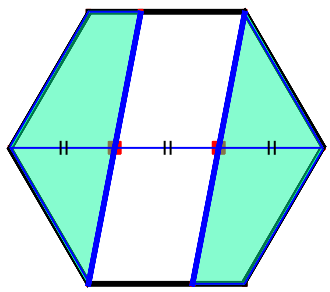
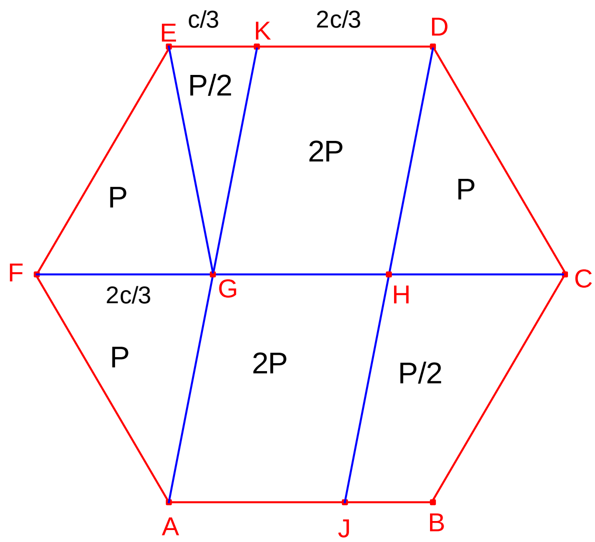
Problemes de Geometria per a l'ESO 255

2541.- La diagonal d'un hexàgon regular s'ha dividit en tres parts iguals.
Determineu la proporció de les àrees de la regió ombrejada i la de l'hexàgon regular.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$



$\overline{FC} = 2c$

$\overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \frac{2}{3}c$

$\overline{AJ} = \overline{KD} = \frac{2}{3}c$

$\overline{EH} = \frac{1}{3}c$

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{FGE}$

$S_{AFG} = S_{FGE} = P$

L'àrea del paral·lelogram $GHDK$ és:

$S_{GHDK} = 2P$

$\frac{\overline{EK}}{\overline{FG}} = \frac{1}{2}$

L'àrea del paral·lelogram $\overset{\Delta}{EGK}$ és:

$S_{EGK} = \frac{1}{2}S_{FGE} = \frac{1}{2}P$

L'àrea ombrejada és:

$S_{ombrejada} = 2\left(P + P + \frac{1}{2}P\right) = 5P$

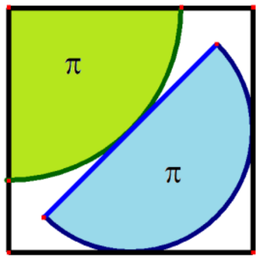
L'àrea de l'hexàgon regular és:

$S_{ABCDEF} = 2\left(P + \frac{1}{2}P + 2P + P\right) = 9P$

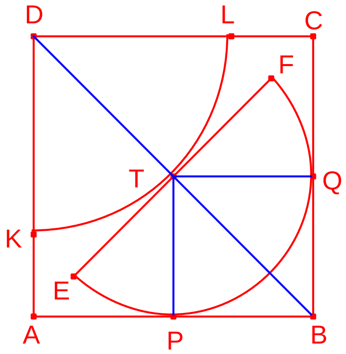
La proporció de les àrees és:

$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \frac{5P}{9P} = \frac{5}{9}$

2542.- En un quadrat hi ha un quadrant i un semicercle tangent al quadrant d'àrea cadascun d'ells π.
Calculeu l'àrea del quadrat.



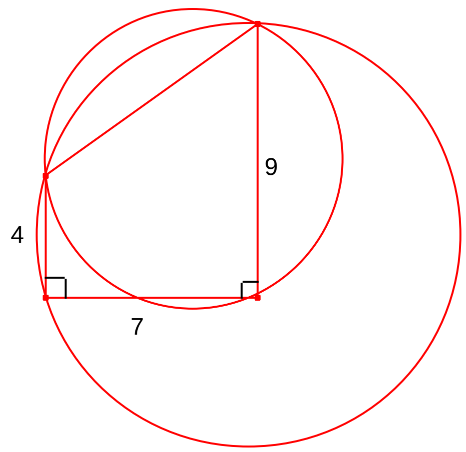
Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrant $\widehat{KTL}$ de radi $\overline{DT} = R$ i àrea π
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{EF} = 2r$ i àrea π



