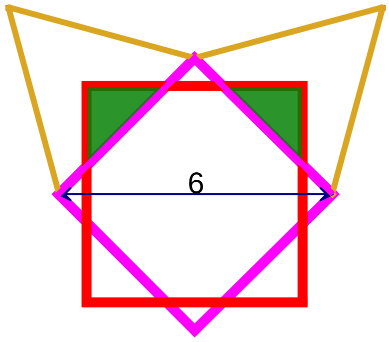
2431.- Dos vèrtexs del quadrat roig són centres de dos triangles equilàter
El triangle lila té diagonal 6.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de diagonal $\overline{BD} = 6$
Considerem el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ de centre G.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}6 = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{EM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

Aplicant la propietat del baricentre:

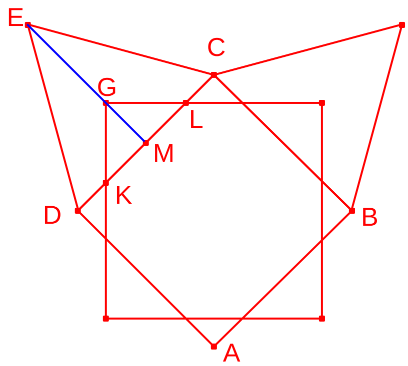
$$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{EM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KLG}$ és:

$$S_{KLG} = \overline{GM}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

L'àrea ombrejada és:

$$S = 2 \cdot S_{KLG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

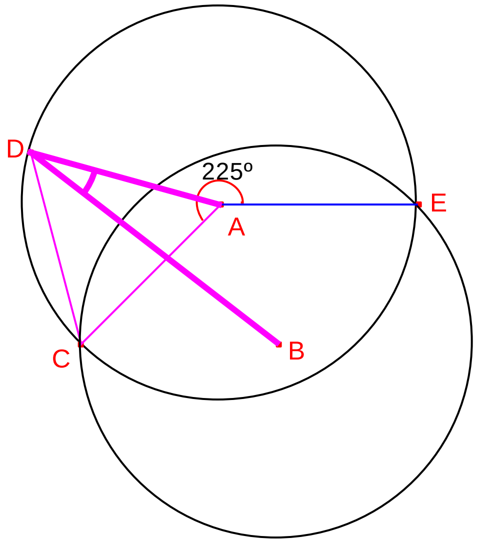


2532.- En la figura, les dues circumferències de centre A, B són iguals.

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és equilàter.

$\angle CAE = 225°$

Calculeu la mesura de l'angle $\angle ACB$



Solució:

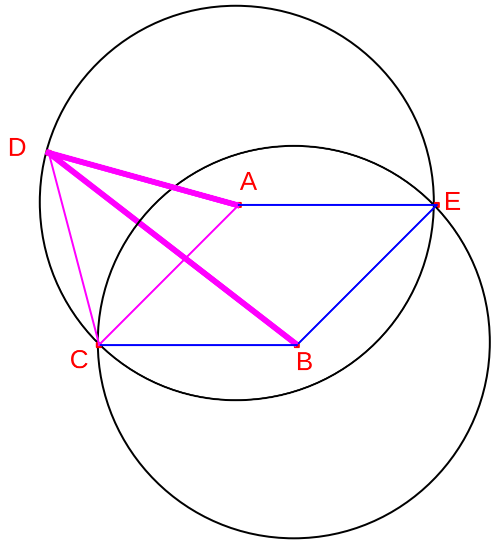
El quadrilàter $ACBE$ és un rombe de costat iguals al radi de les circumferències.

