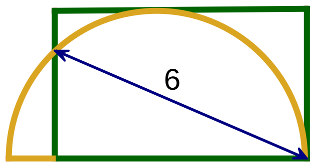
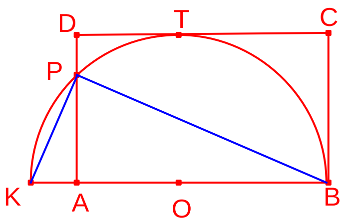
2551.- En la figura, calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:
Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{KB} = 2R$
Siga el rectangle $ABCD$.
Siga $\overline{AB} = c, \overline{AD} = r$ costats del rectangle.

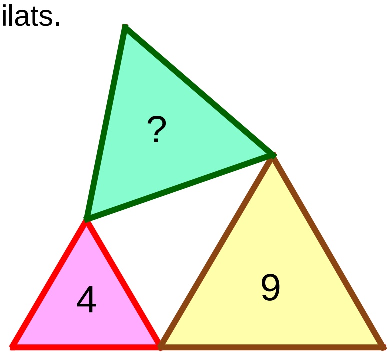


Siga P la intersecció de la semicircumferència i el costat $\overline{AD}$
$\angle APB = 90°$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABP}, \overset{\Delta}{PBK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{6}{2r} = \frac{a}{6}$$
$ar = 18$

L'àrea del rectangle $ABCD$ és:
$S_{ABCD} = ar = 18$

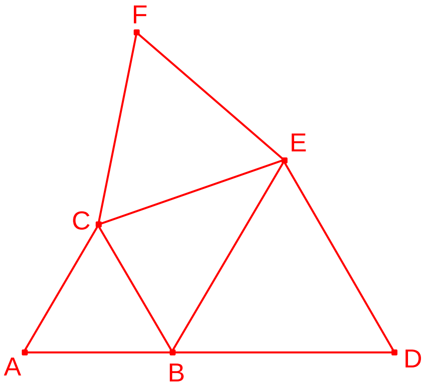
2552.- En la figura, hi ha tres triangles equilàters apilats.
Els de sota tenen àrees 4 i 9.
Calculeu l'àrea del de dalt.



Solució:

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$ d'àrees 4 i 9, respectivament.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CEF}$ d'àrea desconeguda.



Les àrees dels triangles equilàters són proporcionals als quadrats de la proporció dels costats.

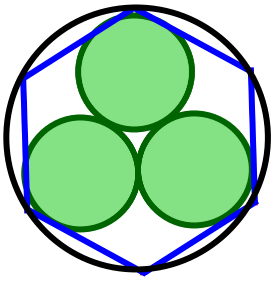
Aleshores, els costats dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$ estan en proporció:
$\sqrt{4} : \sqrt{9}$
Siguen $\overline{BC} = 2k, \overline{BE} = 3k$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$:
$\overline{CE}^2 = (2k)^2 + (3k)^2 - 2 \cdot 2k \cdot 3k \cdot \cos 60°$
$\overline{CE}^2 = 7k^2$

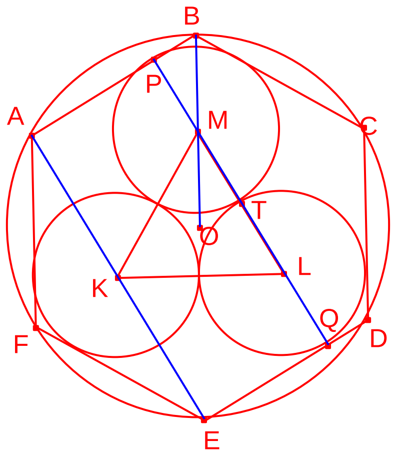
$$\frac{S_{CEF}}{4} = \left(\frac{\overline{CE}}{\overline{\overline{AB}}}\right)^2 = \frac{7k^2}{4k^2} = \frac{7}{4}$$

Aleshores:
$S_{CEF} = 7$

2553.- En un hexàgon regular s'han empaquetat tres circumferències iguals i una circumferència circumscrita. Calculeu la proporció entre la suma de les àrees dels tres cercles interior i l'àrea del cercle exterior.