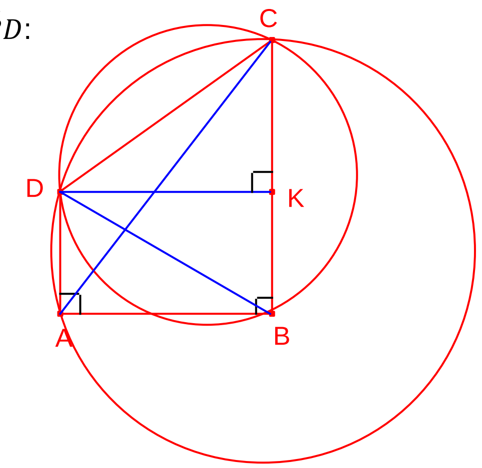
Aleshores:
$\frac{1}{4}\pi R^2 = \pi, \frac{1}{2}\pi r^2 = \pi$
Aleshores, $R^2 = 4, r^2 = 2$

$\overline{BC} = c\sqrt{2} = R + r\sqrt{2}$
$c\sqrt{2} = 2 + 2 = 4$
Aleshores:
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = c^2 = \frac{1}{2}4^2 = 8$

2543.- Calculeu la proporció entre les àrees dels dos cercles.



Solució:
Considerem el trapezi rectangle $ABCD$.
Siga K la projecció de D sobre el costat $\overline{BC}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \sqrt{65}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKC}$:
$\overline{CD} = \sqrt{74}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = \sqrt{130}$

El cercle menut és el cercle circumscrit al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$
Siga r el seu radi.
Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = \frac{\sqrt{65} \cdot 9 \cdot \sqrt{74}}{4r}$$

Simplificant:

$$r = \frac{\sqrt{74}\sqrt{65}}{2 \cdot 7}$$

El cercle gran és el cercle circumscrit al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$
Siga R el seu radi.
Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = \frac{4 \cdot \sqrt{130} \cdot \sqrt{74}}{4R}$$

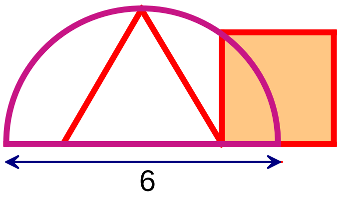
Simplificant:

$$R = \frac{\sqrt{74}\sqrt{130}}{2 \cdot 7}$$

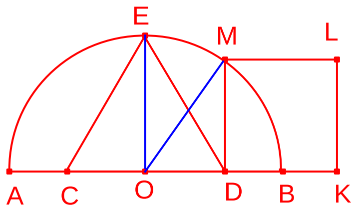
La proporció de l'àrea dels cercles és igual al quadrat de la proporció dels radis:

$$\frac{S_m}{S_G} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

2544.- El punt mig del triangle equilàter és el centre del semicercle diàmetre 6.
Calculeu l'àrea del quadrat ombrejat.



Solució:
Siga el semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 6$
Siga O el centre del semicercle.

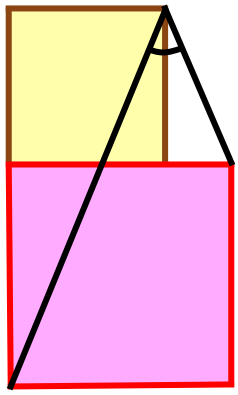


Siga el triagnle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$ d'altura $\overline{OE} = 3$
Siga el quadrat DKLM de costat $\overline{DM} = c$

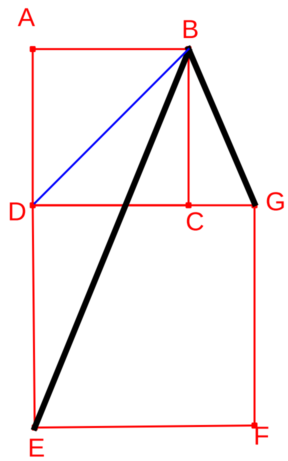
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOD}$
$\overline{OD}^2 = 3$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDM}$
$c^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OD}^2 = 3^2 - 3 = 6$
Aleshores, l'àrea del quadrat $DKLM$ és:
$S_{DKLM} = c^2 = 6$

2545.- La proporció de les àrees dels dos quadrats és 1:2.
Calculeu l’angle desconegut.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat menut.
Siga $DEFG$ el quadrat gran.
$S_{DEFG} = 2 \cdot S_{ABCD}$
Aleshores, $\overline{DE} = \overline{AB}\sqrt{2}$
Per tant, $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{DG}$