$\angle CAE = \angle CBE = 360° - 225° = 135°$

Aleshores:

$\angle ACB = 45°$

$\angle DCB = 60° + 45° = 105°, \overline{BC} = \overline{CD}$

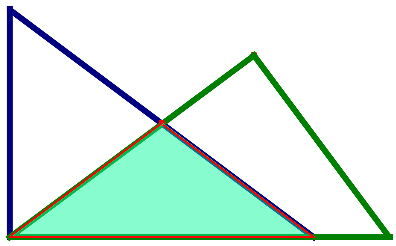


Aleshores:

$$\angle CDB = \frac{180° - 105°}{2} = \frac{75°}{2}$$

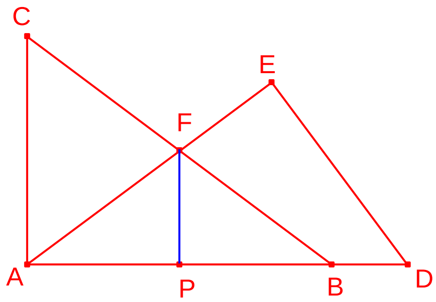
$$\angle ACB = 60° - \angle CDB = 60° - \frac{75°}{2} = \frac{45°}{2}$$

2533.- Calculeu l'àrea de la intersecció de dos triangles 3-4-5.



Solució:

Siguen els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{ADE}$ rectangles 3-4-5.
Siga F la intersecció de $\overline{BC}$ i $\overline{AE}$
Siga P la projecció de F sobre el segment $\overline{AB}$
$\angle ABC = \angle EAD$

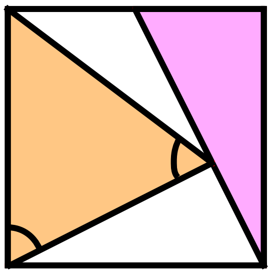


Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és isòsceles.
Per tant, P és el punt mig del segment $\overline{AB}$
$\overline{AP} = \overline{BP}$

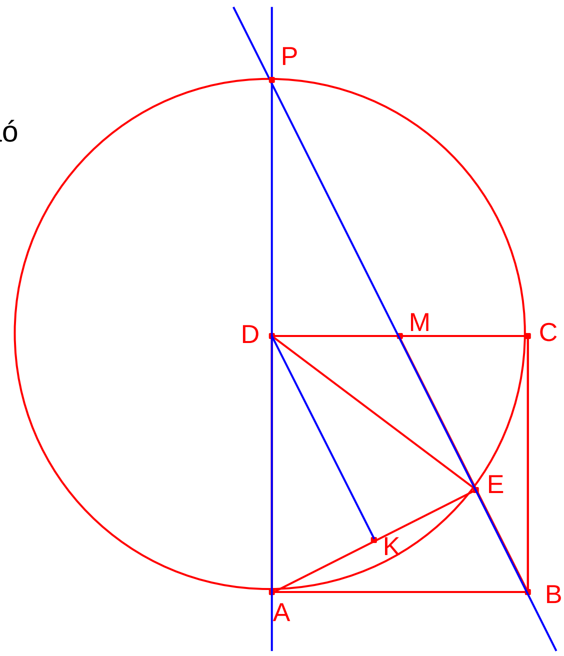
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{PBF}$ són semblants i de raó 2:1
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{3}{2}$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és:
$S_{ABF} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PF} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$

2534.- El t4riangle rectangle de la figura ocupa $\frac{1}{4}$ del quadrat.
Calculeu la proporció entre les àrees dels triangle isòsceles i el quadrat.



Solució1:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADE}, \overline{AD} = \overline{DE}$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCM}$, M és el punt mig del costat $\overline{CD}$.
La circumferència de centre D que passa pel punt A , passa pels punts E, C.
La recta BM talla la circumferència en el punt P.
Notem que P pertany a la recta AD.
Aleshores, $\angle AEP = 90°$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCM}, \overset{\Delta}{AKD}$ són semblants i de raó

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

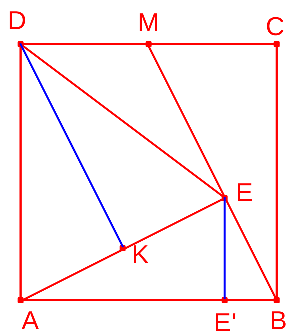
Dos rectangles són semblants les seues àrees són proporcionals a la raó dels costats:

$$\frac{S_{AKD}}{S_{BCM}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

$$S_{AKD} = \frac{4}{5} S_{BCM} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{5} S_{ABCD}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABCD}} = \frac{2}{5}$$