Solució:



Els centres de les tres circumferències interior formen un triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$
Siga O el centre de l'hexàgon regular.
El radi de la circumferència circumscrita és igual a $\overline{OB} = \overline{AB} = R$

Siga $r = \overline{MT}$ radi de les circumferències interiors.
Els punts de tangència P, Q estan alineats amb $\overline{ML}$.
$\overline{PQ} = 4r$
$\overline{PQ} = \overline{AE} = R\sqrt{3}$

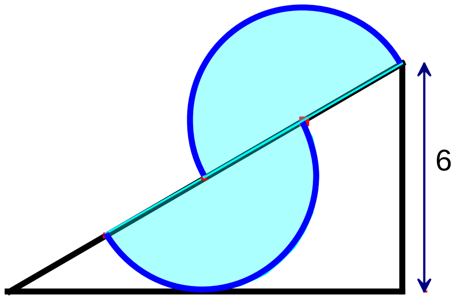
$4r = R\sqrt{3}$
$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{3}{16}$

Les àrees de dos cercles són proporcionals als quadrats dels radis:
Les proporcions de les àrees dels cercles de centre M i O és:
$\frac{S_M}{S_O} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{3}{16}$

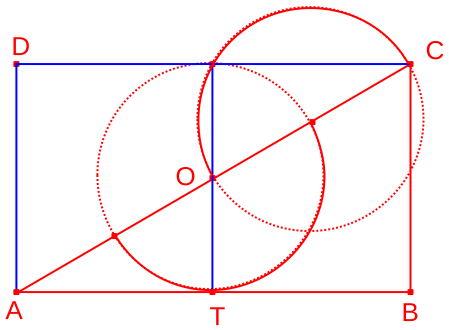
La proporció entre les àrees de les tres circumferències interior i l'exterior és:

$$\frac{3 \cdot S_M}{S_O} = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$$

2554.- Determineu l’àrea ombrejada de dos semicercles iguals.



Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}, B = 90°, \overline{BC} = 6$
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{AB}$

Dibuixem el rectangle $ABCD$.
La circumferència de centre O i radi $R = \overline{OT}$ és tangent al costat $\overline{CD}$
L’altra semicircumferència igual té diàmetre $\overline{OC} = 2R$

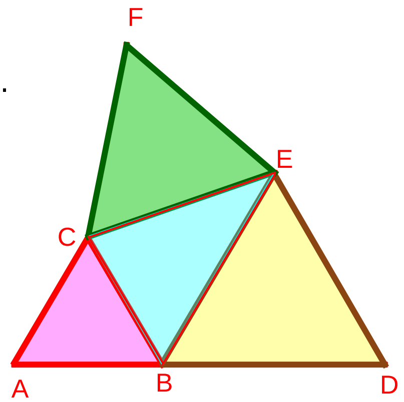
Aleshores,
$\overline{OT} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3$

L’àrea ombrejada és igual a l’àrea d’un cercle de radi 3.
$S = 9\pi$

2555.- En la figura els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}, \overset{\Delta}{CEF}$ són equilàters.

La suma de les àrees dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{BDE}$ és 100.

Calculeu la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{CEF}$



Solució:
Siga $\overline{AB} = c, \overline{BD} = d$ costats dels triangles equilàters.
$S_{ABC} + S_{BDE} = 100$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(c^2 + d^2) = 100$$

Siga $\overline{CE} = e$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \frac{1}{2}$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - cd$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CEF}$ és:

$$S_{CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}e^2$$

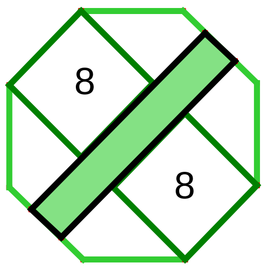
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és:

$$S_{CEF} = \frac{1}{2}cd \cdot sin60° = \frac{\sqrt{3}}{4}cd$$

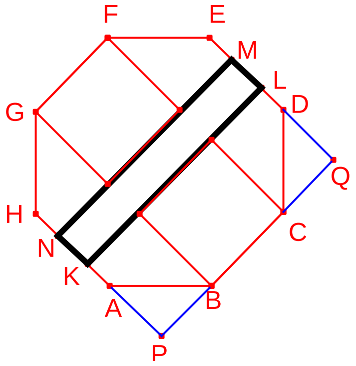
La suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCE}, \overset{\Delta}{CEF}$ és:

$$S_{BCE} + S_{CEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}cd + \frac{\sqrt{3}}{4}e^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}cd + \frac{\sqrt{3}}{4}(c^2 + d^2 - cd) = \frac{\sqrt{3}}{4}(c^2 + d^2) = 100$$

2556.- En l’interior de l’octògon regular s’han dibuixat dos quadrats d’àrea 8.
Calculeu l’àrea del rectangle ombrejat.



