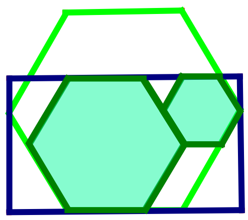
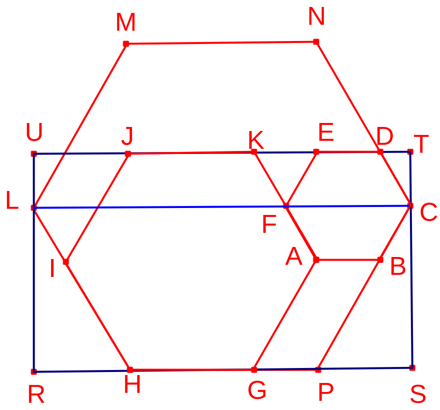
2561.- Els tres hexàgons de la figura són regulars. Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del rectangle



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga l'hexàgon regular $AGHIJK$.
$\overline{FK} = \overline{KE} = \overline{FE} = c$
Aleshores, $\overline{AG} = 2c$
Siga l'hexàgon regular $LMNCPH$.
$\overline{BP} = \overline{AG} = 2c$
Aleshores, $\overline{CP} = 3c$



Siga el rectangle $RSTU$.
$\overline{RS} = \overline{CL} = 2 \cdot \overline{CP} = 6c$

$\overline{ST} = \overline{GK} = 2c\sqrt{3}$

L'àrea del rectangle $RSTU$ és:
$S_{RSTU} = 6c \cdot 2c\sqrt{3} = 12\sqrt{3}c^2$

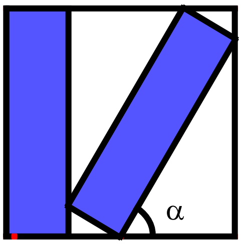
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea dels dos hexàgons regulars de costats $c, 2c$:

$$S_{ombrejada} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(2c)^2 = \frac{15\sqrt{3}}{2}c^2$$

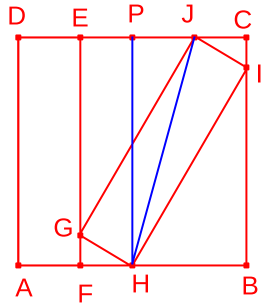
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{RSTU}} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{12\sqrt{3}} = \frac{5}{8}$$

2562.- Dos rectangles iguals estan empaquetats en un quadrat.
Calculeu la mesura de l'angle desconegut.

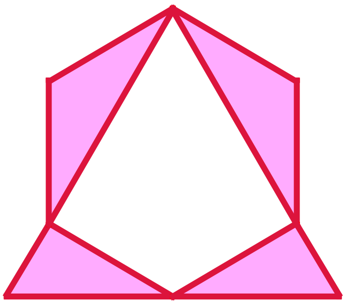


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siguen els rectangles iguals $ADEF, GHIJ$.
Siga $\overline{AF} = \overline{GH} = x, \overline{FH} = y$
$\overline{FG} = \sqrt{x^2 - y^2}, \overline{GE} = c - \sqrt{x^2 - y^2}$

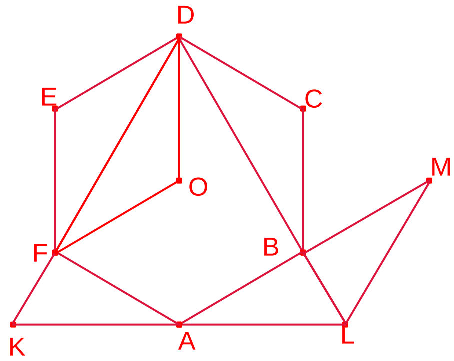


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GFH}, \overset{\Delta}{JEG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c - \sqrt{x^2 - y^2}}{y} = \frac{c}{x}$$
Simplificant:
$$c(x - y) = x\sqrt{x^2 - y^2} \qquad (1)$$
Siga P la projecció de H sobre el costat $\overline{CD}$
$\overline{HJ} = \sqrt{c^2 + x^2}, \overline{HP} = c, \overline{PJ} = c - x - 2y$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HPJ}$:
$$c^2 + x^2 = c^2 + (c - x - 2y)^2$$
$$c^2 + 4y^2 - 2cx - 4cy + 4xy = 0$$
$$(c - 2y)^2 = 2x(c - 2y)$$
$$c - 2y = 2x$$
$$x + y = \frac{c}{2}$$
$$y = \frac{c - 2x}{2} \qquad (2)$$
Substituint en l'expressió (1)
$$c(x - y) = x\sqrt{\frac{c}{2}(x - y)}$$
Elevant al quadrat i simplificant:
$$c^2(x - y)^2 = x^2 \cdot \frac{c}{2}(x - y)$$
$$c(x - y) = \frac{x^2}{2}$$
$$c\left(x - \frac{c - 2x}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$$
$$x^2 - 4cx + c^2 = 0$$
Resolent l'equació:
$$x = \left(2 - \sqrt{3}\right)c$$
Substituint en l'expressió (2)
$$y = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2}c$$
Siga $\alpha = \angle IHB = \angle FGH$
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGH}$
$$\sin\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{2\left(2 - \sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Aleshores, $\alpha = 60°$