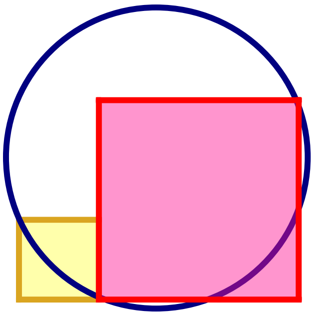
Siga $\alpha = \angle DEB$
$\angle DBE = \angle DEB, \angle EBC = \angle DEB$
Aleshores, $2\alpha = 45°$

$$\angle DGB = \angle DBG = \frac{180° - 45°}{2}$$

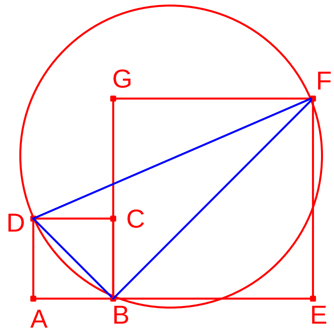
$\angle EBG = \angle DBG - \alpha = 45°$

Notem que $\angle CBG = \alpha$

2546.- El radi de la circumferència és 4.
Calculeu la suma de les àrees dels quadrats.

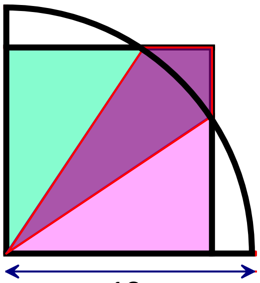


Solució:
Siguen els quadrats $ABCD, BEFG$.
Siga $\overline{AB} = a, \overline{BE}$
$\angle DBF = 90°$
Aleshores $\overline{DF}$ és diàmetre de la circumferència.
$\overline{DF} = 8$

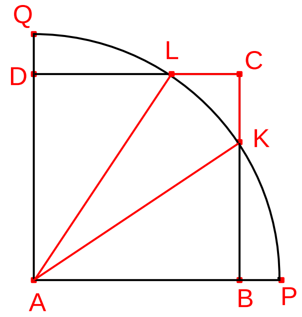


Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $A\overset{\Delta}{B}D, B\overset{\Delta}{E}F$:
$\overline{BD} = a\sqrt{2}, \overline{BF} = b\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $D\overset{\Delta}{B}F$
$2a^2 + 2b^2 = 8^2$
La suma de les àrees dels dos quadrats és:
$S = a^2 + b^2 = 32$

2547.- Les seccions acolorides del quadrat tenen la mateixa àrea.
Quina és l'àrea del quadrat si el radi del quadrat és 13.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siga $x = \overline{BK} = \overline{DL}$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABK}$:
$c^2 + x^2 = 13^2$
El quadrilàter $AKCL$ és un cometa.

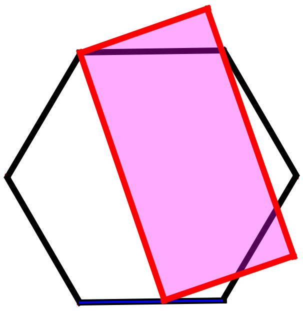
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = c\sqrt{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LCK}$:
$\overline{LK} = (c - x)\sqrt{2}$

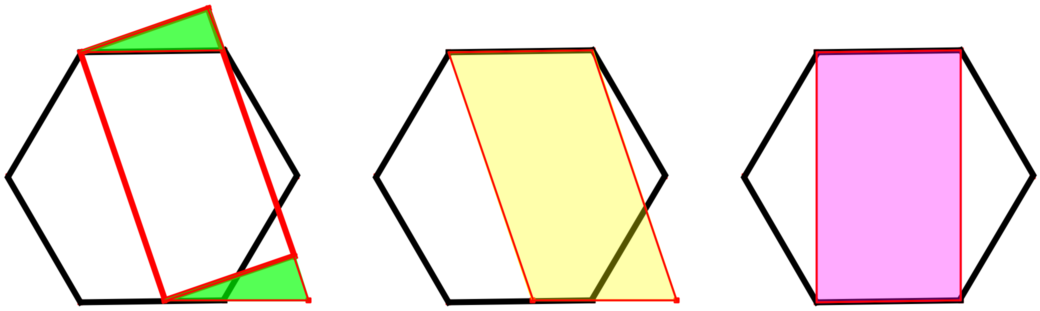
L'àrea del comenta $AKCL$ i del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABK}$ són iguals.