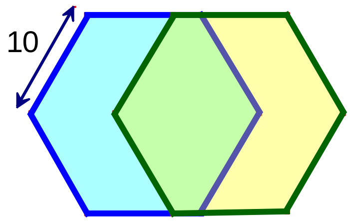
Solució:
Siga $ABCDEFGH$ l’octògon regular de costat $\overline{AB} = c$
L’àrea del quadrat del costat $\overline{FG}$ és 8:
$c^2 = 8$



$\overline{BG} = \overline{KL} = \overline{PQ} = (1 + \sqrt{2})c$

$\overline{NK} = \overline{BG} - 2c = (\sqrt{2} - 1)c$
L’àrea del rectangle KLMN és:
$S_{KLMN} = \overline{NK} \cdot \overline{KL} = (\sqrt{2} - 1)c \cdot (1 + \sqrt{2})c = c^2 = 8$

2557.- Dos hexàgons regulars de costat 10 estan sobreposats, formant tres polígons d'àrees iguals. Calculeu el perímetre de la figura.

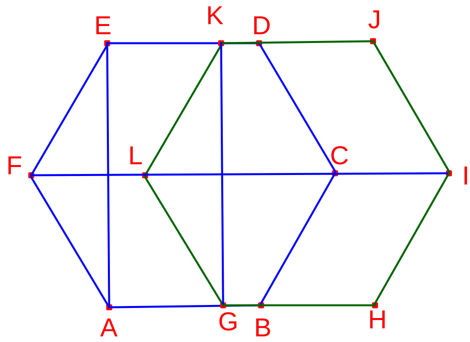


Solució:
Siguen els hexàgons regulars iguals $ABCDEF, GHIJKL$ de costat $\overline{AB} = 10$

Siga $\overline{KD} = x$.
$\overline{EK} = \overline{FL} = 10 - x$

$\overline{EJ} = \overline{AH} = 20 - x, \overline{LC} = 10 + x$

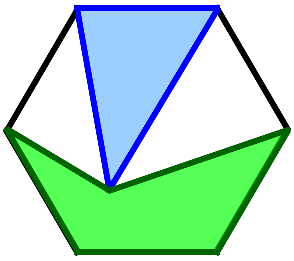
$\overline{AE} = 10\sqrt{3}$



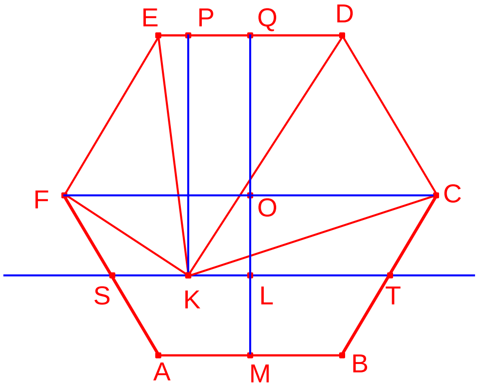
L'àrea de l'hexàgon $AGLKEF$ és:
$S_{AGLKEF} = \overline{EK} \cdot \overline{AE} = 10\sqrt{3}(10 - x)$

L'àrea de l'hexàgon $GBCDKL$ és:
$S_{GBCDKL} = 2 \cdot \frac{\overline{LC} \cdot \overline{KD}}{2} \cdot \frac{\overline{KG}}{2} = 10\sqrt{3}(5 + x)$
Igualant les dues àrees:
$10\sqrt{3}(10 - x) = 10\sqrt{3}(5 + x)$
Resolent l'equació:
$x = \frac{5}{2}$
El perímetre de la figura és:
$P_{AHIJEF} = 4 \cdot 10 + 2(20 - x) = 75$

2558.- L'àrea del triangle blau és la quarta part de l'àrea de l'hexàgon regular.
Calcula la proporció de les àrees del pentàgon verd i l'hexàgon regular.



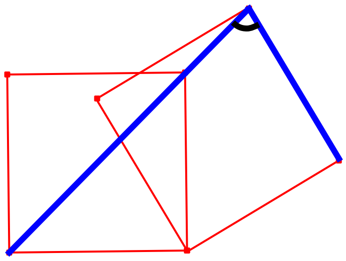
Solució:



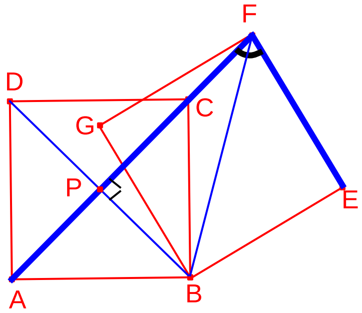
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$, de centre O.
Siguen M, Q els punts migs dels costats $\overline{AB}, \overline{DE}$, respectivament.
$\overline{MQ} = c\sqrt{3}$