Solució 2:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 2$
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADE}, \overline{AD} = \overline{DE}$
Siga K el punt mig del costat $\overline{AE}$
Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCM}$, M és el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga $\overline{BE} = x, \overline{AE} = 2 - x$



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCM}, \overset{\Delta}{EE'B}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{EE'} = 2x$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}, \overset{\Delta}{EE'A}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{\sqrt{(2x)^2 + (2-x)^2}}{2}}{2x} = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 + (2-x)^2}}$$

$$8x = 5x^2 - 4x + 4$$

Resolent l'equació: $x = \frac{2}{5}$

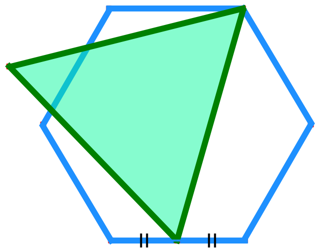
L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADE}$ és:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AE'} = \frac{1}{2} 2 \cdot \left(2 - \frac{2}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

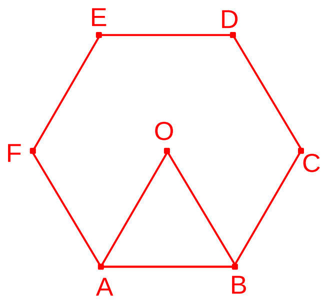
La proporció de les àrees és:

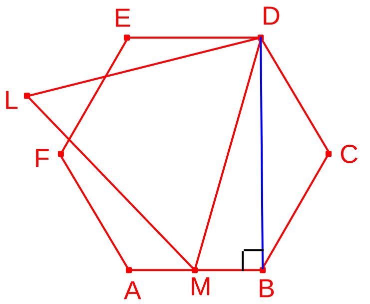
$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{8}{5}}{2^2} = \frac{2}{5}$$

2535.- L'àrea de l'hexàgon regular de la figura és 24.
Calculeu l'àrea del triangle equilàter.
Un vèrtex del triangle és el punt mig d'un costat de l'hexàgon.



Solució:





Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$, de centre O i àrea 24.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABO}$ és:

$$S_{ABO} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$$

$$\overline{MB} = \frac{1}{2}c, \overline{BD} = c\sqrt{3}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBD}$:

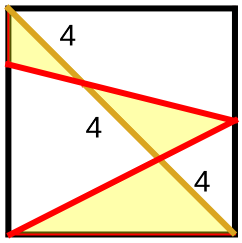
$$\overline{DM}^2 = \frac{13}{4}c^2$$

La proporció de les àrees de dos triangles equilàter és proporcional al quadrat dels costats.

$$\frac{S_{DLM}}{S_{ABO}} = \left(\frac{\overline{DM}}{\overline{AB}}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

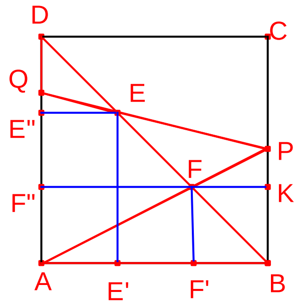
$$S_{DLM} = 4 \cdot \frac{13}{4} = 13$$

2536.- La diagonal d'un quadrat s'ha dividit en tres parts iguals, cadascuna de les quals mesura 4.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c, c^2 = \frac{1}{2}12^2 = 72$
Siguen els punts E, F de la diagonal $\overline{BD}$ tal que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = 4$
Siga la recta AF que talla el costat $\overline{BC}$ en P.
Siga la recta PE que talla el costat $\overline{AD}$ en Q.