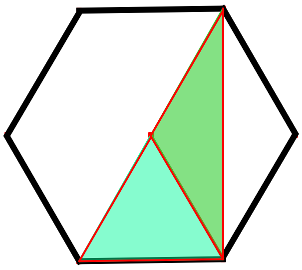
$$\frac{1}{2}cx = c\sqrt{2}(c - x)\sqrt{2}$$
Simplificant:
$$x = \frac{2}{3}c$$
$$c^2 + \left(\frac{2}{3}c\right)^2 = 13^2$$
$$\frac{13}{9}c^2 = 13^2$$
L'àrea del quadrat és:
$$S_{ABCD} = c^2 = 13 \cdot 9 = 117$$

2548.- L’àrea de l’hexàgon regular és 30.
Calcular l’àrea del rectangle ombrejat.



Solució:

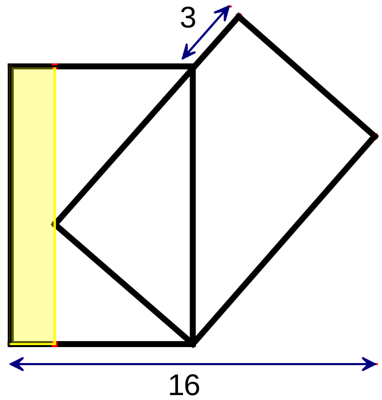




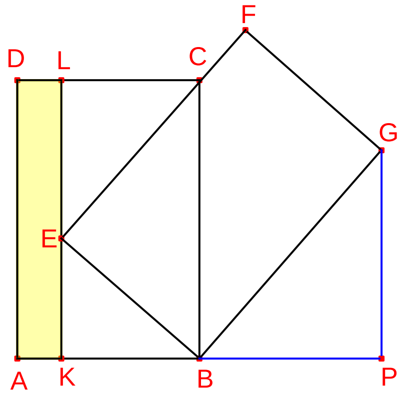
L’àrea del rectangle ombrejat és $\frac{2}{3}$ parts de l’àrea de l’hexàgon:

$S_{ombrejat} = \frac{2}{3} \cdot 30 = 20$

2549.- Els dos rectangles de la figura són iguals.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siguen els rectangles iguals $ABCD, BEFG$.
Siga $\overline{AB} = \overline{BE} = a$
Siga $\overline{CE} = x$
$\overline{AD} = \overline{EF} = x + 3$



Siga P la projecció de G sobre la recta AB.
$\overline{AP} = 16$
$\angle EBC = \angle BPG$

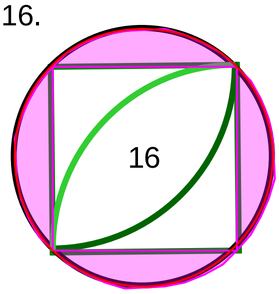
Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEC}, \overset{\Delta}{BPG}$.
Aleshores, $\overline{AB} = \overline{BE} = \overline{BP} = 8$, $\overline{GP} = \overline{CE} = x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPG}$:
$(x+3)^2 = x^2 + 8^2$
Resolent l'equació:
$x = \frac{55}{6}, \overline{AD} = x + 3 = \frac{73}{6}$

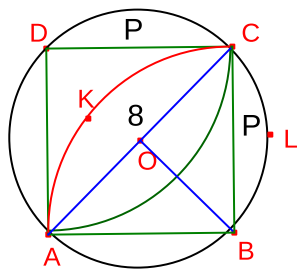
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EKB}, \overset{\Delta}{BPG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{\overline{BK}}{8} = \frac{\frac{55}{6}}{\frac{73}{6}}$$
$$\overline{BK} = \frac{440}{73}$$

$$\overline{AK} = 8 - \frac{440}{73} = \frac{144}{73}$$
L'àrea del rectangle $AKLD$ és:
$$S_{AKLD} = \frac{144}{73} \cdot \frac{73}{6} = 24$$

2550.- L'àrea de la intersecció dels dos quadrants és 16.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució
Siga el quadrat $ABCD$ de centre O.
Siga el quadrant $\widehat{AKC}$ que centre B i radi $\overline{BA}$
Siga el quadrant $\widehat{BLC}$ que centre O i radi $\overline{OB}$



$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{OB}^2} = 2$$
Les àrees de dos quadrants són proporcionals al quadrats dels radis.

Siga P l'àrea del segment circular $\widehat{BLC}$
L'àrea del segment circular $\widehat{AKC}$ és 8

L'àrea del quadrant $\widehat{AKC}$ és:
$S_{AKC} = 8 + \frac{1}{2} S_{ABCD}$.
L'àrea del quadrant $\widehat{BLC}$ és:

$S_{BLC} = P + \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

$S_{AKC} = 2 \cdot S_{BLC}$.

$$8 + \frac{1}{2} S_{ABCD} = 2P + \frac{1}{2} S_{ABCD}$$
$8 = 2P$
L'àrea ombrejada és:
$S = 4P = 16$