2563.- Un vèrtex d'un hexàgon regular és vèrtex d'un triangle equilàter.
El vèrtex oposat de l'hexàgon és el punt mig del costat del triangle equilàter.
Determineu la proporció de l'àrea ombrejada i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:



Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$ i d'àrea S.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ és la sisena part de l'àrea de l'hexàgon regular.

$$S_{DEF} = \frac{1}{6}S$$
$$\overline{DF} = c\sqrt{3}$$

Siga el triangle $\overset{\Delta}{BLM}$ simètric del triangle $\overset{\Delta}{ABL}$ respecte de la recta BL.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEF}, \overset{\Delta}{ALM}$ són semblants i de raó $\sqrt{3} : 2$

Aleshores:

$$\frac{S_{ALM}}{S_{DEF}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Aleshores:

$$S_{ALM} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6}S = \frac{2}{9}S$$

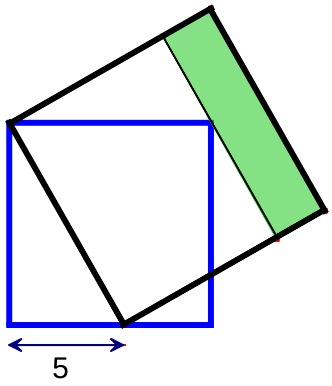
L'àrea ombrejada és:

$$S_{ombrejada} = 2 \cdot S_{DEF} + S_{ALM} = 2 \cdot \frac{1}{6}S + \frac{2}{9}S = \frac{5}{9}S$$

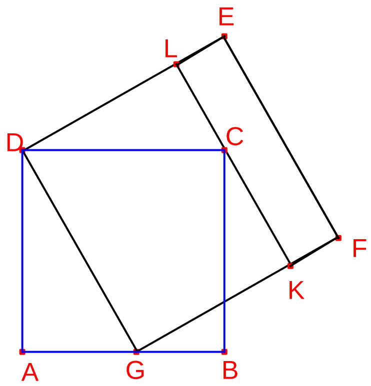
La proporció de les àrees és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S} = \frac{5}{9}$$

2564.- En la figura, dos quadrats estan sobreposats.
Calculeu l'àrea ombrejada.



Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga el quadrat $DEFG$ tal que $\overline{AG} = 5$.
Considerem el rectangle $KFEL$.

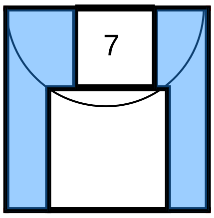


Siga $\overline{DL} = x$
$\overline{DG} = \sqrt{5^2 + c^2}$
$\overline{LE} = \sqrt{5^2 + c^2} - x$

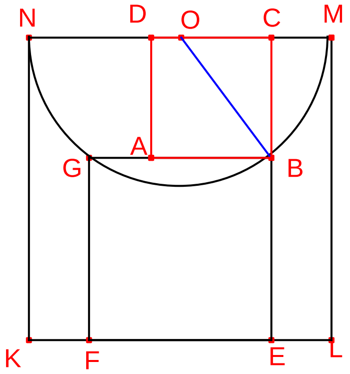
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AGD}, \overset{\Delta}{LCD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{x}{c} = \frac{c}{\sqrt{5^2 + c^2}}$$
$$x\sqrt{5^2 + c^2} = c^2$$

L'àrea del rectangle $KFEL$ és:
$$S_{KFEL} = \left(\sqrt{5^2 + c^2} - x\right)\sqrt{5^2 + c^2} = 5^2 + c^2 - x\sqrt{5^2 + c^2} = 5^2 + c^2 - c^2 = 25$$

2565.- El quadrat més menut dels 3 quadrats té àrea 7.
Calculeu l’àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Podem traslladat el quadrat d’àrea 7 perquè coincidesca en el vèrtex de l’altre quadrat.



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i àrea $c^2 = 7$.

