ (8)

Efectuant (2)-(3)-(4)
$S_1 - 2 \cdot S_5 - S_4 = C_5 - C_3 - C_4 = 0$ (9)
$S_1 = T + S_5$ (10)

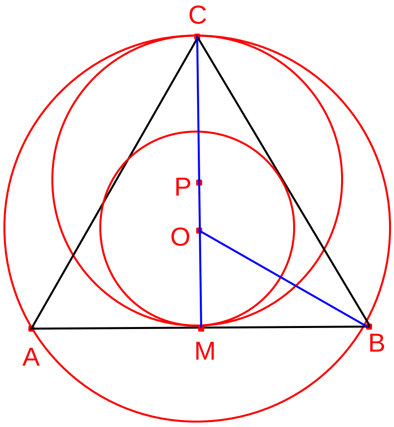
Efectuant (8)-(5)-(6)
$S_8 + S_{10} = T$ (11)

De l’expressió (7)
$S_4 + S_6 = T - S_5$ (12)
Efectuant (10)+(11)+(12)
$S_1 + S_8 + S_{10} + S_4 + S_6 = 3 \cdot T = 3 \cdot \frac{1}{2} 4 \cdot 3 = 18$

2523.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i la del cercle exterior.
El triangle dibuixat és equilàter.



Solució:



OB = R
OM= (1/2)R
CM=(3)2) R
PC= (3/4)R

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga O el centre de la circumferència inscrita i circumscrita al triangle.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$
Siga $R = \overline{OB}$ radi de la circumferència circumscrita.
El radi de la circumferència inscrita és:

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}R$$

$$\overline{CM} = 3 \cdot \overline{OM} = \frac{3}{2}R$$

Siga P el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{CM}$
El radi és:

$$\overline{PM} = \frac{3}{4}R$$

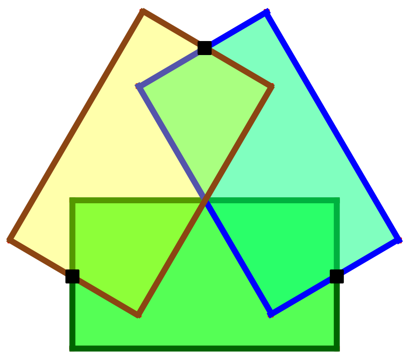
Les àrees dels cercles són proporcionals als quadrats dels radi:
Siga S l'àrea de la circumferència circumscrita.
L'àrea ombrejada és l'àrea del cercle circumscrit més l'àrea del cercle inscrit menys l'àrea del cercle de diàmetre $\overline{CM}$

$$S_{ombrejada} = S + \left(\frac{1}{2}\right)^2 S - \left(\frac{3}{4}\right)^2 S = \frac{11}{16}S$$

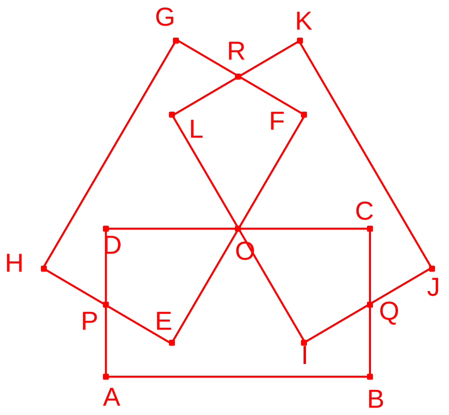
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S} = \frac{11}{16}$$

2524.- En la figura els tres rectangles sobreeixidors són iguals i cadascun d'àrea 4.
Els tres rectangles es s'intersecten en un sol punt. Els punts marcats són els punts migs dels costats més curts.
Calculeu l'àrea total de la figura.

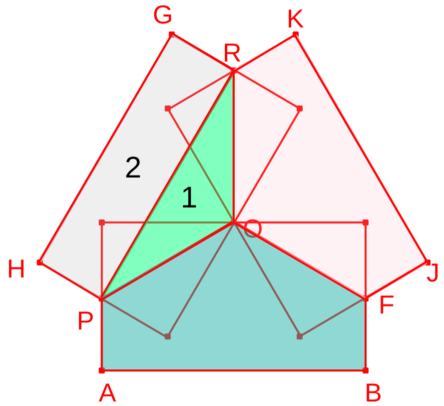


Solució:



Siguen els rectangles $ABCD, EFGH, IJKL$ d'àrea 4 que s'intersecten el punt O.
Siguen P, Q, R els punts migs dels costats menuts.
$\angle EOI = \angle FLO$
Aleshores:
$\angle EOI = \angle FLO = 60°$
Per tant, O és el punt mig del $\overline{EF}$

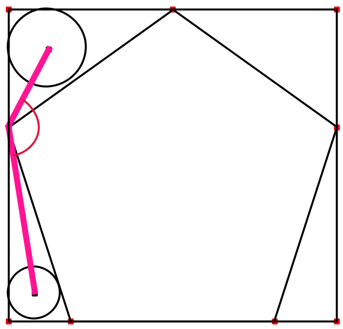
Podem dividir la figura en tres pentàgons $ABFOP, JKROF, GHPOR$ iguals:



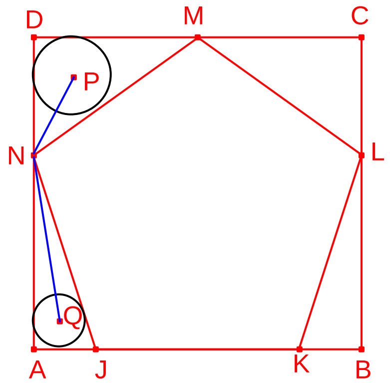
$$S_{GHPOR} = S_{GHPR} + S_{PRO} = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} 4 = 3$$

L'àrea de la figura és:
$S = 3 \cdot S_{GHPOR} = 3 \cdot 3 = 9$

2525.- Dins d'un rectangle hi ha inscrita un pentàgon regular i dos cercles inscrits a dos triangles.
Calculeu l'angle desconegut.



Solució 1:



Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $JKLMN$ el pentàgon regular.

Siga P el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{EMN}$.

Siga Q el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AJN}$

$\angle MNJ = 108°$
$\angle AJN = 180° - 108° = 72°, \angle MANJ = 90° - 72° = 18°$

$$\angle QNJ = \frac{1}{2} \cdot 18° = 9°$$

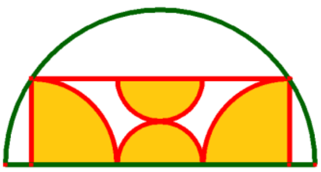
$$\angle NMD = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$
$\angle DNM = 90° - 36° = 54°$

$$\angle PNM = \frac{1}{2} \cdot 54° = 27°$$

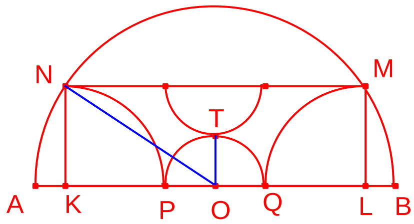
$\angle QNP = 9° + 108° + 27° = 144°$

Solució 2:
$$\angle QNP = \frac{180° - \angle MNJ}{2} + \angle MNJ = 90° + \frac{\angle MNJ}{2} = 90° + \frac{108°}{2} = 144°$$

2526.- Dins d'un semicercle s'ha inscrit un rectangle que conté dos semicercles i dos quadrants.
Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



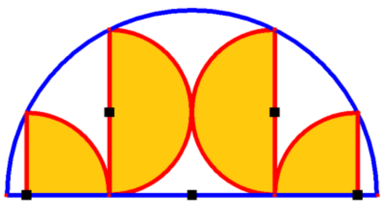
Siga el rectangle KLMN que conté els dos semicercles i els dos quadrants.

Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre del semicercle exterior, de centre O..
Siga $\overline{OT} = \overline{OP} = \overline{OQ} = r$ radis del semicercle interior al rectangle
El radi dels dos quadrants és:
$\overline{KN} = \overline{KP} = 2r$
$\overline{KO} = 3r$

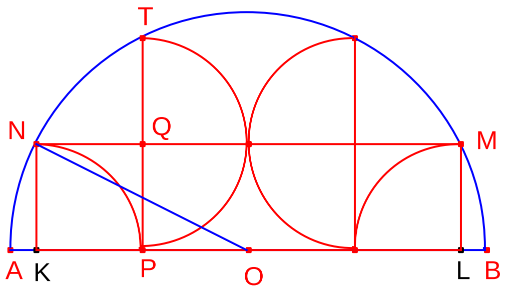
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{NKO}$
$R^2 = 13r^2$

Les àrees de dos semicercles són semblants als quadrats dels radis.
Siga S l'àrea del semicercle de radi r
L'àrea del semicercle de radi $2r$ és $4S$
L'àrea del semicercle de radi R és $13S$
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 2 \cdot S + 4S = 6S$
La proporció de les àrees és:
$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{6S}{13S} = \frac{6}{13}$

2527.- Dins d'un semicercle s'ha inscrit un rectangle que conté dos semicercles i dos quadrants. Calculeu la proporció entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del semicercle.



Solució:



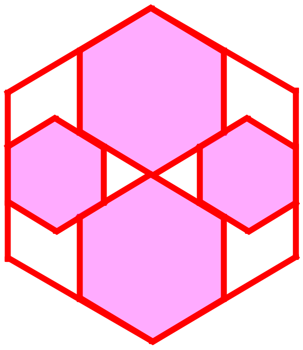
Siga el rectangle KLMN que conté els dos semicercles i els dos quadrants.