Siga el triangle blau $\overset{\Delta}{DEK}$ d'àrea la quarta part de l'àrea de l'hexàgon regular.
Siga $\overline{KP} = h$ l'altura.
$$\frac{1}{2}ch = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
Aleshores:
$$h = \frac{3}{4}\sqrt{3}c = \frac{3}{4}\overline{QM}$$
La paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa pel punt K talla els costats de l'hexàgon en els punts S, T i a la recta MQ en el punt L.
$$\overline{OL} = \overline{MQ} - \overline{KP} = \frac{1}{4}\sqrt{3}c$$
$\overline{ST}$ és la paral·lela mitjana del trapezi $ABCF$.
$$\overline{ST} = \frac{\overline{AB} + \overline{CF}}{2} = \frac{3}{2}c$$
L'àrea verda és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{STO}$ més l'àrea del trapezi $ABCF$:
L'àrea és:
$$S_{ABCF} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}c \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}c + \frac{c + \frac{3}{2}c}{2}\frac{1}{4}\sqrt{3}c = \frac{1}{2}\sqrt{3}c^2$$
La proporció d'àrees és:
$$\frac{S_{ABCKF}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}c^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2} = \frac{1}{3}$$

2559.- Els dos quadrats de la figura són iguals.
Determineu l'angle desconegut.



Solució:



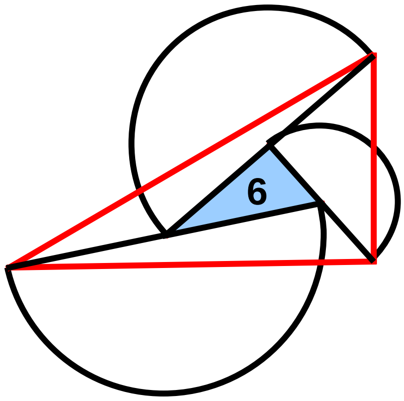
Siguen els quadrat $ABCD, BEFG$
$\angle EFB = 45°$
Siga P la intersecció de les diagonals del quadrat $ABCD$.
$\angle BPF = 90°$

$$\overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{BF}$$

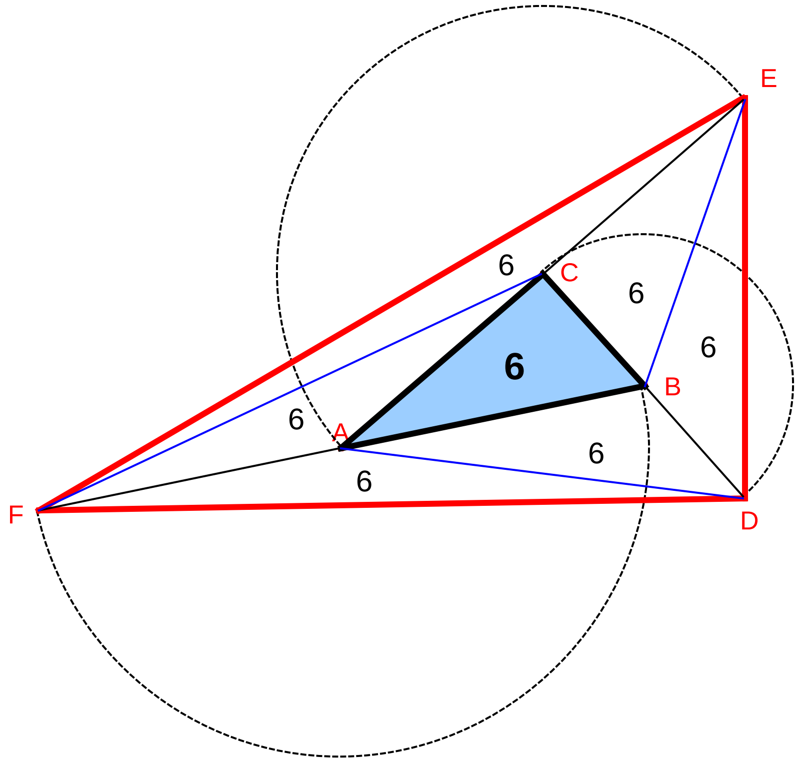
Aleshores:
$\angle BFP = 30°$

Per tant,
$\angle AFP = \angle BFE + \angle BFP = 45° + 30° = 75°$

2560.- Calculeu l’àrea del triangle roig exterior sabent que el triangle del centre té àrea 6.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura, tenen la mateixa àrea.



$S_{ABC} = 6$

Al unir els vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ amb els vèrtexs del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es formen sis triangles que tenen la mateixa base i altura que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Aleshores:
$S_{DEF} = 7 \cdot S_{ABC} = 7 \cdot 6 = 42$