Siga el quadrat $BEFG$ de costat $\overline{BE} = d$
Siga el quadrat exterior $KLMN$ de costat $\overline{KL} = c + d$

Siga O el punt mig del costat $\overline{MN}$, centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{MN}$ que passa pels punts B, G.

$$\overline{OB} = \frac{c+d}{2}, \overline{OC} = \frac{d}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCB}$:

$$\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

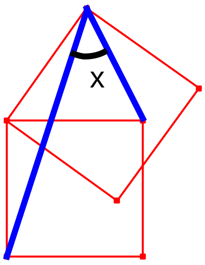
Simplificant:

$$d = \frac{3}{2}c$$

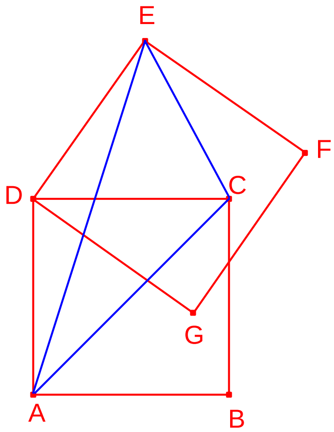
L’àrea ombrejada és igual a l’àrea del quadrat $KLMN$ menys la suma dels quadrats $ABCD, BEFG$:

$$S_{ombrejada} = (c+d)^2 - c^2 - d^2 = 2cd = 3c^2 = 3 \cdot 7 = 21$$

2566.- En la figura, els dos quadrats són iguals.
Calculeu l'angle desconegut.



Solució:
Siguen els quadrats iguals $ABCD, DEFG$.
Siga $\angle GDC = \alpha$

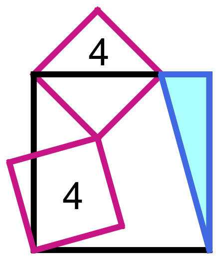


$\angle ADE = 180° - \alpha$
El triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és isòsceles.
Aleshores:
$\angle DAE = \dfrac{\alpha}{2}$
$\angle CAD = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$

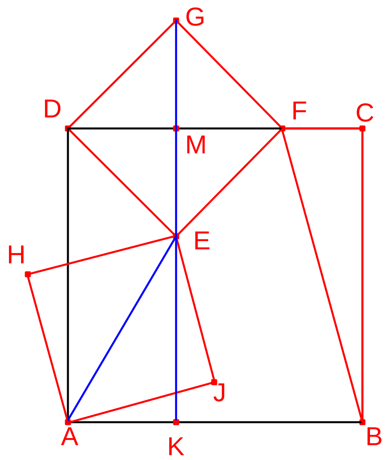
El triangle $\overset{\Delta}{DCE}$ és isòsceles.
$\angle CDE = 90° - \alpha$
Aleshores:
$\angle DEC = 45° + \dfrac{\alpha}{2}$
$\angle ACE = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$

$$x = \angle AEC = 180° - (\angle CAD + \angle ACE) = 180° - \left(45° - \frac{\alpha}{2} + 90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 45°$$

2567.- En la figura hi ha tres quadrats, dos d'ells d'àrea 4.
Calculeu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga $ABCD$ el quadrat d'àrea desconeguda.
Siguen $DEFG, AHEJ$ els quadrats d'àrea 4.
$\overline{DE} = 2$
Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{DF}$
La recta GE talla el costat $\overline{AB}$ en el punt K.
$\overline{DM} = \overline{AK} = \overline{ME} = \sqrt{2}$
$\overline{AE} = \overline{DF} = 2\sqrt{2}$

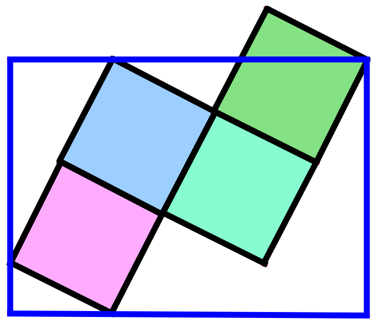


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$:
$\overline{KE} = \sqrt{6}$

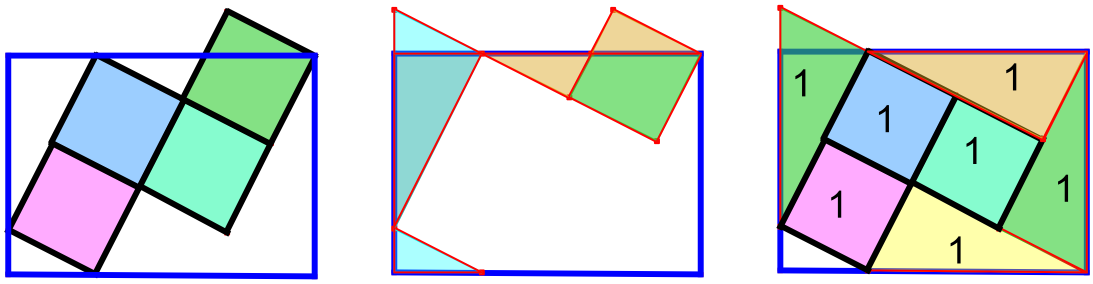
El costat del quadrat $ABCD$ és:
$\overline{BC} = \overline{ME} + \overline{KE} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$
$\overline{FC} = \overline{BC} - \overline{DF} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és:
$S_{BCF} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2$

2568.- Els quatre quadrats de la figura tenen àrea 1.
Determineu l'àrea del rectangle.