Siga F' la projecció de F sobre el costat $\overline{AB}$
Siga E' la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$
Siga F" la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$
Siga E"' la projecció de F sobre el costat $\overline{AD}$
Siga K la projecció de F sobre el costat $\overline{BC}$

$$\overline{AE'} = \overline{E'F'} = \overline{F'B} = \overline{FK} = \frac{1}{3}c$$

$$\overline{AE"} = \overline{E"F"} = \overline{F'E} = \frac{1}{3}c$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AF'F}, \overset{\Delta}{ABP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{BP} = \frac{1}{2}c$$

Aleshores, P és el punt mig del costat $\overline{BC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{DQE}, \overset{\Delta}{BPE}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{DQ} = \frac{1}{2}\overline{BP} = \frac{1}{4}c$$

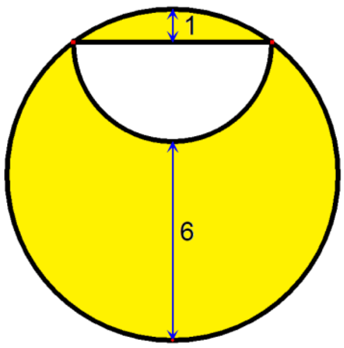
Els triangles $\overset{\Delta}{EFP}, \overset{\Delta}{FBP}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura. Aleshores tenen la mateixa àrea.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{ABF}, \overset{\Delta}{BPF}, \overset{\Delta}{DQE}, \overset{\Delta}{DQE}$

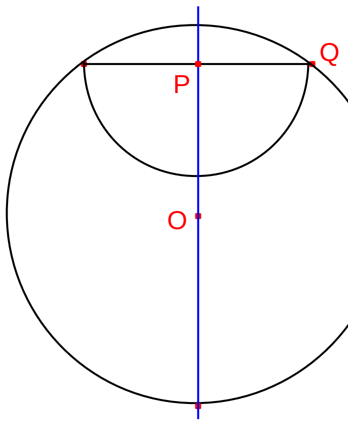
$$S_{ombrejada} = \frac{1}{2}c \cdot \overline{FF'} + \frac{1}{2}\overline{BP} \cdot \overline{FK} + \frac{1}{2}\overline{DQ} \cdot \overline{EE"} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}\frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}\frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{3}c = \frac{7}{24}c^2$$

$$S_{ombrejada} = \frac{7}{24}c^2 = \frac{7}{24} \cdot 72 = 21$$

2537.- Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència i $\overline{OQ} = R$ el radi.
Siga P el centre del semicercle de radi $\overline{PQ} = r$

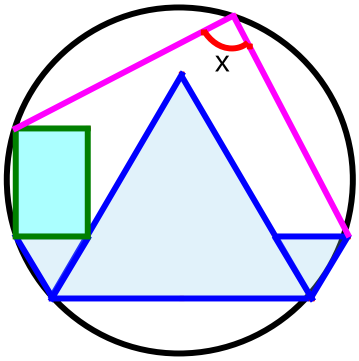


El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és rectangle.
$\overline{OP} = R - 1.$
$2R = 1 + r + 6$
$2R = 7 + r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$R^2 = r^2 + (R-1)^2$
$r^2 - 2R + 1 = 0$
$r^2 - (7 + r) + 1 = 0$
$r^2 - r - 6 = 0$
Resolent l’equació:
$r = 3$
$R = 5$
L’àrea ombrejada és la diferència entre l’àrea del cercle de radi 5 i el semicercle de radi 3.

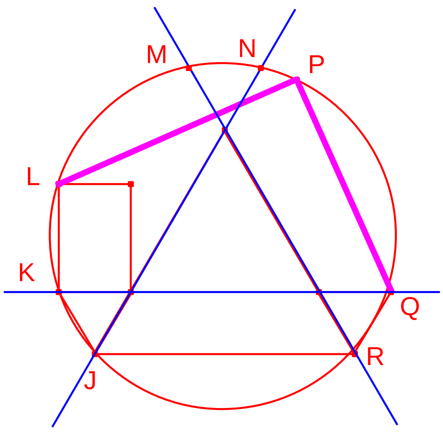
$$S_{ombrejada} = \pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = 25\pi - \frac{9}{2}\pi = \frac{41}{2}\pi$$

2538.- En la figura, s'han empaquetat tres triangles equilàters i un rectangle en una circumferència. Calculeu la mesura de l'angle x.