Siga $\overline{AB} = 2R$ diàmetre del semicercle exterior, de centre O..
Siga $\overline{KN} = \overline{KP} = r$ radis del quadrant interior al rectangle
El radi dels dos semicercles és:
$\overline{QP} = \overline{QP} = r$

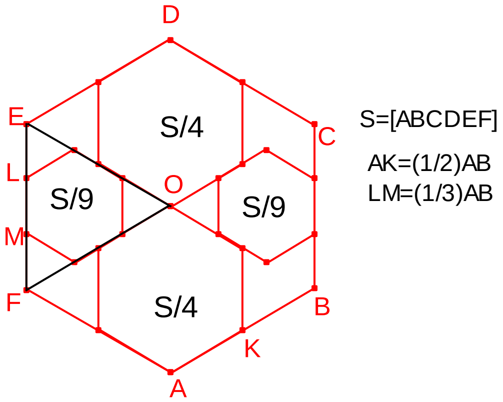
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{NKO}$
$R^2 = 5r^2$

Les àrees de dos semicercles són semblants als quadrats dels radis.
Siga S l'àrea del semicercle de radi r.
L'àrea del semicercle de radi R és $5S$.
L'àrea ombrejada és:
$S_{ombrejada} = 3 \cdot S$
La proporció de les àrees és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S_R} = \frac{3S}{5S} = \frac{3}{5}$$

2528.- Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada de
(4 hexàgons regulars) i l'hexàgon regular exterior.



Solució:



Siga S l'àrea de l'hexàgon regular $ABCDEF$.

Les àrees de dos hexàgons regulars són semblants als quadrats de la proporció dels seus costats.

$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\overline{LM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$

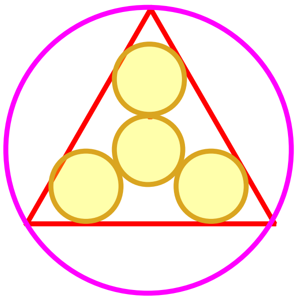
Aleshores, l'àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 S + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 S = \frac{13}{18} S$

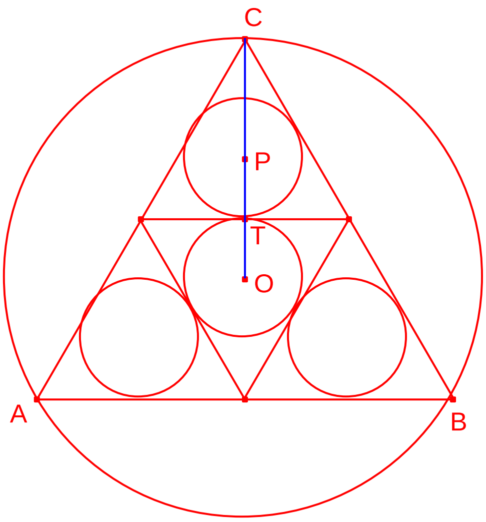
La proporció de les àrees és:

$\frac{S_{ombrejada}}{S} = \frac{13}{18}$

2529.- Quatre cercles iguals estan empaquetats en un triangle equilàter.
Calculeu la proporció de l'àrea dels quatre cercles i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



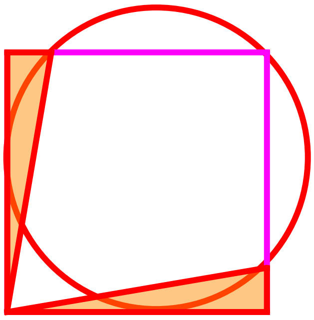
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O.
Siga $\overline{OT} = \overline{PT} = r$ radi de les quadrat circumferències iguals.
$\overline{PC} = 2 \cdot \overline{PT} = 2r$

El radi de la circumferència circumscrita al triangle és:
$\overline{OC} = 4r$

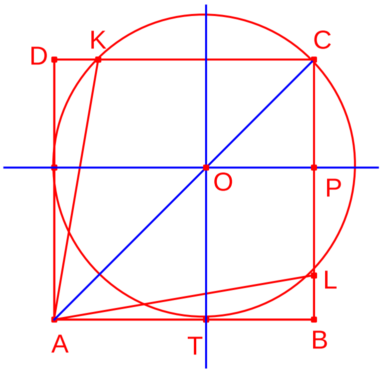
Les àrees de dos cercles són proporcionals als quadrats de la proporció dels radis.

La proporció de l'àrea dels quatre cercles interior i el cercle exterior és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

2530.- En la figura hi ha un quadrat i un cercle de radi 2 que passa per un vèrtex i és tangent als dos costats que no contenen aquest vèrtex
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Sig O el centre de la circumferència.
El centre de la circumferència pertany a la diagonal $\overline{AC}$
$\overline{OC} = \overline{OT} = \overline{AT} = r = 2$ radi de la circumferència.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OPC}$:

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$
$$\overline{CL} = 2 \cdot \overline{OP} = r\sqrt{2}$$

$$c = \overline{AT} + \overline{OP} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$$
$$\overline{BL} = c - \overline{CL} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = c \cdot \overline{BL} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$$