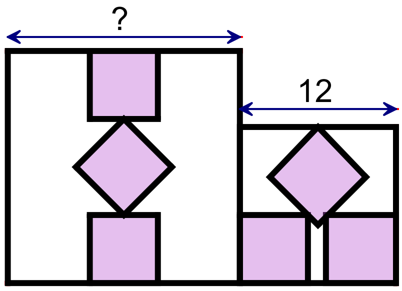


Solució:

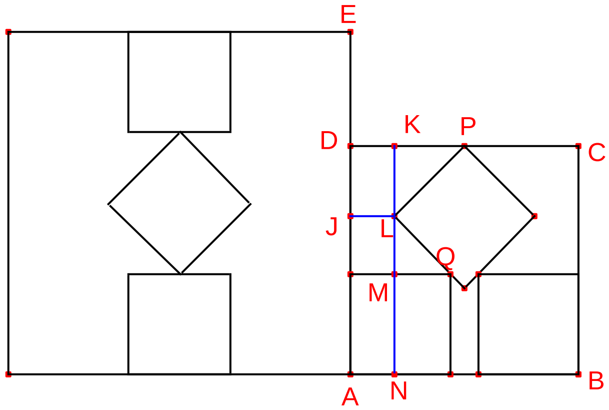


S=7

2569.- Els sis quadrats pintats són iguals.
Estan empaquetats en dos quadrat un de costat 12.
Calculeu el costat de l'altre quadrat més gran.



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = 12$
Siga $c = \overline{PL}$ costat dels sis quadrats iguals.

$$\overline{KL} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{JL} = 6 - \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{MQ} = \overline{LM} = c - \overline{JL} = c - 6 + \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{MN} = c$$

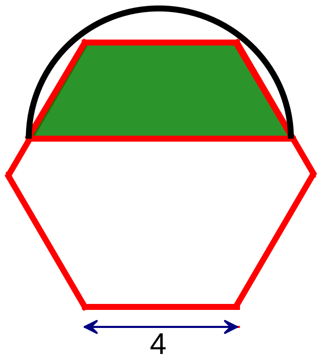
$$\overline{AD} = 12 = c + \frac{\sqrt{2}}{2}c + c - 6 + \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$18 = \left(2 + \sqrt{2}\right)c$$

$$c = 9\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

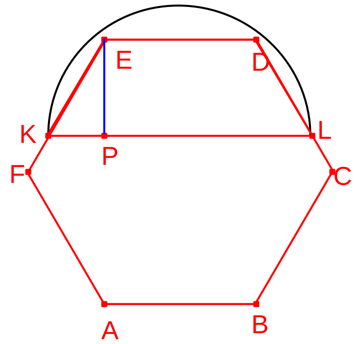
El costat del quedat gran és:
$\overline{AE} = 2c + c\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)9\left(2 - \sqrt{2}\right) = 18$

2570.- La regió ombrejada és la tercera part de l'àrea de l'hexàgon regular de costat 4.
Calculeu l'àrea del semicercle.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = 4$
L'àrea de l'hexàgon és:
$S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} 4^2 = 24\sqrt{3}$

Siga el trapezi $KLDE$ d'àrea la tercera part de l'àrea de l'hexàgon $ABCDEF$.
Siga P la projecció de E sobre el costat $\overline{KL}$
Siga $\overline{PE} = h, \overline{KP} = \frac{\sqrt{3}}{3} h$
$\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KP} + \overline{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} h + 4$
L'àrea del trapezi és:
$S_{KLDE} = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} = \frac{4 + \frac{2\sqrt{3}}{3} h + 4}{2} \cdot h$
Simplificant:
$\sqrt{3} h^2 + 12h - 24\sqrt{3} = 0$
Resolent l'equació:
$h = 2(3 - \sqrt{3})$



El diàmetre del semicercle és:
$\overline{KL} = \frac{2\sqrt{3}}{3} 2(3 - \sqrt{3}) + 4 = 4\sqrt{3}$

L'àrea del semicercle és:
$S = \frac{1}{2} \pi (2\sqrt{3})^2 = 6\pi$