Solució:

Siga $\alpha = \widehat{KL}, \beta = \widehat{QR}$



$\widehat{NR} = \widehat{JM} = \widehat{NR} = 120°$

$\widehat{LQ} = 180°$

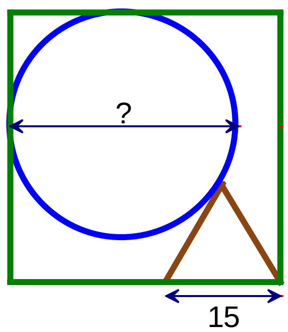
$\alpha + \beta + \widehat{LQ} = 360° - \widehat{QRK}$

$\alpha + \beta + 180° = 360° - 120°$

$\alpha + \beta = 60°$

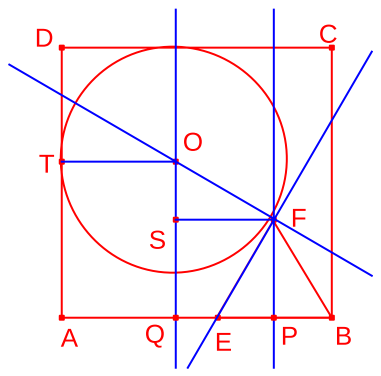
$$\angle LPQ = \frac{\widehat{QR} + \widehat{KR} + \widehat{KL}}{2} = \frac{\alpha + \beta + 120°}{2} = 90°$$

2539.- Un triangle equilàter té un vèrtex i un costat en el quadrat
Un costat del triangle equilàter és tangent a la circumferència.
La circumferència és tangent a dos costats del quadrat.
Calculeu el diàmetre de la circumferència.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{EBF}$ de costat $\overline{EB} = 15$
Siga P el punt mig del costat $\overline{EB}$
Siga O el centre de la circumferència.
Siga $\overline{OP} = \overline{OT} = R$ radi de la circumferència.
Siga Q la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$
Siga S la projecció de F sobre la recta OQ.
La recta EF és tangent a la circumferència. Aleshores, les rectes EF, OF són perpendiculars.



$\angle SPO = 30°$
Aleshores,

$\overline{OS} = \frac{1}{2}R, \overline{SF} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

$\overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15, \overline{PB} = \frac{1}{2} \cdot 15$

$\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{PB} = R + \frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{15}{2}$

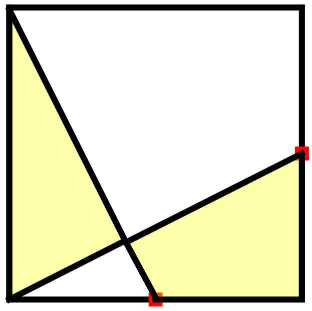
$\overline{AB} = \overline{DT} + \overline{OS} + \overline{PF} = R + \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15$

Igualant les expressions:

$R + \frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{15}{2} = R + \frac{1}{2}R + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15$

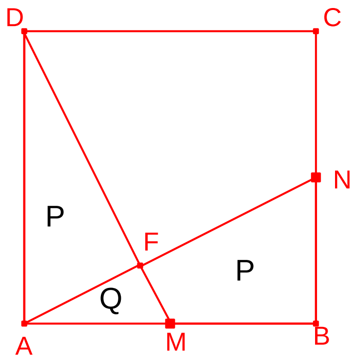
Resolent l'equació:
$R = 15$
El diàmetre de la circumferència és:
$2R = 30$

2540.- Els punts assenyalats són punts migs dels costats del quadrat.
Calculeu la proporció de les àrees de la regió ombrejada i el quadrat



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{BC}$, respectivament.

Siga F la intersecció de $\overline{DM}, \overline{AN}$



Siga S l'àrea del quadrat $ABCD$.

Siga P l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFD}$.

Siga Q l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFM}$.

$$P + Q = \frac{1}{4}S$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFD}, \overset{\Delta}{MFA}$ són semblants i de raó 2:1.
Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la proporció dels costats:
$P = 4 \cdot Q$

Aleshores:
$Q = \frac{1}{20}S, P = \frac{1}{5}S$
La regió ombrejada és:
$$S_{ombrejada} = 2P = 2 \cdot \frac{1}{5}S = \frac{2}{5}S$$

La proporció entre les àrees de la zona ombrejada i el quadrat és:
$$\frac{S_{ombrejada}}{S} = \frac{2}{5}$$